

Теория упругости

УДК 539.372

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ СПЛОШНЫХ СРЕД

С.В. БАКУШЕВ, д.т.н., профессор

ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет архитектуры и строительства", каф. "Механика".

440071, г. Пенза, ул. Лядова, дом 30, кв. 84, bakuchsv@mail.ru

Рассматриваются вопросы теоретической оценки величины коэффициента поперечной деформации в сплошных средах, находящихся в условиях осе-симметричного деформирования. Показано, что величина коэффициента поперечной деформации существенно зависит как от механических характеристик материала полупространства, уровня развития напряжённо-деформированного состояния в рассматриваемой точке, так и от вида рассматриваемой математической модели сплошной среды (геометрически линейной или геометрически нелинейной) и может превышать предельное значение для линейно-упругого материала, равное 0,5.

Ключевые слова: сплошная среда, осе-симметричная деформация, коэффициент поперечной деформации, геометрическая и физическая нелинейность.

Введение. Механические константы массивных тел, в частности грунтовых массивов – начальный модуль упругости, начальный модуль сдвига, начальный коэффициент поперечной деформации и так далее – определяются на основе экспериментов. В результате обработки экспериментальных данных строятся всевозможные математические модели, описывающие механическое поведение массивных тел. Эти модели представляют собой, вообще говоря, совокупность двух соотношений. Первое соотношение устанавливает связь между объёмными напряжениями и объёмными деформациями:

$$\sigma = 3K \cdot \varepsilon. \quad (1)$$

Второе соотношение устанавливает связь между сдвиговыми напряжениями и сдвиговыми деформациями:

$$T = G \cdot \Gamma. \quad (2)$$

Здесь $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ – первый инвариант тензора напряжений;
 $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ – первый инвариант тензора деформаций;

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} -$$

интенсивность касательных напряжений (величина, пропорциональная второму инварианту девиатора напряжений);

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)} -$$

интенсивность деформаций сдвига (величина, пропорциональная второму инварианту девиатора деформаций).

Эксперименты подтверждают факт взаимного влияния инвариантов тензоров и девиаторов напряжений и деформаций на механическое поведение грунтов и грунтовых массивов. Это означает, что объёмное деформирование грунта определяется как гидростатическим давлением, так и сдвиговыми напряжениями; а изменение формы грунтовых массивов происходит не только при дейст-

вии касательных напряжений, но и при гидростатическом давлении. Таким образом, в формулах (1), (2) и модуль объёмного расширения (сжатия) K , и модуль сдвига G , в самом общем случае должны зависеть как от объёмной, так и от сдвиговой деформации, то есть $K = K(\varepsilon, \Gamma)$; $G = G(\varepsilon, \Gamma)$. Следовательно, формулы (1) и (2) устанавливают перекрёстные зависимости между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций.

Связь между переменными модулями объёмного расширения (сжатия) $K(\varepsilon, \Gamma)$, сдвига $G(\varepsilon, \Gamma)$ и переменными модулями упругости $E(\varepsilon, \Gamma)$ и коэффициентом поперечной деформации $\mu(\varepsilon, \Gamma)$ устанавливается известными соотношениями:

$$E(\varepsilon, \Gamma) = \frac{9K(\varepsilon, \Gamma) \cdot G(\varepsilon, \Gamma)}{3K(\varepsilon, \Gamma) + G(\varepsilon, \Gamma)}; \quad \mu(\varepsilon, \Gamma) = \frac{3K(\varepsilon, \Gamma) - 2G(\varepsilon, \Gamma)}{2[3K(\varepsilon, \Gamma) + G(\varepsilon, \Gamma)]}; \quad (3)$$

$$K(\varepsilon, \Gamma) = \frac{E(\varepsilon, \Gamma)}{3[1 - 2\mu(\varepsilon, \Gamma)]}; \quad G(\varepsilon, \Gamma) = \frac{E(\varepsilon, \Gamma)}{2[1 + \mu(\varepsilon, \Gamma)]}. \quad (4)$$

Вид функций $K(\varepsilon, \Gamma)$ и $G(\varepsilon, \Gamma)$ определяется видом кривых объёмного (1) и сдвигового (2) деформирования. Вид функции $E(\varepsilon, \Gamma)$ определяется видом кривой $\sigma_x = \sigma_x(\varepsilon_x)$ при одномерном деформировании ($\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$). Что касается функции $\mu(\varepsilon, \Gamma)$, то её вид может быть установлен лишь с использованием соотношения (3) для конкретного вида деформирования сплошной среды (плоское, сферически-симметричное, осе-симметричное и так далее), для конкретной математической модели сплошной среды и конкретных численных значений констант, входящих в описание математической модели.

