УДК 539.3

О СВОБОДНОМ КОЛЕБАНИИ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНО ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕОДНОРОДНО ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В.ДЖ. ГАДЖИЕВ, *доктор физико-математических наук, профессор;*
Г.Р. МИРЗОЕВА, *доктор философии по механике, ст. научный сотрудник;*
А.И. ШИРИЕВ
Институт математики и механики,
Национальная академия наук Азербайджана,
ул. Б. Вахабзаде 9, г. Баку, Азербайджан, AZ1143

В работе с применением приближенно аналитических методов исследуется задача свободного колебания неоднородно ортотропной прямоугольной пластинки, лежащей на вязко упругом основании, причем краевые условия являются однородными. Предполагается, что модули упругости и плотность пластинки являются непрерывными функциями трех пространственных координат и коэффициенты Пуассона принимаются постоянными. При конкретных значениях характерных функций, характеризующих свойства пластинки и основания, проведен численный расчет, и результаты представлены в виде таблиц и графиками зависимостей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пластинка, непрерывность, ортотропность, плотность, основания, частота, модули упругости, уравнение движения.

В последние годы при сооружении крупных инженерных комплексов и многих отраслей машиностроении широко используются пластинки различных конфигураций, изготовленные из естественных и искусственных непрерывно неоднородных материалов. Среди них наиболее распространенными является прямоугольные пластинки. Как известно, причиной появления неоднородности материала может являться технология изготовления, термическая и механическая обработка, неоднородности составов, облучения и.т.п. В результате вышеуказанных причин упругие характеристики и плотность пластинки одновременно может, является функциями трех пространственных координат [1-4].

В настоящее время, от инженеров проектировщиков и расчетчиков требуется учет реального свойства материала элемента конструкции, режима эксплуатации и влияние внешней среды с которыми они находится в контакте [5-8].

Очевидно, что учет указанных специфических свойств гораздо осложняет математическое ращение задач и анализа полученных результатов, а неучет может привести к существенных погрешностям.

В данной работе с применением приближенно аналитических методов исследуется задача свободного колебания неоднородно ортотропной прямоугольной пластинки (краевые условия являются однородными), лежащей на вязкоупругом основании. Реакция основания и прогиб W связаны следующим соотношением [4,7,8,9]:

$$q = K_1(x,y)W + K_2(x,y)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} . \qquad (1)$$

Здесь $K_1(x,y)$ и $K_2(x,y)$ – характеристики основания, которые определяются с помощью экспериментов, t – время.

Координатная система выбрана следующим образом. Оси X и Y находятся в срединной плоскости, а ось Z – перпендикулярна к ним.

Предполагается, что модули упругости (E_1, E_2), сдвига G и плотность ρ зависят от пространственных координат x, y, z, а коэффициенты Пуассона являются постоянными величинами [1,3]:

$$E_1 = E_1^0 f_1(x,y) f_2(z);\quad E_2 = E_2^0 f(x,y) f_2(z); G = G_0 f_0(x,y) f_2(z),$$
$$\rho = \rho_0 \psi_1(x,y)\psi_2(z);\quad \nu_1 = const;\quad \nu_2 = const \tag{2}$$

Здесь $f_1(x,y)$ со своими производными до второго порядка является непрерывной функцией.

Связь между напряжениями и деформацией в произвольном слое пластинки записывается в следующем виде [1,9]:

$$\sigma_{11} = \frac{E_1^0 f(x,y)}{1-\nu_1\nu_2} f_2(z)(\varepsilon_{11} + \nu_1\varepsilon_{22}),\quad \sigma_{22} = \frac{E_2^0 f_1(x,y)}{1-\nu_1\nu_2} f_2(z)(\varepsilon_{22} + \nu_2\varepsilon_{11}),$$
$$\sigma_{12} = G_0 f(x,y)\varepsilon_{12}. \tag{3}$$

Здесь $E_1^0,\ E_2^0, G_0, \rho_0, \nu_1, \nu_2$ соответствуют однородной ортотропной пластинке.

