Прочность летательных аппаратов

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ «ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ» В РАМКАХ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Вал. В. ФИРСАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» «МАИ»
125993 Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4 k906@mai.ru

Представлены два варианта уточненной теории расчета напряженно- деформированного состояния в краевой зоне цилиндрических оболочек. В качестве примера рассматривается оболочка, жестко защемленная по двум краям и подверженная действию локальных распределенных и сосредоточенных нагрузок. Проведено сравнение результатов расчета, полученных в данной работе и по классической теории.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: замкнутая цилиндрическая оболочка; два варианта уточненной теории расчета; аппроксимирующие полиномы; вариационный принцип Лагранжа; краевые условия; преобразования Лапласа; напряженно-деформированное состояние «погранслой»; локальная нагрузка; характеристическое уравнение; поперечные нормальные напряжения.

Введение

Построение уточненных теорий и методов определения НДС пластинок и оболочек позволит решить проблему расчета на прочность таких авиационных конструкций, как силовые корпуса летательных аппаратов, различные переходные зоны и соединения, а также элементов конструкций в различных отраслях машиностроения и в строительном деле.

Учет трёхмерности НДС в элементах конструкций в сочетании с методами механики разрушения дает возможность оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах, более обоснованно выбрать тип конструкционного материала и рациональным образом распределить его вблизи концентраторов напряжений. Результаты расчета общего, местного НДС пластинок и оболочек могут быть использованы при обосновании режимов лабораторных испытаний на действие статических нагрузок, вибраций и ударов.

Один из возможных путей построения математически обоснованной теории пластинок и оболочек состоит в применении метода прямого асимптотического разложения компонентов НДС в ряды по малому параметру - относительной толщине трехмерного тела и последующем интегрировании уравнений трехмерной теории упругости.

Сформулированные краевые задачи, в силу сложности соответствующих им дифференциальных уравнений и различного типа граничных условий, напрямую решить затруднительно. В связи с этим, в работах [1,4], указанные краевые задачи с помощью вариационного метода Власова-Канторовича решены и доведены до численных результатов для прямоугольных пластинок и цилиндрических оболочек переменной толщины.

Другой подход к построению уточненной теории, называемый энергетически согласованным, заключается в разложении перемещений в полиномиальные ряды по нормальной координате и последующем применении вариационного принципа Лагранжа. Особенность этого подхода при построении уточненной теории оболочек состоит в том, что деформации оболочки находятся с помощью геометрических соотношений, тангенциальные напряжения определяются из соотношений закона Гука и поперечные напряжения получаются интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Следует отметить, что построенные в рамках энергетически согласованного подхода краевые задачи для цилиндрических оболочек[2] были обобщены на случай произвольных ортотропных оболочек [6], а также оболочек переменной толщины[5].

В данной работе на основе энергетически согласованного подхода представлены два варианта уточненной теории расчета, условно обозначаемые «К=2» и «К=3». Эти варианты отличаются степенью полиномов, аппроксимирующих искомые перемещения по толщине оболочки. Указанные полиномы имеют степень на одну или две выше по сравнению с аналогичными функциями классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Приводится сравнение результатов расчетов по двум вариантам уточненной теории между собой и по классической теории. Оценивается влияние напряженного состояния «пограничный слой» на прочность оболочки.

Напряженное состояние «пограничный слой»

Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины hиз изотропного материала, отнесенная к ортогональной системе координат ξ , θ , z(рис. 1).

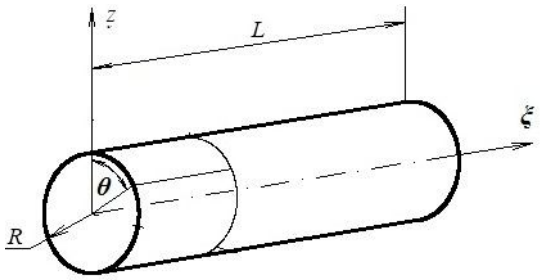


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Здесь ξ представляет собой относительное (измеренное в долях R) расстояние по образующей, θ - центральный угол, а ось z направлена по внешней нормали к срединной поверхности радиуса R.