Деформационная теория пластичности сыпучей среды. Одной из наиболее удачных математических моделей, описывающих механическое поведение грунтов и грунтовых массивов, без учёта длительного действия нагрузки, является деформационная теория пластичности сыпучей среды, предложенная профессором Г.А. Гениевым в 1974 году [1]. Данная модель иллюстрирует формоизменение и состоит из параллельно соединённых неупругого элемента и элемента сухого трения. Она позволяет описать некоторые закономерности деформирования грунтовых сред, в частности, влияние среднего напряжения на вид зависимостей между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, некоторые особенности процесса разгрузки, реализует возможность непосредственного перехода от зависимостей напряжения-деформации к условию предельного равновесия, предусматривает физическую нелинейность диаграмм работы материала, а также эффект дилатансии в области напряжённых состояний, близких к предельным. Переменный модуль объёмного расширения (сжатия) и переменный модуль сдвига при этом имеют вид:

$$K(\varepsilon, \Gamma) = K_0 - K_0 \frac{q}{\varepsilon} \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2; \quad (3)$$

$$G(\varepsilon, \Gamma) = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right) + K_0 f \frac{q}{\Gamma_s} \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \frac{\Gamma}{\Gamma_s} - f K_0 \frac{\varepsilon}{\Gamma}.$$

Здесь K_0 - начальный коэффициент объёмного расширения (сжатия); G_0 - начальный модуль сдвига при чистом сдвиге; Γ_s - предельная интенсивность деформаций сдвига; f - аналог коэффициента внутреннего трения; q - коэффициент дилатансии.

Модель, представленная соотношениями (3) базируется на гипотезе о малости деформаций, в основе которой лежит принцип неизменности начальных размеров (принцип «затвердевания»), а потому описывает механическое поведение грунтовых массивов, являющихся физически-нелинейными по своей природе, без учёта геометрической нелинейности. Вместе с тем при статическом деформировании грунтовых массивов деформации, вообще говоря, уже нельзя считать малыми и построение разрешающих уравнений следует выполнять уже «после» деформации следуя терминологии В.В.Новожилова [2].

Для построения деформационных соотношений сплошных сред с учётом геометрической нелинейности было предложено несколько подходов [3], в частности, подход, основанный на допущении о независимости формы записи замыкающих уравнений (1) и (2) от вида рассматриваемой "геометрии" сплошной среды (гипотеза об эквивалентности формы записи замыкающих уравнений). В соответствии с данной гипотезой, основные физические соотношения геометрически и физически нелинейного аналога сплошной среды, будут иметь вид:

$$\sigma^* = 3K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \varepsilon^*; \quad T^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \Gamma^*. \quad (4)$$

Здесь $K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ – геометрически нелинейный аналог переменного модуля объёмного расширения (сжатия); $G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ – геометрически нелинейный аналог переменного модуля сдвига. Конкретный вид этих величин определяет геометрически нелинейную математическую модель сплошной среды, в частности геометрически нелинейным аналогом деформационной теории пластичности сыпучей среды будет математическая модель, описываемая соотношениями:

$$K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = K_0 - K_0 \frac{q}{\varepsilon^*} \left(2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right)^2 \left(\frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right)^2; \quad (5)$$

$$G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma^*}{2\Gamma_s} \right) + K_0 f \frac{q}{\Gamma_s} \left(2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right)^2 \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} - fK_0 \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*}.$$

Здесь $\sigma^* = \sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* + \sigma_{zz}^*$ – первый инвариант тензора обобщённых напряжений; $\varepsilon^* = \varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^* + \varepsilon_{zz}^*$ – первый инвариант тензора нелинейных деформаций;

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{xx}^* - \sigma_{yy}^*)^2 + (\sigma_{yy}^* - \sigma_{zz}^*)^2 + (\sigma_{zz}^* - \sigma_{xx}^*)^2 + 6(\sigma_{xy}^{*2} + \sigma_{yz}^{*2} + \sigma_{zx}^{*2})} -$$

интенсивность обобщённых касательных напряжений (величина, пропорциональная второму инварианту девиатора обобщённых напряжений);

$$\Gamma^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*)^2 + (\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{zz}^*)^2 + (\varepsilon_{zz}^* - \varepsilon_{xx}^*)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^{*2} + \varepsilon_{yz}^{*2} + \varepsilon_{zx}^{*2})} -$$

интенсивность нелинейных деформаций сдвига (величина, пропорциональная второму инварианту девиатора нелинейных деформаций).