Принимается, что и для непрерывно неоднородно ортотропной пластинки гипотеза Кирхофа - Лява остаются в силе и имеет место:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} - z\chi_{11},\quad \varepsilon_{22} = e_{22} - z\chi_{22},\quad \varepsilon_{12} = e_{12} - z\chi_{12}, \tag{4}$$

где e_{11}, e_{22}, e_{12} – малые деформации $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ – кривизны и кручение срединной поверхности, компоненты вектора перемещений (u, v, w) связаны следующим образом:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y};\ e_{12} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$
$$\chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \chi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{5}$$

Так как в плоскости пластинки внешние силы отсутствуют, то естественно предположить, что результирующие силы T_{11}, T_{22}, T_{12} всюду равны нулю:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz = 0;\quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dz = 0;\quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dz = 0. \tag{6}$$

Подставляя значение $\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{12}$ в (6) с учетом (4) находим:

$$(e_{11} + \nu_1 e_{22}) = \frac{A_2}{A_1}(\chi_{11} + \nu_1\chi_{22}),\quad (e_{22} + \nu_2 e_{11}) = \frac{A_2}{A_1}(\chi_{22} + \nu_2\chi_{11}),$$
$$e_{12} = \frac{A_2}{A_1}\chi_{12}. \tag{7}$$

Здесь

$$A_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f_2(z) dz,\quad A_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z\, f_2(z) dz. \tag{8}$$

Нетрудно установить, что изгибающие моменты с прогибом связаны следующими соотношениями:

$$M_{11} = \overline{D_1}\, f_1(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad M_{22} = \overline{D_2}\, f_1(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$
$$M_{12} = \overline{D_k}\, f_1(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{9}$$

Здесь

$$\overline{D_1} = \mu D_1^0, \quad \overline{D_2} = \mu D_2^0, \quad \overline{D_k} = \mu D_k^0; \ \mu = \frac{1}{12}\left(\frac{A_2}{A_1} - A_3\right),$$

$$A_3 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \ f_2(z)dz,$$

$D_1^0,\ D_2^0,\ D_k^0$ соответствуют однородному ортотропному случаю. Уравнение движения в данном случае записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + K_1(x,y)w + \left(K_2(x,y) + \overline{\rho_0}\psi_1(x,y)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Здесь принято:

$$\overline{\rho_0} = \rho_0 h \int_{-h/2}^{h/2} \psi_2(z)dz; \ D_1^0,\ D_2^0,\ D_k^0 -$$

жесткости однородной ортотропной пластинки при изгибе.

Подставляя значения M_{11}, M_{22} и M_{12} из (9) в уравнение (10) получим следующее уравнение:

$$L(w) + K_1(x,y)w + \left[K_2(x,y) + \overline{\rho_0}\psi(x,y)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (11)$$

где

$$L(w) = f_1(x,y)\left[\overline{D_1}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \overline{D_2}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\overline{D_1}\nu_1 + \overline{D_2}\nu_2 + \overline{D_k}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right] + 2\overline{D_1}\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu_1\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}\right) +$$

$$+\overline{D_1}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2\overline{D_2}\frac{\partial f_1}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu_2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) + \overline{D_2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) +$$

$$+\overline{D_k}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]. \quad (12)$$

Как видно, уравнение движения (12) является сложным и нахождение точного решения затруднительно или же при произвольных значениях функции $f_1(x,y),\ K_1(x,y),\ K_2(x,y)$ и $\psi_1(x,y)$ не возможен. Поэтому учитывая, что уравнение (10) является линейным, можно использовать комбинированный способ приближенно аналитического метода решения:

в первом этапе метод разделения переменных, во втором этапе метод ортогонализации Бубнов Галеркина.

В первом этапе решение (10) будем искать в виде:

$$W = V(x,y)e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Здесь $V(x,y)$ должно удовлетворять однородным краевым условиям, ω- частота. Поставляя (13) в уравнение (12) получим:

$$\overline{L}(V) + K_1(x,y)V - \omega^2\left(K_q(x,y) + \overline{\rho}\ \psi(x,y)\right)V = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) будем решать с использованием метода Бубнова – Галеркина [10], причем $V(x,y)$ представим в виде:

$$V(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} A_{ij}\varphi_i(x)\eta_j(y), \quad (15)$$

где A_{ij} – неизвестные постоянные и каждый $\varphi_i(x),\eta_j(y)$ должны удовлетворять соответствующим краевым условиям.

Функция ошибки записывается в следующим образом.

$$\eta(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(A_{ij}\left(L\left(\varphi_i,\eta_j\right)+K_1\left(\varphi_i,\eta_j\right)\right)-\omega^2\left(K_2(x,y)+\overline{\rho_0}\psi(x,y)\right)\varphi_i\eta_j\right)\neq 0. \quad (16)$$

Условия ортогонализации имеют следующий вид:

$$\int_0^a\int_0^b \eta(x,y)\varphi_p(x)\eta_q(y)dxdy=0 \qquad p,q=1,2,.... \quad (17)$$