Считаем, что на лицевых $z=\pm h$ поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{33}(\pm h) = q_{33,}^{\pm}$$

где $q_{33}^{\pm}$ обозначают осесимметричные нагрузки, действующие на верхней и нижней поверхностях оболочки в направлении координаты z.

Будем предполагать в дальнейшем, что искомые упругие перемещения U_1, U_2, допускают асимптотические представления вида:

$$U_1(\xi,z)=u_0(\xi)+u_1(\xi)z+u_2(\xi)\frac{z^2}{2!}+u_3(\xi)\frac{z^3}{3!},$$
$$U_2(\xi,z)=w_0(\xi)+w_1(\xi)z+w_2(\xi)\frac{z^2}{2!}, \quad (1)$$

где индексы 1,2 соответствуют осям ξ и z соответственно.

Аппроксимирующие полиномы (1) соответствуют варианту теории *K=3*. Для варианта теории *K=2* в формулах (1) отбрасываются последние слагаемые, для классической теории типа Кирхгофа - Лява – по два последних слагаемых.

Используя вариационный принцип Лагранжа, с учетом разложения (1), получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях [6], которая для рассматриваемого случая принимает вид:

$$\left(Kl_0^{u_0}+Kl_{11}^{u_0}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)u_0+\left(Kl_0^{u_1}+Kl_{11}^{u_1}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)u_1+\left(Kl_0^{u_2}+Kl_{11}^{u_2}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)u_2+$$
$$+\left(Kl_0^{u_3}+Kl_{11}^{u_3}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)u_3+Kl_1^{w_0}\frac{d}{d\xi}w_0+Kl_1^{w_1}\frac{d}{d\xi}w_1+Kl_1^{w_2}\frac{d}{d\xi}w_2=0,\quad l=1,2,3,4,$$
$$(2)$$
$$Kj_1^{u_0}\frac{d}{d\xi}u_0+\left(Kj_0^{w_0}+Kj_{11}^{w_0}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)w_0+Kj_1^{u_1}\frac{d}{d\xi}u_1+\left(Kj_0^{w_1}+Kj_{11}^{w_1}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)w_1+$$
$$+Kj_1^{u_2}\frac{d}{d\xi}u_2+\left(Kj_0^{w_2}+Kj_{11}^{w_2}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)w_2+Kj_1^{u_3}\frac{d}{d\xi}u_3=Kj_0^{q_{33}^+}q_{33}^+-Kj_0^{q_{33}^-}q_{33}^-,\quad j=\pm5,6,7.$$

с граничными условиями на жестко защемленных краях оболочки следующего вида

$$u_i=0,\left(i=\overline{1,4}\right);\quad w_k=0,\left(k=\overline{1,3}\right)\ \text{при}\ \xi=0,\quad \xi=L/R\,.$$

В уравнениях (2) коэффициенты Kl, Kj с буквенными и числовыми индексами представляют собой постоянные величины, зависящие от геометрических параметров и упругих постоянных материала оболочки; u_i,w_k– коэффициенты разложений искомых перемещений в выражениях (1). Формулы для указанных коэффициентов в более общем случае нагружения приведены в [6].

В матричном виде однородные уравнения, соответствующие (2), записываются как

$$\mathbf{D}\left[u_0,u_1,u_2,u_3,w_0,w_1,w_2\right]^T=\mathbf{0}\,. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{D}$ - квадратная матрица размером 7×7 коэффициентов уравнений (3), $\mathbf{0}$ - нулевой вектор.

Пусть $F_1(\xi)$ есть решение уравнения (3), т.е.

$$\det(\mathbf{D})F_1(\xi)=0\,,$$

где $\det(\mathbf{D})$ - определитель матрицы $\mathbf{D}$.

