



Тогда уравнение деформированной пластины в месте ее заделки в основание примет следующий вид:

$$q^{IV}(x) - \nu q''(x) + \lambda q(x) = 0,$$

где  $\nu = \frac{kc}{S bG}$ ,  $\lambda = \frac{12c}{EbS^3}$ .  $b$  – ширина плиты,  $E$  – модуль упругости первого рода,  $k = 1,2$ ,  $G = 0,5E/(1 + \mu)$ ,  $\mu$  – коэффициент Пуассона материала сопрягаемых элементов,  $I = bS^3/12$ ,  $S$  – толщина плиты.

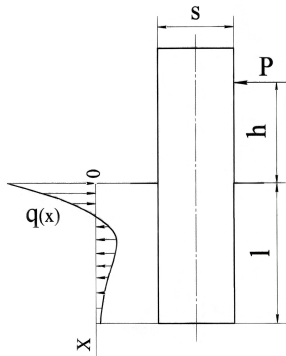


Рис. 2. Распределение нагрузки в основании пластины

Учитывая, что балка испытывает стесненный изгиб, закон изменения погонной нагрузки носит характер аperiодических затухающих колебаний.

Это имеет место при  $\lambda = \nu^2/4$ , или

$$\omega = |\omega_{1-4}| = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{12}{k(1 + \mu)}}.$$

Тогда погонная нагрузка, обусловленная действием внешних силовых факторов,

$$q(x) = y(x)c = (A + Bx)e^{-\omega x}.$$

Постоянные интегрирования  $A, B$  определим из уравнений статики:

$$\int_0^l q(x)dx = P = ql, \quad M_0 + \int_0^l q(x)x dx = 0,$$

здесь  $l$  – длина пластины в зоне ее сопряжения с основанием,  $q$  – средняя погонная нагрузка в указанной зоне.

В соответствии с этим перемещение места приложения силы  $P$  в направлении линии ее действия, обусловленное податливостью основания,

$$y(h) = \frac{s[k(1 + \mu)]^2}{12Eb} [q(0) + q'(0)h]. \quad (1)$$

Для установления законов распределения нагрузки и напряжений изгиба зубьев по их длине  $b$  при наличии угла начального неприлегания  $\beta$  рассмотрим напряженно-деформированное состояние зуба под действием нормальной погонной нагрузки  $W(z)$  и главных нормальных напряжений в его основании  $\sigma(z)$  (рис. 3). Разница моментов, создаваемых указанными силовыми факторами, ведет к кручению зуба относительно оси  $z$ . С учетом этого уравнения связи угла начального неприлегания и деформаций зуба принимают следующий вид:

$$z\beta - \delta_w [W(z) - W(0)] = h[\varphi(z) - \varphi(0)] = \frac{h}{GI_K} \int_0^x [t(\xi) - h_n W(\xi)](z - \xi) d\xi, \quad (2)$$

$$\varphi(z) - \varphi(0) = \delta_F [t(z) - t(0)] / h^2. \quad (3)$$

Здесь  $G$  – модуль упругости второго рода;  $I_K$  – момент инерции поперечного сечения пластины при кручении относительно продольной оси (определяется по приближенной зависимости, как для стержня прямоугольного сечения:  $I_K = \eta Hs^3$  [4], где  $\eta$  – коэффициент, зависящий от отношения высоты сечения