Значения ω^2 определяется из системы линейных однородных алгебраических уравнений (17). Для существования нетривиального решения главный определитель системы, составленный из коэффициентов A_{ij} должен равняться нулю:

$$\left\|\omega^2\right\|=0. \quad (18)$$

Уравнения (18) является нелинейным алгебраическим уравнением и нахождение ω^2 не вызывает особого труда. Однако в инженерной практике ограничиваются первым приближением. В этом случае ω^2 определяется из следующего уравнения:

$$\int_0^a\int_0^b \eta(x,y)\varphi_1(x)\eta_1(y)dxdy=0, \quad (19)$$

$$\omega^2=\frac{\int_0^b\int_0^a \left(L(\varphi_1,\eta_1)+K_1(x,y)\varphi_1\eta_1\right)\varphi_1(x)\eta_1(y)dxdy}{\int_0^b\int_0^a \left(K_2(x,y)+\overline{\rho_0}\psi(x,y)\right)\varphi_1^2(x)\eta_1^2(y)dxdy}. \quad (20)$$

Для простаты анализа рассмотрим случай цилиндрической формы колебания, который возможен в случае длинной пластинки $(a>>b)$.

В этом случае имеет место:

$$\omega^2=\frac{\int_0^a \left[L(\varphi_1)+K_1\varphi_1(x)\right]\varphi_1(x)dx}{\int_0^a \left(K_2(x)+\overline{\rho_0}\psi(x)\right)\varphi_1^2(x)dx}. \quad (21)$$

В качестве примера рассмотрим случай шарнирного закрепления и функцию аппроксимации примем в виде:

$$\varphi_1=\sin\pi\bar{x}.$$

Анализ приведем для следующих значений характерных функций:

$$\begin{aligned}
&1)\quad f=1+\varepsilon\bar{x};\quad \psi=1+\mu\bar{x};\ K_2=K_2^0\left(1+\alpha\bar{x}\right);\ K_1=K_1^0\left(1+\alpha\bar{x}\right);\\
&b)\ f=1+\varepsilon e^{\bar{x}},\quad \psi=1+\mu e^{\bar{x}},\ K_1=K_1^0\left(1+\alpha e^{\bar{x}}\right),\ K_2=K_2^0\left(1+\alpha e^{\bar{x}}\right);\\
&\varepsilon\in[0{,}1];\ \mu\in[0{,}1];\ \alpha\in[0{,}1],\quad \bar{x}=x\cdot a^{-1}.
\end{aligned} \quad (22)$$

Для первого случая, после элементарных преобразований получим:

$$\omega_y^2 = \frac{D_1(\pi / a)^4 c_1 + K_1^0}{K_2^0 + c_2 \overline{\rho}}, \qquad (23)$$

где $c_1 = \dfrac{1 + 0.5\varepsilon}{1 + 0.5\alpha}$; $c_2 = \dfrac{1 + 0.5\mu}{1 + 0.5\alpha}$.

Здесь K_1^0 и K_2^0 – характеристики однородного вязко - упругого основания.

Результаты расчета для случаев 1 и 2 представлены в виде графиков зависимостей между частотами и характерными параметрами.

Таблица 1

α	$\overline{\omega}_{1,1}^2$	$\overline{\omega}_{1,2}^2$
0	1	1
0.3	0.87	0.665
0.5	0.8	0.544
0.7	0.741	0.46
0.9	0.69	0.399

Таблица 2

ε	$\overline{\omega}_{2,1}^2$	$\overline{\omega}_{2,2}^2$
0	1	1
0.2	0.909	0.749
0.4	0.833	0.599
0.6	0.76	0.499
0.8	0.714	0.427

Таблица 3

μ	$\overline{\omega}_{3,1}^2$	$\overline{\omega}_{3,2}^2$
0	1	1
0.25	0.889	0.705
0.5	0.8	0.544
0.75	0.727	0.443
1	0.667	0.374