Тогда u_i, w_k, определяемые формулами

$$u_0=\sum_{m=1}^{7}\det(\mathbf{D})_{1m}F_1,\ u_1=\sum_{m=1}^{7}\det(\mathbf{D})_{2m}F_1,\ u_2=\sum_{m=1}^{7}\det(\mathbf{D})_{3m}F_1,\ u_3=\sum_{m=1}^{7}\det(\mathbf{D})_{4m}F_1,$$
$$w_0=\sum_{m=1}^{7}\det(\mathbf{D})_{5m}F_1,\ w_1=\sum_{m=1}^{7}\det(\mathbf{D})_{6m}F_1,\ w_2=\sum_{m=1}^{7}\det(\mathbf{D})_{7m}F_1,$$

дают решение однородного уравнения (3). Здесь $\det(\mathbf{D})_{sm}$ - минор определителя $\det(\mathbf{D})$, соответствующий элементу (s,m) матрицы $\mathbf{D}$ $\left(s=\overline{1,7}\right)$.

Дифференциальному уравнению (3) соответствует характеристическое уравнение, которое можно представить как

$$p^2\sum_{n=0}^{6}H_n^0p^{2n}=p^2\Delta_1=0,\ n=1..6\,, \tag{4}$$

где H_n^0,- постоянные коэффициенты, зависящие от величины $\varepsilon_0=h/R$ и коэффициента Пуассона μ.

Кроме нулевых корней, уравнение (4) имеет следующие корни:

$$\pm p_1 \pm iq_1,\ \pm p_2 \pm iq_2,\ \pm p_3,\ \pm p_4.$$

Тогда Δ_1 можно представить в виде

$$\Delta_1 = H_6^0\left[\left(p - p_1\right)^2 + q_1\right]\left[\left(p + p_1\right)^2 + q_1\right]\left[\left(p - p_2\right)^2 + q_2\right]\times$$
$$\times\left[\left(p + p_2\right)^2 + q_2\right]\left(p^2 - p_3^2\right)\left(p^2 - p_4^2\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) получается в виде

$$u_0 = C_{13} + C_{14}\xi + \sum_{m=1}^{7}\det\left(\mathbf{D}\right)_{1m}\overline{F_1},\ u_1 = \sum_{m=1}^{7}\det\left(\mathbf{D}\right)_{2m}\overline{F_1},\ u_2 = \sum_{m=1}^{7}\det\left(\mathbf{D}\right)_{3m}\overline{F_1},$$

$$u_3 = \sum_{m=1}^{7}\det\left(\mathbf{D}\right)_{4m}\overline{F_1},\ \ w_0 = -C_{14}\mu + \sum_{m=1}^{7}\det\left(\mathbf{D}\right)_{5m}\overline{F_1},$$

$$w_1 = -C_{14}\frac{\mu}{R} + \sum_{m=1}^{7}\det\left(\mathbf{D}\right)_{6m}\overline{F_1},\ w_2 = \sum_{m=1}^{7}\det\left(\mathbf{D}\right)_{7m}\overline{F_1},$$

где

$$\overline{F_1}\left(\xi\right) = \left(C_1\sin q_1\xi + C_2\cos q_1\xi\right)e^{-P_1\xi} + \left(C_3\sin q_1\xi + C_4\cos q_1\xi\right)e^{P_1\xi} +$$
$$+\left(C_5\sin q_2\xi + C_6\cos q_2\xi\right)e^{-P_2\xi} + \left(C_7\sin q_2\xi + C_8\cos q_2\xi\right)e^{P_2\xi} +$$
$$+C_9e^{-P_3\xi} + C_{10}e^{P_3\xi} + C_{11}e^{-P_4\xi} + C_{12}e^{P_4\xi}.$$

Анализ результатов показывает, что при расчете оболочек корни характеристического уравнения разделяются на две группы: асимптотически малые $\pm p_1 \pm iq_1$ и большие $\pm p_2 \pm iq_2$, $\pm p_3$, $\pm p_4$ корни. Асимптотически малым корням соответствуют основные НДС, которые приближенно определяются по классической теории оболочек. Асимптотически большим корням $\pm p_2 \pm iq_2$, $\pm p_3$, $\pm p_4$ соответствуют напряженные состояния оболочки, которые назовем дополнительными краевыми эффектами типа «погранслой».

