

## Задачи термоупругости

### ТОРМОЖЕНИЕ РОСТА КРИВОЛИНЕЙНОЙ КОГЕЗИОННОЙ ТРЕЩИНЫ В ИЗГИБАЕМОЙ ПОЛОСЕ (БАЛКЕ) С ПОМОЩЬЮ НАВЕДЕННОГО ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

А.Б. МУСТАФАЕВ, к.ф.-м.н.

Институт математики и механики НАН Азербайджана,  
Азербайджан, AZ1141, Б. Вахабзаде, 9, e-mail: azer\_bm@list.ru

*Рассматриваются изменения температуры вблизи конца криволинейной трещины при наличии концевых зон с силами сцепления материала в изгибаемой полосе (балке). Цель локальных изменений температуры состоит в задержке или торможении роста трещины. Краевая задача о равновесии криволинейной трещины при действии внешних изгибающих нагрузок, наведенного термоупругого поля напряжений и усилий в связях, препятствующих ее раскрытию, сводится к системе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром типа Коши. Условие предельного равновесия трещины формулируется на основе двухпараметрического критерия разрушения.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** изгибаемая полоса (балка), температурное поле, криволинейная трещина, зона предразрушения, силы сцепления

**Введение.** Значительный интерес представляет оценка эффективности применения локальных изменений температуры вблизи конца трещины на замедление роста трещины в элементах конструкций [1-23]. Такие локальные изменения температуры полосы (балки) легко выполнимы технологически. Их задача состоит в задержке или торможении развития сквозной трещины. Поэтому решение задач механики разрушения для полос (балок) с трещиной, вблизи кончика, которой имеются изменения температуры, представляет теоретический и практический интерес.

**Постановка задачи.** Рассматривается однородная изотропная полоса, ослабленная одной сквозной криволинейной трещиной. Обозначим ширину и толщину полосы соответственно через  $2c$  и  $2h$ . Декартовы координаты  $Ox$  в срединной плоскости полосы (балки) являются плоскостью симметрии. Используется модель трещины [24, 25] со связями между берегами в концевых зонах.

Принято, что на полосу (балку) действуют изгибающие нагрузки (такие как изгибающие моменты, равномерно распределенное по длине полосы давление или сосредоточенные силы). При действии на полосу изгибающей силовой нагрузки в концевых зонах криволинейной трещины будут возникать области предразрушения. Области предразрушения моделируем как зоны ослабленных межчастичных связей материала, а взаимодействие их берегов связями между ними. Диаграмма деформирования связей считается заданной, в общем случае закон деформирования связей является нелинейным. Размеры зоны предразрушения зависят от вида материала полосы (балки).

Исследуется самый неблагоприятный случай, когда трещина направлена к боковым граням полосы. Берега криволинейной трещины свободны от внешней изгибающей нагрузки. В реальных конструкционных материалах поверхности берегов трещины имеют неравноности и искривления. Для торможения роста криволинейной трещины на пути ее распространения с обеих концов с помощью нагрева тепловым источником областей  $S_1$  и  $S_2$  до некоторой постоянной температуры  $T = T_0$  создается зона сжимаемых напряжений. Считается, что в начальный момент произвольные области  $S_1$  и  $S_2$  в окрестности концов трещины на пути роста трещины в полосе мгновенно нагреваются до температуры  $T_0 = const$ . Остальная часть полосы в начальный момент  $t = 0$  имеет нулевую температуру.

Под действием внешней изгибающей, а также тепловой нагрузок в связях, соединяющих берега зон предразрушения, появятся нормальные  $q_y(x)$  и касательные  $q_{xy}(x)$  напряжения. Значения этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению. Трещина, имеющаяся в полосе (балке), принята близкой к прямолинейной форме, с лишь малыми отклонениями от прямой  $y = 0$ . Уравнение контура криволинейной трещины с зонами предразрушения принимается в виде:  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Граничные условия рассматриваемой задачи механики разрушения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_n - i\tau_{nt} = 0 \quad \text{при } y=f(x), \quad a_1 \leq x \leq b_1 \quad \text{на свободных берегах трещины;} \quad (1) \\ \sigma_n - i\tau_{nt} = q_y - iq_{xy} \quad \text{при } y=f(x), \quad a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b \\ \text{на берегах концевых зон предразрушения.} \end{aligned}$$

Основные уравнения исследуемой задачи дополняем уравнением, связывающим раскрытие (перемещения) берегов криволинейной трещины в зонах предразрушения и напряжения в связях. Это уравнение представим в виде

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = \Pi_y(x, \sigma)q_y(x) - i\Pi_x(x, \sigma)q_{xy}(x). \quad (2)$$

Здесь функции  $\Pi_y(x, \sigma)$ ,  $\Pi_x(x, \sigma)$  представляют собой эффективные податливости связей, зависящие от натяжения;

$$\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2} \quad \text{— модуль вектора напряжений в связях.}$$

**Метод решения задачи.** Для решения поставленной задачи используем приближенный метод [26]. Напряженно-деформированное состояние в окрестности криволинейной трещины находим приближенно в том смысле, что будем удовлетворять граничным условиям задачи на берегах трещины (условия (1)) и также требовать, чтобы на значительном расстоянии от трещины с зонами предразрушения напряженное состояние в полосе совпадало с напряженным состоянием, определяемым комплексными функциями

$$\begin{aligned} \Phi^0(z) = A_0z^3 + A_1z^2 + A_2z + A_0, \quad (3) \\ \Omega^0(z) = B_0z^3 + B_1z^2 + B_2z + B_0. \end{aligned}$$

Эти функции в зависимости от значений коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) определяют напряженное состояние в полосе без трещины и нагретых зон.