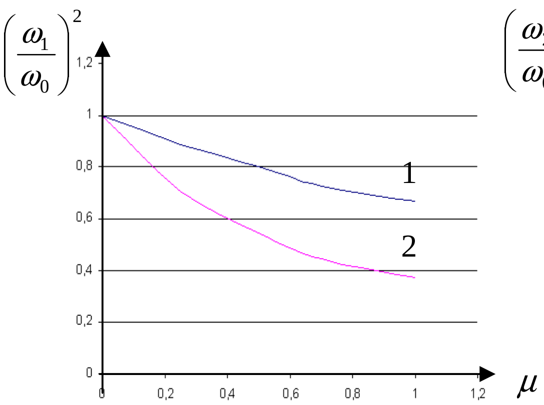

Рис 1. ω_1^2 соответствует случаю $K_2 = 0$

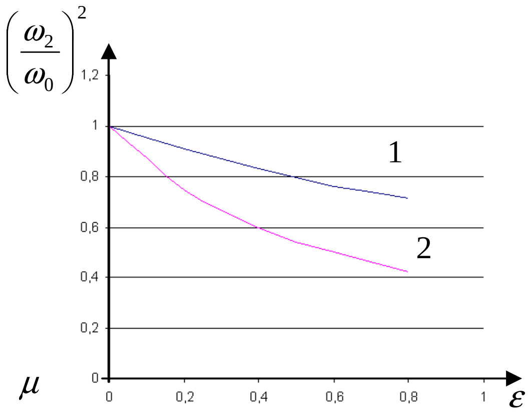

Рис 2. ω_2^2 соответствует случаю $K_1 = 0$

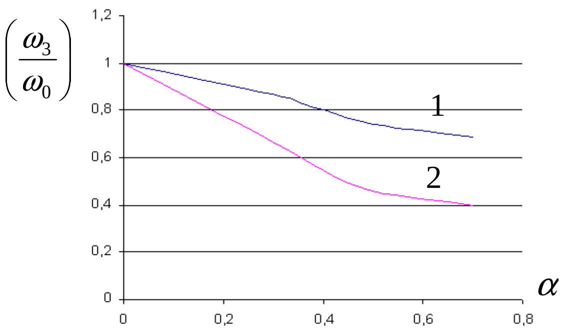

Рис 3. ω_3^2 соответствует случаю $\mu = 0$

Как видно из таблиц и рисунков 1–3, неоднородность, ортотропность пластинки и основания существенно влияет на величину частоты.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. *Ломакин В*.А. Теория упругости неоднородных тел. – Изд-во. МГУ, 1977, 376 с.

2. *Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С.* Механика полимерных и композиционных материалов. – Москва, 1985. – 303 с.

3. *Колчин А.С. Фаварион Э.А*. Теория упругости неоднородных тел. – Кишинев 1977. – 146 с.

4. *Gadjiev V.C., Agamalyev N.C., Mirzoeva B.D.* Stability of continuously nonhomogeneous orthotropic rectangular plate under in plane compressions// International Simposium on Engineering and Architectural Sciences of Balkan, Caucasus and Turk Republics, 2009 Turkey. – P. 74—78.

5. *Carnet H., Lielly A.* Free vibrations of reinforced elastic shells// Journal of Applied Mechanics. 1969, vol. 36, № 4, pp. 835—844, doi: 101115/ 1.3564.779.

6. *Sofiyev A.H., Schack E., Haciyev V.C., Kurdoglu N.* Effect of the two-parameter elastic foundation on the critical parameters of nonhomogeneous orthotropic shells// International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol.12, №5 (2012), 1250041 (24 p.)

7. *Bajenov V.A.* The benching of the cylindrical shells in elastic medium. Kiev. – Visha shkola, 1975. – P. 168.

8. *Ржаныцин А.Р.* Строительная механика. – Москва, 1982. – 399 с.

9. *Лехницкий С. Г.* Теория анизотропных пластин. – М., 1977. – 445 с.

10. *Свирский И.В*. Методы типа Бубнова - Галеркина и последовательных приближений. – Москва: Наука, 1966. – 199с.

Поступила в редакцию 25 мая 2017 г. Прошла рецензирование 30 мая 2017 г.
Принята к публикации 4 июня 2017 г.

Об авторах:

ГАДЖИЕВ ВАГИФ ДЖАМАЛ ОГЛЫ - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом, Отдел теории упругости и пластичности, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана. Научные интересы: теория упругости и пластичности. Адрес НАН Азербайджана: 9, ул. Б. Вахабзаде 9, г. Баку, Азербайджан, AZ1143.
E-mail: vagif.haciyev.imm@gmail.com; конт. тел.: (050) 465-60-88

МИРЗОЕВА ГЛЮНАР РОВШАН КЫЗЫ - доктор философии по механике, старший научный сотрудник, Отдел теории упругости и пластичности, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана. Научные интересы: теория упругости и пластичности. Адрес НАН Азербайджана: 9, ул. Б. Вахабзаде 9, г. Баку, Азербайджан, AZ1143.
E-mail: gulnar.mirzayeva@gmail.com; конт. тел.: (055) 877-38-55

ШИРИЕВ АЗИЗ ИНТИЗАР ОГЛЫ - Институт математики и механики, Национальная Академия Наук Азербайджан. Научные интересы: теория упругости и пластичности. Адрес НАН Азербайджана: 9, ул. Б. Вахабзаде 9, г. Баку, Азербайджан, AZ1143
E-mail: shiriyev.aziz@mail.ru

Для цитирования: *Гаджиев В.Дж., Мирзоева Г.Р., Шириев А.И.* О свободном колебании непрерывно неоднородно ортотропной прямоугольной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 5. – С. 27—33 (DOI: 10.22363/1815-5235-2017-5-27-33).