Связь между переменными модулями объёмного расширения (сжатия) $K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$, сдвига $G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ и переменными модулями упругости $E^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ и коэффициентом поперечной деформации $\mu^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ устанавливаются соотношениями:

$$E^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = \frac{9K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)}{3K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) + G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)}; \quad \mu^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = \frac{3K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) - 2G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)}{2[3K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) + G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)]}; \quad (6)$$

$$K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = \frac{E^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)}{3[1 - 2\mu^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)]}; \quad G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = \frac{E^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)}{2[1 + \mu^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)]}. \quad (7)$$

Осесимметричное деформирование. Рассмотрим построение кривых $\mu(\varepsilon, \Gamma)$ и $\mu^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ для массивного тела, находящегося в условиях осесимметричного деформирования и описываемого деформационной теорией пластичности сыпучей среды в геометрически линейной и геометрически нелинейной постановке.

Для определения функций $\mu(\varepsilon, \Gamma)$ и $\mu^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ рассмотрим осесимметричное деформирование бесконечного сплошного массива за пределами цилиндрической полости начального радиуса r_0 . Пусть внутренняя поверхность цилиндрической полости получает радиальное перемещение u_r^0 . Определение напряжённо-деформированного состояния бесконечного сплошного массива с цилиндрической полостью, находящегося в состоянии осесимметричного деформирования, математически сводится к решению двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, если краевые условия зададим следующим образом:

$$u(r_0) = u_r^0; \quad u(r_n) = 0. \quad (8)$$

Первое из соотношений (8) означает, что задано радиальное перемещение точек цилиндрической поверхности; второе соотношение говорит о том, что на расстоянии r_n от оси цилиндра радиальные перемещения равны нулю.

В случае геометрически линейной модели сплошной среды разрешающее уравнение в перемещениях имеет следующий вид [4]:

$$A \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + B + F_r = 0, \quad (9)$$

где
$$A = \left(K + \frac{4}{3}G + X + m_1 Y \right);$$

$$B = \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) \left(K - \frac{2}{3}G + X + m_2 Y \right) + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \right\};$$

причём
$$X = (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + 2 \left(\varepsilon_{rr} - \frac{\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}}{3} \right) \frac{\partial G}{\partial \varepsilon};$$

$$Y = (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \frac{\partial K}{\partial \Gamma} + 2 \left(\varepsilon_{rr} - \frac{\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}}{3} \right) \frac{\partial G}{\partial \Gamma};$$

$$m_1 = \frac{2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\sqrt{3(\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2)}}; \quad m_2 = \frac{2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}}{\sqrt{3(\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2)}};$$

$$\sigma_{rr} = K(\varepsilon, \Gamma) \cdot (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2G(\varepsilon, \Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}}{3} \right);$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = K(\varepsilon, \Gamma) \cdot (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2G(\varepsilon, \Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}}{3} \right).$$

При этом компоненты деформации связаны с радиальными перемещениями соотношениями: $\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$; $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r / r$.

Для случая геометрически нелинейной модели сплошной среды разрезающее уравнение в перемещениях записывается в следующей форме [4]:

$$A^* \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + B^* + D^* F_r = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$A^* = \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 \left(K^* + \frac{4}{3}G^* + X^* + m_1^* Y^*\right) + \sigma_{rr}^*;$$

$$B^* = \frac{1}{r} \left\{ \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r}\right) \left(K^* - \frac{2}{3}G^* + X^* + m_2^* Y^*\right) + \left[\left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \sigma_{rr}^* - \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \sigma_{\varphi\varphi}^*\right] \right\};$$

$$D^* = \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \left(1 + \frac{u_r}{r}\right)^2;$$