Решение задачи для компонент тензора напряжений ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + \sigma_{x_1}, \quad \sigma_y = \sigma_{y_0} + \sigma_{y_1}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_0} + \tau_{xy_1}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_{x_0}$ ,  $\sigma_{y_0}$ ,  $\tau_{xy_0}$  — есть решение задачи термоупругости для полосы без трещины;  $\sigma_{x_1}$ ,  $\sigma_{y_1}$ ,  $\tau_{xy_1}$  — компоненты напряжений для полосы, ослабленной одной сквозной криволинейной трещиной, при этом внешняя нагрузка приложена по поверхности берегов трещины. Эта поверхностная нагрузка определяется в процессе решения задачи.

После решения задач теории теплопроводности и термоупругости для сплошной полосы находим напряжения  $\sigma_{x_0}$ ,  $\sigma_{y_0}$ ,  $\tau_{xy_0}$  (см. [21]).

Граничные условия (1) на берегах криволинейной трещины с зонами предразрушения с учетом соотношений (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} - i\tau_{nt_1} = -(\sigma_{y_0} + i\tau_{xy_0}) \quad \text{при } y = f(x), \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (5) \\ \sigma_{n_1} - i\tau_{nt_1} = q_y - iq_{xy} - (\sigma_{y_0} + i\tau_{xy_0}) \quad \text{при } y = f(x), \quad a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b, \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию искривленной (с малыми отклонениями от прямолинейной формы) поверхности берегов трещины. Так как функции при  $f(x)$  и  $f'(x)$  являются малыми величинами, функцию  $f(x)$

можно представить в виде  $y = \varepsilon H(x)$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр. Для решения граничной задачи (5), используем метод возмущений. Напряжения  $\sigma_{x_1}$ ,  $\sigma_{y_1}$ ,  $\tau_{xy_1}$ , перемещения  $u_1$ ,  $v_1$  и усилия в связях ищем в виде разложений по малому параметру:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \dots; & \sigma_{y_1} &= \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \dots; & \tau_{xy_1} &= \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u_1 &= u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + \dots; & v_1 &= v_i^{(0)} + \varepsilon v_i^{(1)} + \dots, \\ q_y &= q_y^{(0)} + \varepsilon q_y^{(1)} + \dots; & q_{xy} &= q_{xy}^{(0)} + \varepsilon q_{xy}^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Используя процедуру метода возмущений, находим граничные условия задачи по определению напряжений  $\sigma_{x_1}$ ,  $\sigma_{y_1}$ ,  $\tau_{xy_1}$ ,  $q_x$ ,  $q_{xy}$ , и перемещений  $u_1$ ,  $v_1$  при  $y = 0$   $a \leq x \leq b$

в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= -(\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, a_1 \leq x \leq b_1, & (6) \\ \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} - (\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b; \end{aligned}$$

в первом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} &= N - iT_t & \text{при } y = 0, a_1 \leq x \leq b_1, & (7) \\ \sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} &= q_y^{(1)} - q_{xy}^{(1)} + N - iT_t & \text{при } y = 0, a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Функции  $N$  и  $T_t$  определяются по формулам (10) в [21]. Напряжения  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  и перемещения  $u_1^{(0)}$ ,  $v_1^{(0)}$  выразим через две кусочно-аналитические функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  согласно представлениям Колосова-Мусхелишвили [26]:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= \Phi_0(z) + \Omega_0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)}, & (8) \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_1^{(0)} + iv_1^{(0)}) &= \kappa \Phi_0(z) - \Omega_0(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)}, \end{aligned}$$

где  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\mu$  – модуль сдвига материала.

Если в формулах (8) перейти граничным значениям на контуре трещины с концевыми зонами предразрушения в нулевом приближении, т.е. положить  $y \rightarrow \pm 0$ , и учесть граничные условия (6), то получим задачу линейного сопряжения граничных значений искомых функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$

$$\begin{aligned} [\Phi_0(t) + \Omega_0(t)]^+ + [\Phi_0(t) + \Omega_0(t)]^- &= 2f_0(t), & (9) \\ [\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^+ - [\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^- &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } f_0 = \begin{cases} -(\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, a_1 \leq x \leq b_1 \\ q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} - (\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, a \leq x < a_1 \text{ и } b_1 < x \leq b. \end{cases}$$

Решая задачу линейного сопряжения (9) и учитывая поведение аналитических функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  на бесконечности, находим