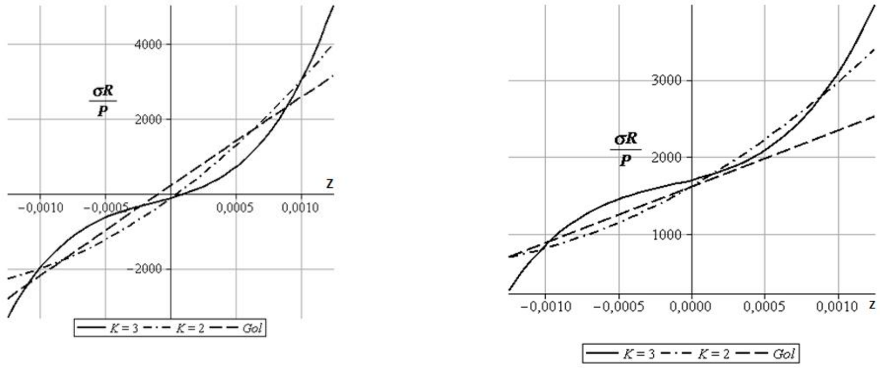
Для нахождения частного решения уравнений (2) используется преобразование Лапласа. Частные решения для более общего случая нагружения цилиндрической оболочки приводятся в [3].

Результаты расчетов и их сравнение с классической теорией

На рис. 2- 5 показаны результаты расчета НДС оболочки, имеющей следующие параметры: относительная длина $\xi_0 = L/R = 4$, радиус $R = 0.1 м$, относительная полутолщина $\varepsilon_0 = h/R = 1/80$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Оболочка жестко защемлена на двух концах. Распределенная по контуру постоянная сосредоточенная сила *P* приложена в середине оболочки. На данных рисунках аббревиатура “*Gol”* соответствует результатам расчета по классической теории.

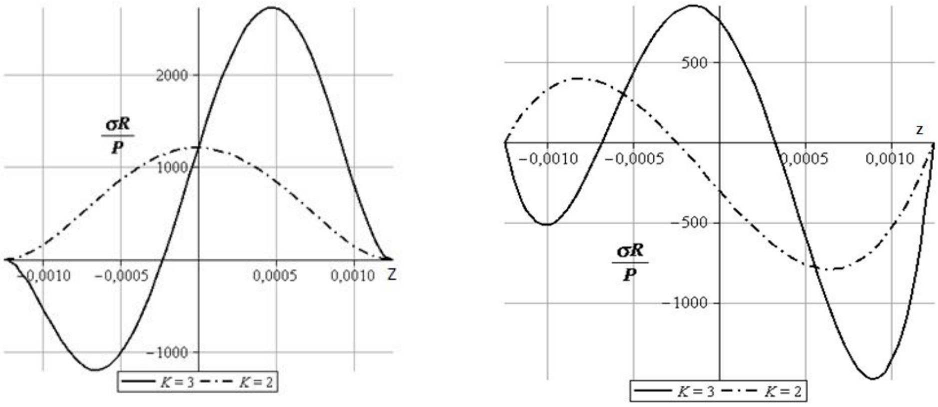
Анализируя графики на рис. 2-3, можно установить: максимальные нормальные напряжения σ_{11}, соответствующие уточненной теории «*K=3*», превышают значения этих же напряжений, определяемых по классической теории, на 65%; различие в величинах этих напряжений, полученных по уточненным теориям «*K=2*» и «*K=3*», составляет 25%;