причём

$$X^* = (\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} + 2 \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{3} \right) \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*};$$

$$Y^* = (\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} + 2 \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{3} \right) \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*};$$

$$m_1 = \frac{2\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{\sqrt{3(\varepsilon_{rr}^{*2} - \varepsilon_{rr}^* \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{*2})}}; \quad m_2 = \frac{2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{rr}^*}{\sqrt{3(\varepsilon_{rr}^{*2} - \varepsilon_{rr}^* \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{*2})}};$$

$$\sigma_{rr}^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot (\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) + 2G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{3} \right);$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot (\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) + 2G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{3} \right).$$

При этом связь между компонентами нелинейных деформаций и перемещениями устанавливается соотношениями:

$$\varepsilon_{rr}^* = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} \right)^2.$$

Решение краевых задач (9), (8) и (10), (8) выполнено методом конечных разностей на кусочно-неравномерной сетке с погрешностью в остаточном члене порядка $O(h^2)$ для всех узлов сетки, включая граничные [5]. Кусочно- неравномерная сетка задавалась следующим образом: область решения - интервал $[r_0 - r_n]$ делится на N равных участков, а затем каждый участок $[r_i - r_{i+1}]$ делится ещё на $(N - i)$ участков, где $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Такое деление обусловлено тем, что с левого края области решения $[r_0 - r_n]$ характеристики напряжённо-деформированного состояния (напряжения, деформации и их инварианты) имеют значительный градиент, приводящий к необходимости задавать очень мелкую сетку.

Система конечно-разностных уравнений и для задачи (9), (8) (без учёта геометрической нелинейности), и для задачи (10), (8) (с учётом геометрической нелинейности) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} i = 2; & & -(1 + \alpha_2)u_2 + u_3 = F_2 - \alpha_2 u_0; \\ i = 3, \dots, n-2; & & \alpha_i u_{i-1} - (1 + \alpha_i)u_i + u_{i+1} = F_i; \\ i = n-1; & & \alpha_{n-1} u_{n-2} - (1 + \alpha_{n-1})u_{n-1} = F_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

причём для задачи (9), (8) $F_i = \frac{B_i + F_r}{A_i}$, а для задачи (10), (8) $F_i = \frac{B_i + D_i F_r}{A_i}$

($i = 2, \dots, n-1$). Коэффициент α_i равен отношению расстояния между соседними узлами кусочно-неравномерной сетки: $\alpha_i = \frac{h_i}{h_{i-1}}$. По построению $1 \leq \alpha_i \leq 2$.

Построение решения выполнялось методом итераций, причём на каждой итерации система конечно-разностных уравнений решалась методом прогонки. Доказательство устойчивости метода прогонки для системы (11) приведено в работе [6].

В качестве начального приближения решения принималось решение данной краевой задачи для физически и геометрически линейной модели сплошной среды (в силу его интегрируемости). Окончание процесса итераций контролировалось по перемещениям: $|u_{ri}^k - u_{ri}^{k-1}| \leq \Delta$, где k – номер итерации; Δ – погрешность вычислений.

Описанный алгоритм решения двухточечной краевой задачи реализован в пакете программ "OSA", разработанном в среде программирования математического пакета "MATLAB". При выполнении расчётов параметры геометрии полупространства, с приведённой начальной плотностью $\frac{F_x}{G_0 \Gamma_s} = 0,005$, принимались следующими:

начальный радиус цилиндрической полости $r_0 = 1 м$, толщина сжимаемой толщи полупространства $r_n = 12 м$, количество узлов кусочно-неравномерной сетки $N = 24$, количество расчётных точек $n = 277$. Механические константы сплошной среды имели следующие значения: $K_0 / G_0 = 5,0$; предельная интенсивность деформаций сдвига $\Gamma_s = 0,231$; приведённый коэффициент дилатансии $q / \Gamma_s = 1$; коэффициент трения $f = 0,1; 0,5; 0,9$. Вычисления выполнялись с точностью $\Delta \leq 0,0001$. Начальное смещение границы цилиндрической полости принималось равным $u_r^0 / \Gamma_s = 0,585$. Это значение обеспечивало допредельную ($\Gamma < \Gamma_s$) стадию работы материала на границе цилиндрической полости для принятых констант сплошной среды и параметров геометрии полупространства.