$H$  к его ширине);  $h$  - плечо погонной нагрузки  $W(z)$  относительно центра изгиба пластины;  $t(z)$  – текущее значение погонного момента, создаваемого напряжениями изгиба  $\sigma(v)$ ,  $\delta_F$  - изгибная удельная податливость пластины, определяемая через смещение точки приложения нагрузки относительно центра изгиба  $y_F$  ( $\delta_F = y_F / W$ );  $t$  и  $W$  - средние погонные момент изгиба и нормальная нагрузка ( $t = Wh$ );  $\delta_W$  - составляющая суммарной удельной податливости,

$$\delta_W = (y_\Sigma - y_F) / W = \delta_\Sigma - \delta_F.$$

Перемещения в направлении линии действия нагрузки и соответствующие

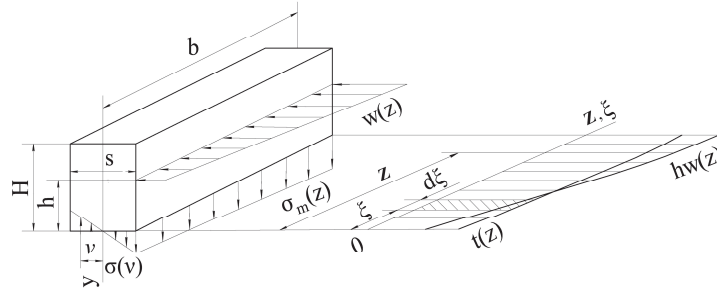


Рис. 3. К определению законов распределения нагрузки и напряжений изгиба по длине пластины

им удельные податливости сдвига и изгиба определяются с использованием интегралов Мора [4,5]:

$$\delta_Q = \int_0^h \frac{1,2dy}{Gs}, \quad \delta_F = \int_0^h \frac{12y^2 dy}{Es^3}.$$

Удельная податливость, вызванная деформативностью основания,  $\delta_0 = y(h) / W$ , где перемещение  $y(h)$  определяется по выражению (1).

Суммарная удельная податливость пластины  $\delta_\Sigma = \delta_Q + \delta_F + \delta_0$  (контактной податливостью пренебрегаем ввиду ее малости).

Подстановка равенства (3) в (2) с учетом уравнения статики

$$\int_0^b W(z) dz = \frac{1}{h_n} \int_0^b t(z) dz = Wb$$

даст 
$$W(z) = \psi^2 \int_0^x W(\xi)(z - \xi) d\xi + \Phi(z), \quad (4)$$

где 
$$\psi = h_n \sqrt{\frac{\delta_\Sigma}{GI_K \delta_W \delta_F}}, \quad \Phi(z) = W(0) + \frac{\beta z}{\delta_W} + 0,5(\psi z)^2 \left[ \frac{\beta}{\delta_\Sigma} \left( \frac{3b - 2z}{6} \right) - W \right].$$

Уравнение (4) представляет собой неоднородное интегральное уравнение Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов, которое в операторной форме имеет следующий вид:

$$L[W(z)] = \bar{W}(P) = \frac{\bar{\Phi}(P)}{1 - (\psi / P)^2}.$$

Решение уравнения методом операционного исчисления и последующая подстановка его в равенства (2), (3) позволяет найти законы изменения погонной нагрузки и погонного момента, вызванного действием напряжений изгиба. Так, переходя от изображения к оригиналу, получим

$$L^{-1}[W(P)] = W(z) = W + \frac{\beta b}{\delta_F + \delta_W} \left[ \frac{z}{b} - 0,5 + \frac{\delta_F}{\psi b \delta_W} \left( sh \psi z + \frac{1 - ch \psi b}{sh \psi b} ch \psi z \right) \right],$$

$$t(z) = Wh_n + \frac{\beta b h_n}{\delta_F + \delta_W} \left[ \frac{z}{b} - 0,5 - \frac{1}{\psi b} \left( sh \psi z + \frac{1 - ch \psi b}{sh \psi b} ch \psi z \right) \right].$$

Найденный погонный момент  $t(z)$  выражается через нормальные напряжения изгиба в основании пластины (см. рис. 3), причем зависимость близка к линейной:  $t(z) = D \sigma_m(z)$ , где  $\sigma_m(z)$  - максимальное значение напряжения изгиба в произвольном поперечном сечении зуба,  $D$  - коэффициент пропорциональности. Поэтому отношение максимального погонного момента к среднему можно представить в виде равенства  $K_F = \sigma_m(b) / \sigma_m$  ( $\sigma_m$  - среднее значение напряжения изгиба в крайних точках сечения).