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t)}{t-z} dt + \\ &+ \frac{P_n(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{1}{2} [\Phi^0(z) + \Omega^0(z)], & (10) \end{aligned}$$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t)}{t-z} dt + \frac{P_n(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - \frac{1}{2} [\Phi^0(z) - \Omega^0(z)].$$

Здесь функции  $\Phi^0(z)$  и  $\Omega^0(z)$  находятся соотношениями (3), а многочлен  $P_n(z)$  имеет вид

$$P_n(z) = D_n z^n + D_{n-1} z^{n-1} + \dots + D_0. \quad (11)$$

При  $z \rightarrow \infty$   $\sqrt{(z-a)(z-b)} \rightarrow z + O(1/z)$ . Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей аналитической функции выделяемой условием на верхнем берегу трещины.

Степень полинома (11) и его коэффициенты  $D_0, D_1, \dots, D_n$  находятся из условия поведения аналитических функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  в окрестности точки  $|z| \rightarrow \infty$ . Таким образом, при нахождении коэффициентов  $D_0, D_1, \dots, D_n$  нужно функцию  $\Phi_0(z)$  (10) разложить в ряд по степеням  $z$  в окрестности точки  $|z| \rightarrow \infty$  и сравнить это разложение с выражением

$$\Phi_0(z) = \Phi^0(z) + O(1/z^2), \quad \Omega_0(z) = \Omega^0(z) + O(1/z^2).$$

Проведя необходимые вычисления для определения искоемых коэффициентов  $D_0, D_1, \dots, D_n$ , получим систему уравнений для их определения.

В полученные соотношения (10) входят неизвестные напряжения  $q_y^{(0)}(x)$  и  $q_{xy}^{(0)}(x)$  в концевых зонах предразрушения. Условием, служащим для определения неизвестных напряжений  $q_y^{(0)}(x)$  и  $q_{xy}^{(0)}(x)$  в связях между берегами трещины в зонах предразрушения, является дополнительное уравнение (2). С помощью полученного решения рассматриваемой задачи, найдем раскрытие между противоположными берегами трещины в концевых зонах предразрушения.

$$2\mu i \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_1^{+(0)} - u_1^{-(0)} + i(v_1^{+(0)} - v_1^{-(0)}) \right] = (1 + \kappa) \left[ \Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) - \frac{F_n(x)}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right], \quad (12)$$

где  $F_n(x) = d_3 x^3 + d_2 x^2 + d_1 x + d_0$ .

С помощью формул Сохоцкого-Племеля [26] из полученного решения (10), получим

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t)}{t-x} dt + 2P_n(x) \right\}. \quad (13)$$

Подставляя это выражение (13) в соотношение (12), для определения напряжений  $q_x(x)$  и  $q_{xy}(x)$  в связях в концевых зонах предразрушения трещины в нулевом приближении, получаем нелинейная комплексное сингулярное интегродифференциальное уравнение относительно неизвестных функций  $q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t)}{t-x} dt + 2 \left[ P_n(x) - \frac{1}{4} F_n(x) \right] \right\} = \quad (14)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Pi_y(x, \sigma^0) q_y^{(0)}(x) - i \Pi_x(x, \sigma^0) q_{xy}^{(0)}(x) \right]$$

$$(a \leq x < a_1 \text{ и } b_1 < x \leq b), \text{ где } \sigma^0 = \sqrt{(q_y^{(0)})^2 + (q_{xy}^{(0)})^2}.$$

Полученное уравнение (14) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа Коши. Это уравнение может быть решено численно.

При чистом изгибе полосы с трещиной с концевыми зонами предразрушения  $F_n(z) = 0$ . При изгибе полосы под действием равномерно распределенной нагрузки  $F_n(z) = 0$ . В случае изгибе консольной полосы с трещиной коэффициенты  $d_0, d_1, d_2, d_3$  определяются формулами:

$$d_0 = -\frac{iQ}{16I} (b+a) [(b-a)^2 - 8c^2],$$

$$d_1 = -\frac{iQ}{8I} [8c^2 + (b-a)^2], \quad d_2 = -\frac{iQ}{2I} (b+a), \quad d_3 = \frac{iQ}{I}.$$

где  $Q$  – поперечная сила, приложенная на ее свободном конце;  $I$  – момент инерции полосы.

Отделяя в комплексном сингулярном интегродифференциальном уравнении (14) реальные и мнимые части, получим систему двух действительных нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнения относительно неизвестных функций  $q_y^{(0)}(x)$  и  $q_{xy}^{(0)}(x)$ :

$$-\frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(x-b)}} \times \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} [q_y^{(0)}(t) + \sigma_{y_0}(t)] dt + f_y(x) \right\} = \quad (15)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Pi_y(x, \sigma^0) q_y^{(0)}(x) \right],$$

$$-\frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(x-b)}} \times \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} [q_{xy}^{(0)}(t) + \tau_{xy_0}(t)] dt + f_{xy}(x) \right\} = \quad (16)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Pi_x(x, \sigma^0) q_{xy}^{(0)}(x) \right].$$