На рис. 1 представлено решение сформулированной краевой задачи, то есть, показаны графики относительных радиальных перемещений u_r / Γ_s , относительных радиальных и тангенциальных деформаций $\frac{\varepsilon_r}{\Gamma_s}; \frac{\varepsilon_\varphi}{\Gamma_s}$ и напряжений $\frac{\sigma_r}{G_0 \Gamma_s}; \frac{\sigma_\varphi}{G_0 \Gamma_s}$, относительных инвариантных величин $\frac{\varepsilon}{\Gamma_s}; \frac{\sigma}{G_0 \Gamma_s}; \frac{T}{G_0 \Gamma_s}; \frac{I}{\Gamma_s}$. Все кривые построены для коэффициента внутреннего трения $f = 0,5$.

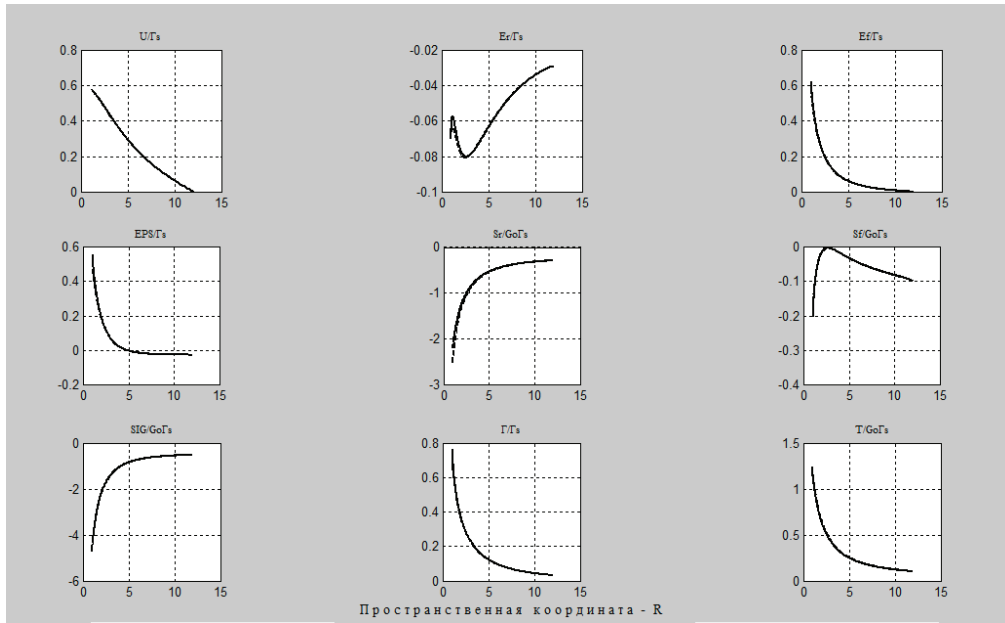


Рис. 1. Решение краевой задачи

Характер изменения коэффициента поперечной деформации по толщине цилиндрического полупространства для различных значений коэффициента внутреннего трения f показан на рис. 2.