В соответствии с этим определяются максимальные значения силовых факторов и коэффициенты неравномерности их распределения, соответствующие  $z = b$ :

$$K_H = 1 + \frac{0,5\beta b}{q\delta_\Sigma} \left[ 1 + \frac{2\delta_F}{\psi b \delta_W} \left( sh \psi b + \frac{ch \psi b - 1}{sh \psi b} ch \psi b \right) \right],$$

$$K_F = 1 + \frac{0,5\beta b}{q\delta_\Sigma} \left[ 1 - \frac{2}{\psi b} \left( sh \psi b + \frac{ch \psi b - 1}{sh \psi b} ch \psi b \right) \right].$$

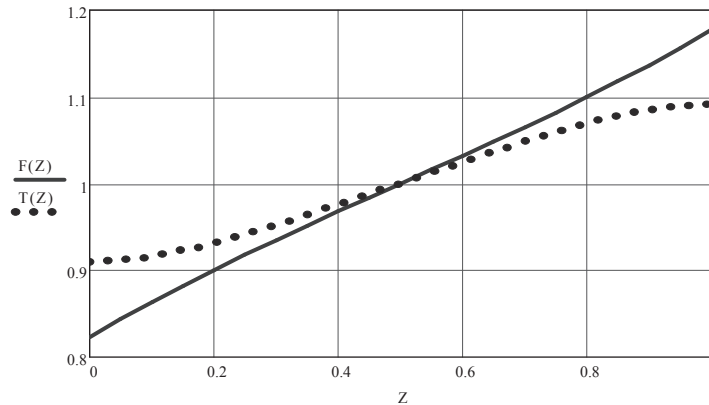


Рис. 4. Распределение относительной нагрузки  $F(Z)$  и относительного момента изгиба пластины  $T(Z)$  по ее длине ( $Z = z/b$ ) при  $\gamma = \beta b E / W = 30$ ,  $l/s = 1$ ,  $h/s = 2$ ,  $H/s = 2$ ,  $B = b/s = 5$

На рис. 4-6 представлены графики изменения относительной нагрузки  $F(Z) = W(Z)/W$ , относительного момента  $T(Z) = t(Z)/t$  и соответствующих им коэффициентов неравномерности  $K_H$  и  $K_F$  в зависимости от безразмерных величин  $B = b/m$ ,  $\gamma = \beta b E / W$ ,  $Z = z/b$ . На рис. 7 – то же для пластины, заделанной в жесткое основание (при  $y(h) = 0$ ).

Анализ приведенных выражений и построенных по ним графиков показывает, что деформативность толстой пластины в месте заделки в основание оказывает существенное влияние на ее напряженно-деформированное состояние. При наличии начального неприлегания заделанной в основание пластины и контактирующей с ней детали нагрузка в зоне контакта распределяется менее равномерно, чем изгибающий момент и соответствующие ему напряжения из-

гиба пластины. Это обусловлено ее кручением и появлением в результате этого касательных напряжений в сечениях, перпендикулярных продольной оси  $z$ , которые создают поддерживающий эффект, передавая изгибающий момент от одного сечения к другому.