Здесь  $f_y(x) = \text{Re} \left[ 2P_n(x) - \frac{1}{2} F_n(x) \right], \quad f_{xy}(x) = \text{Im} \left[ 2P_n(x) - \frac{1}{2} F_n(x) \right],$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_y^{(0)}(t)}{t-x} dt = \int_a^{a_1} \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_y^{(0)}(t)}{t-x} dt + \int_{b_1}^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_y^{(0)}(t)}{t-x} dt,$$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_{xy}^{(0)}(t)}{t-x} dt = \int_a^{a_1} \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_{xy}^{(0)}(t)}{t-x} dt + \int_{b_1}^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_{xy}^{(0)}(t)}{t-x} dt.$$

**Методика численного решения задачи и анализ.** Уравнения (15) и (16) представляют собой нелинейные интегродифференциальные уравнения с ядром типа Коши. Их можно решить численно, используя коллокационную схему [27-29] с аппроксимацией неизвестных функций.

Для алгебраизации сингулярных интегродифференциальных уравнений (15), (16) приведем сначала все отрезки интегрирования к одному  $[-1,1]$ . Это достигается с помощью замены переменных

$$t = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\tau, \quad x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\eta.$$

Левая часть интегродифференциального уравнения (15) при такой замене переменных примет вид:

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-\eta^2}} \left[ \int_{-1}^1 \frac{q_y^{(0)}(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\eta} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{\sigma_{y_0}(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\eta} d\tau + f_y(\eta) \right].$$

Соответственно, для левой части уравнения (16) находим:

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-\eta^2}} \left[ \int_{-1}^1 \frac{q_{xy}^{(0)}(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\eta} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{\tau_{xy_0}(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\eta} d\tau + f_{xy}(\eta) \right].$$

Заменяем производную, входящую в правую часть уравнения (15), для произвольного внутреннего узла конечно-разностной аппроксимацией. Аналогично поступаем с правой частью интегродифференциального уравнения (16). Используя квадратурную формулу Гаусса-Чебышева, все интегралы в уравнениях (15) и (16) заменяются конечными суммами, а производные в правых частях этих уравнений заменяются конечноразностными аппроксимациями.

Упомянутые выше формулы позволяют свести каждое интегродифференциальное уравнение к конечной системе алгебраических уравнений относительно приближенных значений неизвестной функции, соответственно, в узловых точках. В результате находим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+M)\sin\theta_m} \left[ \sum_{v=1}^M q_{y,v}^{(0)} \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m + \sum_{v=1}^M \sigma_{y_0,v} \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m + \right. & (17) \\ \left. + f_y(\cos\theta_m) \right] = \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} \left[ \Pi_y(x_{m+1}, \sigma^0(x_{m+1})) q_y^{(0)}(x_{m+1}) - \right. \\ \left. - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma^0(x_{m-1})) q_y^{(0)}(x_{m-1}) \right] \quad (m = 1, 2, \dots, M_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+M)\sin\theta_m} \left[ \sum_{v=1}^M q_{xy,v}^{(0)} \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m + \sum_{v=1}^M \tau_{xy_0,v} \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m + \right. & (18) \\ \left. + f_{xy}(\cos\theta_m) \right] = \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} \left[ \Pi_x(x_{m+1}, \sigma^0(x_{m+1})) q_{xy}^{(0)}(x_{m+1}) - \right. \\ \left. - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma^0(x_{m-1})) q_{xy}^{(0)}(x_{m-1}) \right] \quad (m = 1, 2, \dots, M_1). \end{aligned}$$

Здесь принято, что  $q_{y,v}^{(0)} = q_{y,v}^{(0)}(\tau_v)$ ,  $q_{xy,v}^{(0)} = q_{xy,v}^{(0)}(\tau_v)$ ,

$$\sigma_{y_0,v} = \sigma_{y_0}(\tau_v), \quad \tau_{xy_0,v} = \tau_{xy_0}(\tau_v), \quad x_{m+1} = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\eta_{m+1}.$$

В результате алгебраизации вместо каждого сингулярного интегродифференциального уравнения в нулевом приближении получаем систему из  $M_1$  алгебраических уравнений для нахождения напряжений в связях в узловых точках конечных зон трещины. Здесь  $M_1$  – число узловых точек, содержащихся в конечных зонах трещины. Когда закон деформирования межчастичных связей является нелинейным, для решения полученных систем использовали итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений А.А. Ильюшина [30].