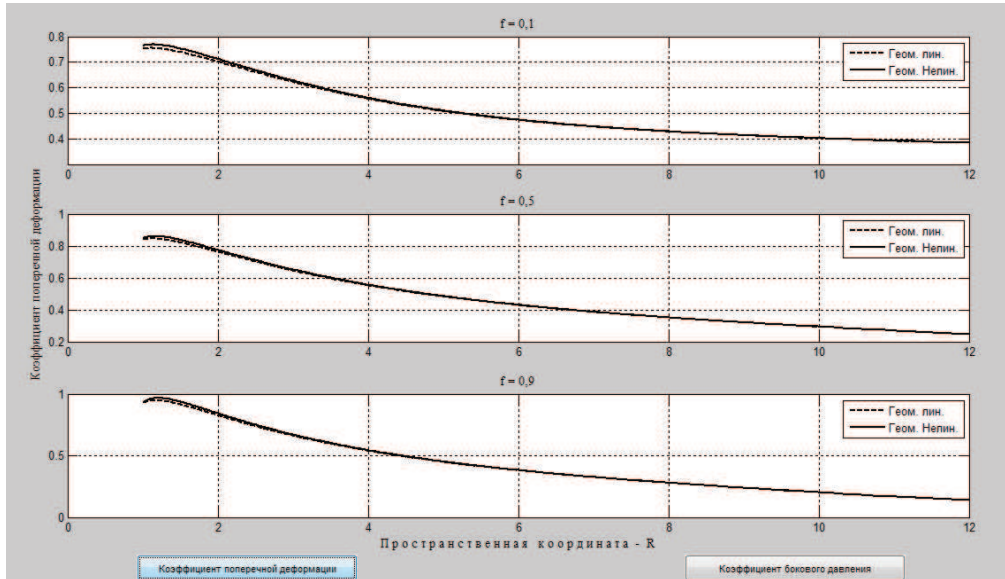


Рис. 2. Коэффициент поперечной деформации

На рис. 3 показан характер изменения коэффициента бокового давления $\sigma_\varphi = \sigma_r$ по толщине цилиндрического полупространства для различных значений коэффициента внутреннего трения f .

На рисунках пунктирные линии соответствуют случаю геометрически линейной модели, сплошные линии - геометрически нелинейной модели сплошной среды.

Выводы. 1. Численные исследования показывают, что величина коэффициента поперечной деформации существенно зависит как от механических ха-

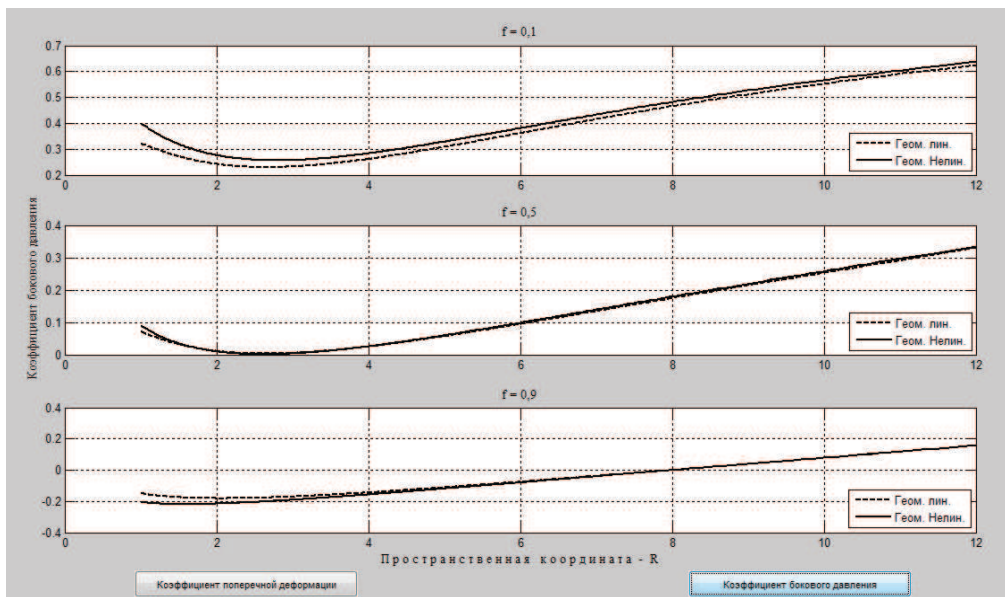


Рис. 3. Коэффициент бокового давления

рактических характеристик материала полупространства, уровня развития напряжённо-деформированного состояния в рассматриваемой точке, так и от вида рассматриваемой математической модели сплошной среды (геометрически линейной или геометрически нелинейной). Максимального значения коэффициент поперечной деформации достигает в точках сплошной среды, примыкающих к краю цилиндрической полости, то есть там, где уровень напряжённо-деформированного состояния является максимальным. Для значительных уровней напряжённо-деформированного состояния коэффициент поперечной деформации существенно превышает предельное значение для линейно-упругого материала, равное 0,5. Для малых уровней напряжённо-деформированного состояния коэффициент поперечной деформации не превышает значения 0,5. Для геометрически нелинейной модели коэффициент поперечной деформации выше, чем для геометрически линейной модели сплошной среды, причём, чем меньше коэффициент внутреннего трения, тем эта разница больше.

2. Что касается коэффициента бокового давления, то он монотонно изменяется по глубине сжимаемой толщи по кривой выпуклостью вниз. Его наибольшие значения фиксируются в конце сжимаемой толщи. Наименьшие значения коэффициент бокового давления принимает ближе к краю цилиндрической полости. Для геометрически нелинейной модели коэффициент бокового давления выше, чем для геометрически линейной модели сплошной среды, причём эта разница тем больше, чем меньше коэффициент внутреннего трения.