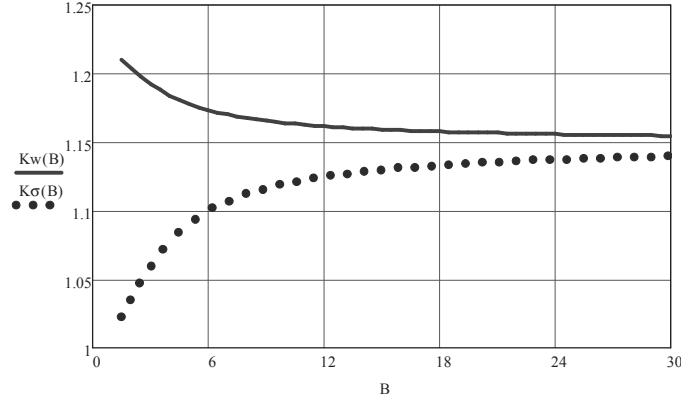


Рис. 5. Зависимость коэффициентов неравномерности распределения нагрузки  $K_W$  и напряжений изгиба пластины  $K_\sigma$  от ее относительной длины  $B = b/s$  при  $\gamma = \beta b E/W = 30$ ,  $l/s = 1$ ,  $h/s = 2$ ,  $H/s = 2$ ,

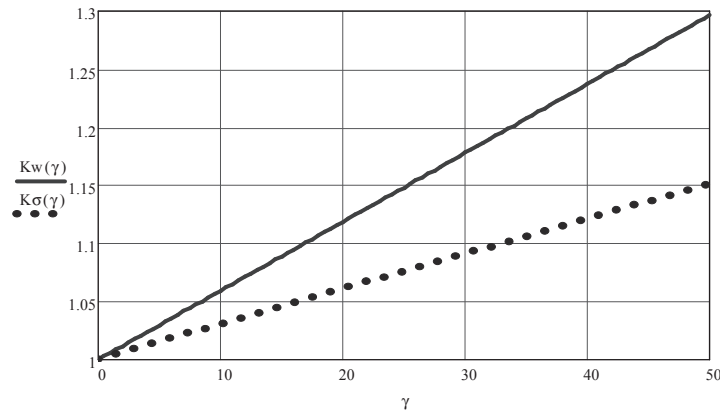


Рис. 6. Зависимость коэффициентов неравномерности распределения нагрузки  $K_W$  и напряжений изгиба пластины  $K_\sigma$  от относительного угла начального неперилегания контактирующих тел  $\gamma$  при  $l/s = 1$ ,  $h/s = 2$ ,  $H/s = 2$ ,  $B = b/s = 5$

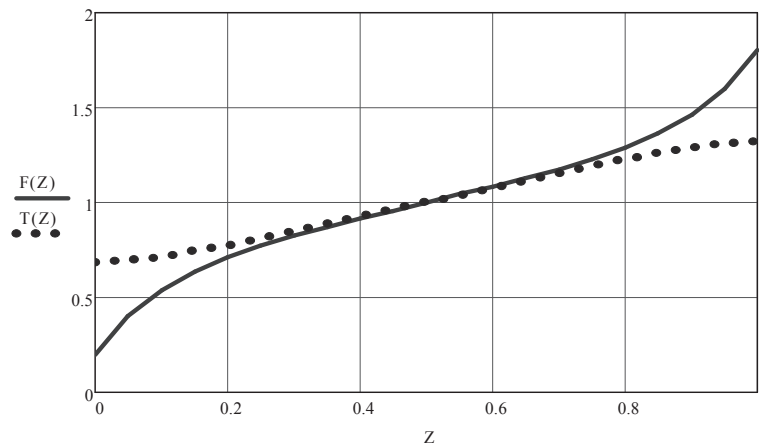


Рис. 7. Распределение относительной нагрузки  $F(z)$  и относительного момента изгиба пластины  $T(z)$  по ее длине ( $Z = z/b$ ) при  $\gamma = \beta b E/W = 30$ ,  $l/s = 1$ ,  $h/s = 2$ ,  $H/s = 2$ ,  $B = b/s = 5$  и жестком основании

При отношении длины пластины к ее толщине не менее 6, суммарной ширине, в три раза превышающей толщину, и отношении плеча приложенной к пластине силы к ее толщине, равном двум, коэффициент неравномерности распределения нагрузки превышает коэффициент неравномерности распределения напряжений изгиба не более чем на 7%, с уменьшением относительной длины пластины эта разница возрастает, с увеличением - падает. Использование полученных зависимостей при расчете строительных конструкций и механических систем на прочность и жесткость позволит более точно определить их нагрузочную способность, исследовать виброакустические характеристики.