В частном случае линейно упругих связей системы (17) и (18) являются линейными и для их численного решения использовали метод Гаусса с выбором

главного элемента. После решения алгебраических систем (17) и (18) вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений для окрестности каждой вершины трещины в нулевом приближении

для левого конца трещины:

$$K_I^{a,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \left\{ \int_a^b \sigma_y^0(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx + \int_a^b \sigma_{y_0}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx \right\},$$

$$K_I^{a,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^{(0)}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx,$$

$$K_{II}^{a,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \left[ \int_a^b (\tau_{xy}^0(x) + \tau_{xy_0}(x)) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx \right],$$

$$K_{II}^{a,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^{(0)}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx;$$

для правого конца трещины:

$$K_I^{b,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b (\sigma_y^0(x) + \sigma_{y_0}(x)) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_I^{b,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^{(0)}(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_{II}^{b,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b (\tau_{xy}^0(x) + \tau_{xy_0}(x)) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_{II}^{b,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^{(0)}(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx.$$

В этих формулах напряжения  $\sigma_y^0(x)$  и  $\tau_{xy}^0(x)$  определяются с помощью функций (3) на берегах трещины с концевыми зонами. После определения компонент тензора напряжений в нулевом приближении  $\sigma_x^{(0)}(x)$ ,  $\sigma_y^{(0)}(x)$  и  $\tau_{xy}^{(0)}(x)$  находим функции  $N$  и  $T_t$ . Последовательность решения граничной задачи (7) в первом приближении аналогична решению задачи в нулевом приближении. Решение граничной задачи (7) об отыскании кусочно-аналитических функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  запишется в виде

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{b q_y^{(1)} - i q_{xy}^{(1)} + N - iT_t}{t-z} \sqrt{(t-a)(t-b)} dt. \quad (19)$$

Для окончательного определения комплексных потенциалов  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  первого приближения необходимо найти неизвестные напряжения  $q_y^{(1)}(x)$  и  $q_{xy}^{(1)}(x)$  в связях между берегами трещины в концевых зонах.

Повторяя аналогично нулевому приближению вывод получения сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $q_y^{(1)}(x)$  и  $q_{xy}^{(1)}(x)$ , находим

$$-\frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} q_y^{(1)}(t) dt + \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} N(t) dt \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} \left( \Pi_y(x, \sigma^1) q_y^{(1)}(x) \right), \\
 - \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}} &\left[ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} q_{xy}^{(1)}(t) dt + \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} T_t(t) dt \right] = \\
 &= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} \left( \Pi_x(x, \sigma^1) q_{xy}^{(1)}(x) \right),
 \end{aligned}$$

где  $\sigma^1 = \sqrt{\left(q_y^{(1)}\right)^2 + \left(q_{xy}^{(1)}\right)^2}$ .

Аналогично нулевому приближению, при алгебраизации интегродифференциальных уравнений все интервалы интегрирования были приведены к одному отрезку  $[-1, 1]$ . Далее интегралы в правых частях уравнений были сведены к конечным суммам с помощью квадратурных формул типа Гаусса-Чебышева. В результате алгебраизации были получены следующие алгебраические системы

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{(1+M) \sin \theta_m} \sum_{v=1}^M \left[ q_{y,v}^{(1)} + N(\tau_v) \right] \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m = \tag{20} \\
 &= \frac{\mu M}{(1+k)(b-a)} \left[ \Pi_y(x_{m+1}, \sigma^1(x_{m+1})) q_y^1(x_{m+1}) - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma^1(x_{m-1})) q_y^1(x_{m-1}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{(1+M) \sin \theta_m} \sum_{v=1}^M \left[ q_{xy,v}^{(1)} + T_t(\tau_v) \right] \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m = \tag{21} \\
 &= \frac{\mu M}{(1+k)(b-a)} \left[ \Pi_x(x_{m+1}, \sigma^1(x_{m+1})) q_{xy}^1(x_{m+1}) - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma^1(x_{m-1})) q_{xy}^1(x_{m-1}) \right]
 \end{aligned}$$

где  $q_{y,v}^{(1)} = q_y^{(1)}(\tau_v)$ ;  $q_{xy,v}^{(1)} = q_{xy}^{(1)}(\tau_v)$ ;  $m = 1, 2, \dots, M_1$ .

После решения алгебраических систем (20) и (21) методом упругих решений А.А. Ильюшина вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений в первом приближении  $K_I^{a,load}$ ,  $K_I^{a,bond}$ ,  $K_{II}^{a,load}$ ,  $K_{II}^{a,bond}$  и  $K_I^{b,load}$ ,  $K_I^{b,bond}$ ,  $K_{II}^{b,load}$ ,  $K_{II}^{b,bond}$ . Окончательно для коэффициентов интенсивности напряжений имеем соотношения:

для левого конца трещины

$$\begin{aligned}
 K_I^{load} &= K_I^{a_0,load} + \varepsilon K_I^{a_1,load}, & K_I^{bond} &= K_I^{a_0,bond} + \varepsilon K_I^{a_1,bond}, \\
 K_{II}^{load} &= K_{II}^{a_0,load} + \varepsilon K_{II}^{a_1,load}, & K_{II}^{bond} &= K_{II}^{a_0,bond} + \varepsilon K_{II}^{a_1,bond}, \\
 K_I + iK_{II} &= \left( K_I^{load} + K_I^{bond} \right) - i \left( K_{II}^{load} + K_{II}^{bond} \right);
 \end{aligned}$$

для правого конца трещины

$$\begin{aligned}
 K_I^{bond} &= K_I^{b_0,load} + \varepsilon K_I^{b_1,load}, & K_I^{bond} &= K_I^{b_0,bond} + \varepsilon K_I^{b_1,bond}, \\
 K_{II}^{load} &= K_{II}^{b_0,load} + \varepsilon K_{II}^{b_1,load}, & K_{II}^{bond} &= K_{II}^{b_0,bond} + \varepsilon K_{II}^{b_1,bond}.
 \end{aligned}$$

Анализ предельного равновесия изгибаемой полосы с криволинейной трещиной с зонами предразрушения осуществляем с помощью двухпараметрического критерия разрушения.