References

1. *Lomakin, V.A.* (1977). *Theory of Elasticity of Inhomogeneous Bodie*s. Moscow: MSU. 376 (in Russian).

2. *Kravchuk, A.S., Mayboroda,, V.P., Urjumtzev, Yu.S. (*1985). *Mechanics of Polymer and Composite Materials*. Moscow: MSU. 303 (in Russian).

3. *Kolchin, A.S., Favarion, E.A.* (1977). *Theory of Elasticity of Inhomogeneous Bodies*. Chisinau. 146 (in Russian).

4. *Gadjiev, V.C., Agamalyev, N.C., Mirzoeva, B.D.* (2009). Stability of continuously nonhomogeneous orthotropic rectangular plate under in plane compressions. *International Simposium on Engineering and Architectural Sciences of Balkan, Caucasus and Turk Republics*, 2009, Turkey. 74—78.

5. *Carnet, H., Lielly, A.* (1969). Free vibrations of reinforced elastic shells. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 36, № 4, pp. 835-844, doi: 101115/ 1.3564.779.

6. *Sofiyev, A.H., Schack, E., Haciyev, V.C., Kurdoglu, N.* Effect of the two-parameter elastic foundation on the critical parameters of nonhomogeneous orthotropic shells. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol.12, №5 (2012), 1250041 (24 p.)

7. *Bajenov V.A.* (1975). *The benching of the Cylindrical Shells in Elastic Medium*. Kiev, Visha shkola, 168 p. (in Russian).

8. *Rzhanitsyn, A.R.* (1982). *Structural Mechanics* [*Stroitel'naya Mehanika*]. Moscow. 399 (in Russian).

9. *Lekhnitsky, S.G.* (1977). *The Theory of Anisotropic Plates* [*Teoriya Anizotropnyh Plastin*]. Moscow, 445 p. (in Russian).

10. *Svirskiy I.V.* (1966). *Methods of Bubnov - Galerkin Type and Successive Approximations*. Moscow: Nauka, 199 p. (in Russian).

ON FREE VIBRATION OF A NONHOMOGENEOUS ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE ON A NONHOMOGENEOUS VISCO-ELASTIC FOUNDATION

HACIYEV V.C., MIRZAYEVA G.R., SHIRIEV A.I.
Institute Mathematics and Mechanics of NASA, Baku, Azerbaijan

In the paper, by using approximate analytic methods, the study a problem of vibrations of a nonhomogeneous rectilinear plate and a visco – elastic foundation, the boundary conditions are homogeneous.

It is assumed that the modules of elasticity and density of the plate are characteristic functions of three space coordinates, the Poisson ratios are accepted to be constant [1].

The numerical calculation is carried out under specific values of characteristic functions, characterizing the properties of the plate and foundation, and the results are represented in the form of tables and dependence graphs.

Key words: plate, continuity, orthotropic, density, foundation, frequency, elastic module, motion equation.

Article history: *Received: May 25, 2017. Revised: May 30, 2017. Accepted: June 4, 2017.*

About the authors:

HACIYEV VAGIF, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department, Department of Theory of Elasticity and Plasticity, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan.
Str. B. Vahabzadeh 9, Baku, Azerbaijan, AZ 1143.
E-mail: vagif.haciyev.imm@gmail.
Contact tel.: (050) 465-60-88
Scientific interests: The theory of elasticity and plasticity.

MIRZAYEVA GULNAR ROVSHAN, PhD of mechanic, Senior Researcher, Department of Theory of Elasticity and Plasticity, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan .Str. B. Vahabzadeh 9, Baku, Azerbaijan, AZ 1143.
Scientific interests: The theory of elasticity and plasticity.
E-mail: gulnar.mirzayeva@gmail.com; mob.: (055) 877-38-55

SHIRIEV AZIZ INTIZAR, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan.
Str. B. Vahabzadeh 9, Baku, Azerbaijan, AZ 1143
E-mail: shiriyev.aziz@mail.ru
Scientific interests: The theory of elasticity and plasticity.

For citation:

Haciyev V.C., Mirzayeva G.R., Shiriev A.I.(2017) On free vibration of a nonhomogeneous orthotropic rectangular plate on a nonhomogeneous visco-elastic foundation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* No 5. 27—33 (DOI: 10.22363/1815-5235-2017-5-27-33).