© Плеханов Ф.И., 2017

#### Список литературы

1. Novikov A.S., Golovanov V.V., Dorofeyev V.L., Dorofeyev D.V. Design of optimal geometry, stress, stiffness, vibration and terminology of asymmetrical and HCR gears for aircraft// Proc. of the Int. Symp. "Theory and Practice of Gearing", Izhevsk.- 2014. – P.129-140.
2. Plekhanov F.I., Kuznetsov V.S. (2010). Deformability of elements of a planetary gear transmission// Russian Engineering Research. – 2010. – Vol. 30. – No 6. – P. 557—560.
3. Френкель И.Н. Влияние упругой деформации части обода, прилегающей к зубу, на жесткость зацепления // Вопросы геометрии и динамики зубчатых передач. – М.: Наука, 1964. – С. 105—131.
4. Ахметзянов М.Х., Лазарев И.Б. Сопротивление материалов. – М.: ЮРАЙТ, 2011. – 299 с.
5. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. Пер. с нем. – М.: Мир, 1988. – 344 с.

Поступила в редакцию 15 мая 2017 г. Прошла рецензирование 30 мая 2017 г.

Принята к публикации 18 июня 2017 г.

**Об авторе:** ПЛЕХАНОВ ФЕДОР ИВАНОВИЧ, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Промышленное и гражданское строительство», ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова». Адрес: 426069, Удмуртия, Ижевск, ул. 7 Подлесная, дом 100/2, кв. 44. Тел.: 89128501943; e-mail: fplekhanov@list.ru

#### Для цитирования:

Плеханов Ф.И. Распределение нагрузки и напряжений изгиба по длине толстой пластины, заделанной в основание, при наличии угла начального неперпендикулярного сопрягаемой с ней детали // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 5. – С. 21—26 (DOI: 10.22363/1815-5235-2017-5-21-26).

#### References

1. Novikov, A.S., Golovanov, V.V., Dorofeyev, V.L., Dorofeyev, D.V. (2014). Design of optimal geometry, stress, stiffness, vibration and terminology of asymmetrical and HCR gears for aircraft. Proceedings of the International Symposium "Theory and Practice of Gearing", Russia, Izhevsk. 129—140.
2. Plekhanov, F.I., Kuznetsov, V.S. (2010). Deformability of elements of a planetary gear transmission. *Russian Engineering Research*, 30(6). 557—560.
3. Frenkel, I.N. (1964). Influence of resilient deformation of part of rim, adherent to the tooth, on inflexibility of hooking. *Voprosy Geometrii i Dinamiki Zubchatyh Peredach*: Nauka. 105—131.
4. Axmetzaynov, M.X., Lazarev, I.B. (2011). *Strength of Materials*, M.: URAYT. 299.
5. Han, H. (1988). *Theory of Elasticity. Bases of Linear Theory and its Application*. M.: Mir. 344.

#### DISTRIBUTION OF LOAD AND BENDING STRESSES ALONG THE LENGTH OF THE THICK PLATE FIXED IN THE BASE WHEN AN INITIAL ANGLE BETWEEN IT AND THE DETAIL CONTRACTING WITH IT

F.I. PLEKHANOV

The paper describes a method for determining coefficients of load and bending-stress distribution along a rigidly fixed thick plate which is in edge contact with the other part when no load is applied. The method is based on the solution of integral Volterra equation which binds angle between contacting elements and components of strain.

**Keywords:** fixed thick plate, contact, load, bending stress.

**Article history:** Received: May 15, 2017. Revised: May 30, 2017. Accepted: June 18, 2017.

**For citation:** Plekhanov F.I. (2017) Distribution of load and bending stresses along the length of the thick plate fixed in the base when an initial angle between it and the detail contracting with it. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. (5). 21—26 (DOI: 10.22363/1815-5235-2017-5-21-26).