Первый критерий – это условие продвижения вершины трещины, а второй условие разрыва связей на краю концевой зоны. В качестве первого условия разрушения используем силовой критерий разрушения Ирвина. Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнение условие

$$K = K_c, \tag{22}$$

где  $K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  – модуль коэффициентов интенсивности напряжений при



наличии связей в концевой зоне трещины;  $K_c$  – постоянная материала.

В качестве второго условия разрушения используем критерий критического раскрытия берегов трещины и полагаем, что разрыв связей на краю концевой зоны ( $x_* = a_1$  или  $x_* = b_1$ ) происходит при выполнении условия

$$V(x_*) = \sqrt{(u^+ - u^-)^2 + (v^+ - v^-)^2} = \delta_c, \quad (23)$$

где  $\delta_c$  – предельная длина связи.

Совместное решение полученных уравнений и двухпараметрического критерия разрушения (22) и (23) позволяет (при заданной длине трещины и характеристиках связей) установить предельную внешнюю изгибающую нагрузку и размеры концевых зон для критического состояния, при котором происходит рост трещины в полосе.

Для заданных размеров трещины к концевым зонам, используя предельные значения  $K_c$  и  $\delta_c$  можно выделить режимы равновесия и роста трещины при монотонном нагружении. Если выполняются условия

$$K \geq K_c, \quad V(x_*) < \delta_c,$$

то происходит продвижение вершины трещины с одновременным увеличением длины концевой зоны без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать, как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок. Рост вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны будет происходить при выполнении условий

$$K \geq K_c, \quad V(x_*) \geq \delta_c.$$

При выполнении условий  $K < K_c$ ,  $V(x_*) \geq \delta_c$  происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины и размер концевой зоны межчастичных связей сокращается, стремясь к критическому значению для данного уровня нагрузок. Так, например, при выполнении условий

$$K < K_c, \quad V(x_*) < \delta_c$$

положение вершины трещины и концевой зоны не будут изменяться.

Таким образом, анализ показывает, что внешняя изгибающая нагрузка, введенные термоупругие напряжения и критические параметры  $K_c$ ,  $\delta_c$  определяют характер разрушения:

- 1) рост вершины трещины с продвижением концевой зоны;
- 2) сокращение размера концевой зоны без роста вершины трещины;
- 3) рост вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны.

На рисунке приведены графики распределения нормальных усилий  $q_y$  в связях концевых зон трещины при чистом изгибе для следующих значений свободных параметров:  $\nu = 0,3$ ;  $t_* = 4at/L_0^2 = 10$ ;  $R/L_0 = 0,5$ ;  $b_0/L_0 = 0,2$ ;  $(b-a)/c = 0,05$  (кривая 1);  $(b-a)/c = 0,02$  (кривая 2), где  $L_0$  и  $b_0$  координаты центра нагреваемой области;  $\sigma_0 = M_{изг}/W$ , где  $W$  – момент сопротивления сечения полосы (балки);  $d$  – линейный размер концевой зоны.

Расчеты показывают, что наличие тепловых напряжений уменьшает значения коэффициентов интенсивности напряжений, усилия в связях между берегами и раскрытие трещины. При линейном законе деформирования связей усилия в них всегда имеют максимальные значения на краю концевой зоны. Аналогичная картина имеет место и для величины раскрытия трещин. На краю концевой зоны она максимальна при линейном и нелинейном законах деформирования.

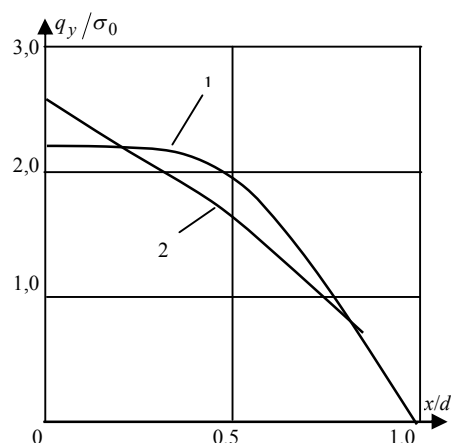


Рис. 1. Распределение нормальных усилий в связях концевых зон трещины

**Выводы.** Решена задача о торможении роста криволинейной когезионной трещины в изгибаемой полосе (балке), когда на пути ее распространения имеется нагретая зона. Получены соотношения для коэффициентов интенсивности напряжений и раскрытия берегов криволинейной трещины на краях концевой зоны межчастичных связей материала в зависимости от приложенной внешней нагрузки, интенсивности источника тепла, длины трещины, геометрических параметров нагретой зоны. Установлена зависимость длины трещины от приложенной изгибающей нагрузки, интенсивности нагретой зоны, а также от физических и геометрических параметров полосы (балки) при монотонном нагружении.