Максимальные нормальные напряжения σ_{22}, полученные по уточненной теории «*K=3*» превышают напряжения, соответствующие классической теории, на 60%, разница в величинах этих напряжений, определяемых по уточненным теориям «*K=3*» и «*K=2*»,составляет около 10%;



а) б)

Рис. 2. Изменение тангенциальных нормальных напряжений по толщине оболочки в точке приложения силы: а) σ_{11}; б) σ_{22}



а) б)

Рис. 3. Изменение поперечных напряжений по толщине оболочки в точке приложения силы: а) σ_{33} , б) σ_{13}

Максимальные поперечные нормальные напряжения σ_{33}, величины которых составляют 55% от σ_{11}, по уточненным теориям «*K=3*» и «*K=2*» отличаются друг от друга в два раза, а также характером распределения по толщине.

Выводы

На основании полученных результатов, можно сделать вывод, что, по сравнению с классической теорией, уточненная теория оболочек учитывает дополнительные краевые эффекты типа «погранслой», которые вносят существенный вклад в общее НДС оболочки вблизи зон искажения напряженного состояния, например, вблизи жестко защемленного края, зоны действия локальной нагрузки, в окрестности скачкообразного изменения жесткостных характеристик и др.

Литература

1. *Фирсанов В.В.* Погранслой и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины// Вестник МАИ. 2010.Т.17. №5.С.212-218.

2. *V.V. Firsanov and Ch.N. Doan*. Energy-Consistent theory of cylindrical shells. //Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2011,Vol.40, No.6, pp.543-548.

3. *Firsanov V.V., Doan T.N.* Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory// Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal/ Begell House, INC.,2015. Vol.6, Issue 2.Pp 135-166.

4.*Фирсанов Вал.В.* Напряженное состояние типа «пограничный слой» - краевое кручение прямоугольной пластинки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. №6. С.44-51.

5.*Фирсанов Вал.В., Доан Ч.Н., Хиеу Л.Ч.* Уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник МАИ. 2013. Т.20. № 4. С.198-211.

6.*Фирсанов Вал.В., Доан Ч.Н.* Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек произвольной геометрии// Вестник МАИ. 2011. Т.18. №1. С.194-207.

References

1. *Firsanov V.V.* (2010). Boundary layer and its influence on strength of cylindrical shell with a variable thickness, *Vestnik MAI,* Vol.17, №5, 212-218.

2. *V.V. Firsanov and T.N. Doan* (2011). Energy-Consistent theory of cylindrical shells, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability,*Vol. 40, No.6, pp.543-548.

3. *Firsanov V.V., Doan T.N.* (2015). Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a neoclassical theory, Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal/ Begell House, INC., Vol.6, Issue 2, p 135-166.

4. *Firsanov V.V.* (2016). Stress state called as "boundary layer" is boundary torsion of the rectangular plate, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings* , №6, pp. 44-51.

5. *Firsanov Val.V., Doan T.N., Hieu L.T.*(2013). The update theory calculation of the strain stress state of cylindrical shells with variable thickness, *Vestnik MAI,* Vol.20, №4, pp.198-211.

6.*Firsanov Val.V., Doan T.N.* (2011). Energy concerted the approach to research of elastic arbitrary shells, *Vestnik MAI,* Vol.18, №1, pp. 194-207.

ANALISIS OF THE "BOUNDARY LAYER" STRESS-STRAIN STATE IN FRAMES OF THE NONCLASSICAL CYLINDRICAL SHELL THEORY

Val.V. Firsanov

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

Two variants of a refined theory of determining the stress-strain state in the boundary zone of a cylindrical shells are represented. As an example the calculations of a shell with rigidly restrained on two edges and under the influence of local distributed and concentrated loadings is considered. The Comparison of calculation results of the stress-strain state shell obtained in this work and by the classical theory is given.

KEY WORDS: closed cylindrical shell, two variants of refined theory, approximation by polinomials, virtual principle of Lagrange, edge conditions, Laplace transform, local loading, the characteristic equation, "boundary layer", normal transverse stress.