Заключение. Представленные в статье результаты могут быть использованы при анализе несущей способности и деформативности сплошных сред типа грунтовых оснований под здания и сооружения, механическое поведение которых описывается геометрически и физически нелинейными моделями.

© Бакушев С.В. 2017

Список литературы

1. *Гениев Г.А.* К вопросу о деформационной теории пластичности сыпучей среды // *Строительная механика и расчёт сооружений.* – 1974. – № 4. – С. 8—10.
2. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.

3. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2013. – 312 с.

4. Бакушев С.В. Некоторые вопросы центрально - и осесимметричного деформирования геометрически-нелинейной сплошной среды // Известия ВУЗов. Строительство. – 1996. – № 8. – С. 25—31.

5. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М.: Стройиздат. – 1977. –154 с.

6. Бакушев С.В. К вопросу о возможности формирования цилиндрических ударных волн в сплошных средах (часть 1) //Строительная механика и расчёт сооружений. – 2016. – № 6. – С. 30—35.

Поступила в редакцию 2 мая 2017 г. Прошла рецензирование 27 мая 2017 г.

Принята к публикации 18 июня 2017 г.

Об авторе: БАКУШЕВ СЕРГЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Механика», ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства». Научные интересы: геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды. 440028, Пенза, ул. Титова, 28, ПГУАС

Для цитирования:

Бакушев С.В. Оценка коэффициента поперечной деформации при осесимметричном деформировании сплошных сред // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 5. – С. 12—20, DOI: 10.22363/1815-5235-2017-5-12-20.

References

1. Geniev, G.A. (1974). About the question of the deformation theory of plasticity of granular medium. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*. No 4, 8—10 (in Russian).
2. Novozhilov, V.V. (1958). *Theory of Elasticity*. Sudpromgiz, 370 p. (in Russian)
3. Bakushev, S.V. (2013). *Geometrical and Physic Non-Linear Mechanics of Continuous Mediums: Plane Problem*. Moscow: Knizhniy dom "LIBROCOM", 312 p. (in Russian).
4. Bakushev, S.V. (1996). Some problems about Central and axisymmetric deformation of geometrically nonlinear medium. *Izvestiya VUZov. Stroitel'stvo*. No 8, 35—31 (in Russian)
5. Varvak, P.M., Varvak, L.P. (1977). *The Grid Method in the Analysis of the Problems of Building Structures*. Moscow, Stroyizdat Publ., 154 p. (in Russian).
6. Bakushev, S.V. (2016). To the problem of the possibility of forming cylindrical shock waves in continuous medium (Part 1). *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*, No 6, 30—35 (in Russian).

EVALUATION OF THE COEFFICIENT OF TRANSVERSE DEFORMATION AT THE AXIAL-SYMMETRIC DEFORMATION OF CONTINUOUS MEDIUM

BAKUSHEV S.V.

The Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russia

The article is devoted to the question of theoretical estimation of the value of the coefficient of transverse deformation in continuous medium under the conditions of axial-symmetric deformation. It is shown that the value of the coefficient of transverse strain essentially depends both on the mechanical characteristics of the material of the half-space, the level of development of the stress-strain state at considering point, and on the type of the mathematical model of the continuous medium (geometrically linear or geometrically nonlinear) and may exceed the limit value for linear- elastic body, equal to 0,5.

Keywords: Solid array, Axial-symmetric deformation, Coefficient of transverse deformation, Geometrical and physical nonlinearity.

Article history: Received: May 2, 2017. Revised: May 27, 2017. Accepted: June 18, 2017.

About the author:

BAKUSHEV SERGEY VASILEVICH is the DSc (in Technical Sciences), Professor, professor of Department of Mechanics, the Penza State University of Architecture and Construction. Scientific interests: geometrical and physic non-linear mechanics of continuous mediums. Post address of the university: PGYAS, 28, Titov Str., Penza, Russian Federation.

For citation:

Bakushev S.V. (2017) Evaluation of the coefficient of transverse deformation at the axial-symmetric deformation of continuous medium. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No 5, 12—20, DOI: 10.22363/1815-5235-2017-5-12-20.