#### Л и т е р а т у р а

1. Финкель В.М. Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977. 360 с.
2. Беленький В.Д. Закрытие центральной трещины в круговом диске под действием температурного поля // Проблемы прочности. 1984. № 6. С. 35–38.
3. Potthast B., Herrmann K.P. Asymptotic analysis for temperature fields induced by dynamic crack growth in pressure-sensitive materials // Int. J. of Fracture. 2000. Vol. 106. P. 57–64.
4. Кадиев Р.И., Мирсалимов В.М. Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестник Даг. гос. ун-та. 2001. № 4. С. 69–73.
5. Fu Y.-M., Bai X.-Z., Qiao G.-Y., Hu Y.-D., Luan J.-Y. Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating // Materials Science and Technology. 2001. Vol. 17. P. 1653–1656.
6. Кадиев Р.И. Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестник ДНЦ РАН. 2003. № 14. С. 15–18.
7. Мирсалимов В.М., Кадиев Р.И. Закрытие трещины в листовом элементе под действием локального теплового поля // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 6. С. 69–75.
8. Kovtunen V.A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. Angew. Math. Mech.. 2005. Bd. 85. Fasc. 4. S. 242–251.
9. Мирсалимов В.М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 1. С. 132–151.
10. Qin Z, Librescu L., Hasanyan D. Joule heating and its implications on crack detection/arrest in electrically conductive circular cylindrical shells // J. of Thermal Stresses. 2007. Vol. 30. P. 623–637.
11. Liu T.J.C. Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2008. Vol. 49. P. 171–184.

12. *Мир-Салим-заде М.В.* Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // ПМТФ. 2010. Т. 51, №2. с. 148–159.
13. *Димаки А.В., Мельников А.Г., Плешанов В.С., Сизова О.В.* Теоретическое и экспериментальное исследование заживления поверхностных трещин индукционным нагревом // Перспективные материалы. 2010. № 3. Р. 77–83.
14. *Liu T.J.C.* Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // Engineering Fracture Mechanics. 2011. Vol. 78. P. 666–684.
15. *Liu T.J.C.* Fracture mechanics of steel plate under Joule heating analyzed by energy density criterion // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2011. Vol. 56. P. 154–161.
16. *Мирсалимов В.М., Рустамов Б.Э.* Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // Прикладная механика и техническая физика. 2013. № 6. С. 181–190.
17. *Liu T.J.C.* Compressive stresses near crack tip Induced by thermo-electric field // Int. J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, 2014. Vol. 8. P. 1799–1802.
18. *Georgantzinos S.K., Anifantis N.K.* Crack closure // Encyclopedia of Thermal Stresses (edit. R.B. Hetnarski). Springer Netherlands. 2014. 774–779.
19. *Мир-Салим-заде М.В.* Трещины со связями в перфорированной стрингерной пластине // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 5. С. 34–43.
20. *Itou S.* Thermal stresses around two upper cracks placed symmetrically about a lower crack in an infinite orthotropic plane under uniform heat flux // J. of theoretical and applied mechanics. 2014. Vol. 52. P. 617–628.
21. *Мустафаев А.Б.* Взаимодействие берегов искривленной трещины в изгибающейся полосе (балке) под действием теплового источника // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 4. с. 29–41.
22. *Мирсалимов В.М., Мустафаев А.Б.* Решение задачи о частичном контактировании берегов щели переменной ширины под действием температурного поля. // Физико-хим. механика материалов. 2015. № 1. С. 86–92.
23. *Mirsalimov V.M., Mustafayev A.B.* A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // Mechanika. 2015. Vol. 21. P. 19–22.
24. *Гаджиев В.Д., Мирсалимов В.М.* Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами // Оптимальное проектирование механических систем. Баку: Элм, 1999. С. 50–63
25. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. 2003. V.70, №14. P. 1741–1987.
26. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
27. *Мирсалимов В.М.* Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
28. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
29. *Ladopoulos E.G.* Singular Integral Equations. Springer-Verlag, Berlin, 2000. 553 p.
30. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат., 1948. 376 с.

#### References

1. *Finkel VM.* (1977) *Physical Basis Of Fracture Retardation*. Moscow: Metallurgiya. 360 p.
2. *Belen'kii VD.* (1984) Closure of a central crack in a circular disk under the influence of a temperature field // Strength of Materials. Vol. 16. p. 806–810.
3. *Potthast B, Herrmann KP.* (2000) Asymptotic analysis for temperature fields induced by dynamic crack growth in pressure-sensitive materials // Int. J. of Fracture. 106. p. 57–64
4. *Kadiev RI, Mirsalimov VM.* (2001) Effect of heat source on the dynamics of crack growth, Vestnik Dagestanskogo universiteta. 2001. №4. p. 69–73.
5. *Fu Y-M, Bai X-Z, Qiao G-Y, Hu Y-D, Luan J-Y.* (2001) Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating // Materials Science and Technology. Vol. 17. p. 1653–1656.
6. *Kadiev RI.* (2003) Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестник ДНЦ РАН. № 14. p. 15–18.
7. *Mirsalimov VM, Kadiev RI.* (2004) Closing of a crack in the sheet element under action of local thermal field // J. of Machinery Manufacture and Reliability. Vol. 33, Issue 6. p. 69–75.

8. *Kovtunen VA.* (2005) Nonconvex problem for crack with nonpenetration // *Z. Angew. Math. Mech.* Bd. 85. Fasz. 4. s. 242–251.
9. *Mirsalimov VM.* (2007) The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair // *J. of Applied mathematics and mechanics.* Vol. 71. p. 120–136.
10. *Qin Z, Librescu L, Hasanyan D.* (2007) Joule heating and its implications on crack detection/arrest in electrically conductive circular cylindrical shells // *J. of Thermal Stresses.* Vol. 30. p. 623–637
11. *Liu TJC.* (2008) Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* Vol. 49. p. 171–184.
12. *Mir-Salim-zada MV.* (2010) Modeling of partial closure of cracks in a perforated isotropic medium reinforced by a regular system of stringers // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics.* Vol. 51. p. 269-279.
13. *Dimaki AV, Mel'nikov AG, Pleshanov VS, Sizova OV.* (2010) Theoretical and experimental study of the healing of surface cracks using induction heating // *Inorganic Materials: Applied Research.* Vol. 1, Issue 4. p. 353–358.
14. *Liu TJC.* (2011) Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // *Engineering Fracture Mechanics.* Vol. 78. p. 666–684.
15. *Liu TJC.* (2011) Fracture mechanics of steel plate under Joule heating analyzed by energy density criterion // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* Vol. 56. p. 154–161.
16. *Mirsalimov MV, Rustamov BE.* (2013) Simulation of partial closure of a crack-like cavity with cohesion between the faces in an isotropic medium // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics.* Vol. 54, p. 1021–1029.
17. *Liu TJC.* (2014) Compressive stresses near crack tip Induced by thermo-electric field // *Int. J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering.* Vol. 8. p. 1799–1802.
18. *Georgantzinos S.K., Anifantis N.K.* (2014) Crack closure // *Encyclopedia of Thermal Stresses* (edit. R.B. Hetnarski). Springer Netherlands. p. 774–779.
19. *Mir-Salim-zade MV.* (2014) Cracks with interfacial bonds in a perforated stringer plate // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* Issue 5. p. 34–43.
20. *Itou S.* (2014) Thermal stresses around two upper cracks placed symmetrically about a lower crack in an infinite orthotropic plane under uniform heat flux // *J. of theoretical and applied mechanics.* Vol. 52. p. 617–628.
21. *Mustafayev AB.* (2014) Interaction of curved crack faces in bending strip (beam) under influence of temperature field // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* Issue 4. p. 29–41.
22. *Mirsalimov VM, Mustafayev AB.* (2015) Solution of the problem of partial contact between the faces of a slot of variable width under the action of temperature fields // *Materials Science.* Vol. 51. p. 96–103.
23. *Mirsalimov VM, Mustafayev AB.* (2015) A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // *Mechanika.* Vol. 21. p. 19–22.
24. *Gadzhiev VD, Mirsalimov VM.* (1999) Limit equilibrium state of the bushing-type component of a contact couple in the presence of cracks with bonds between the faces // *Optimal Design of Mechanical Systems.* Elm, Baku. p. 50–63.
25. The special issue: Cohesive models // *Eng. Fract. Mech.* 2003. V.70, №14. P. 1741-1987.
26. *Panasyuk VV, Savruk MP, Datsyshyn AP.* (1976) The stress distribution around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka. 443 p. (in Russian)
27. *Muskhelishvili NI.* (1977) Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Amsterdam: Kluwer. 732 p.
28. *Mirsalimov VM.* (1987) Non-one-dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka. 256 p.
29. *Ladopoulos EG.* (2000) Singular Integral Equations. Springer-Verlag, Berlin. 553 p.
30. *Ilyushin AA.* (1948) Plasticity. Moscow a
31. nd Leningrad: Gostekhizdat. 376 p. (in Russian)

## INHIBITION OF CURVILINEAR COHESIVE CRACK GROWTH IN A BENDING STRIP (BEAM) BY INDUCED HEAT STRESS FIELD

A.B. MUSTAFAYEV

*Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of Azerbaijan*

We consider a temperature changes near end of curvilinear crack with end zones of material cohesive forces in bending strip (beam). The aim of the local temperature changes is a delay or inhibition of crack growth. Boundary value problem for equilibrium of curvilinear crack under the action of external bending loads, induced thermoelastic stress field and tractions in bonds, preventing its disclosure, is reduced to a system of nonlinear singular integro-differential equations with the kernel of Cauchy type. Condition of crack limit equilibrium is formulated on the basis of a two-parameter fracture criterion.

KEY WORDS: bending strip (beam), temperature field, curvilinear crack, pre-fracture zone, cohesive forces.