

## Численные методы расчета конструкций

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СОЧЛЕНЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК С РАЗЛИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ<sup>1</sup>

Ю.В. КЛОЧКОВ, доктор техн. наук, профессор  
А.П. НИКОЛАЕВ, доктор техн. наук, профессор  
Т.А. КИСЕЛЕВА, кандидат техн. наук, доцент  
А.С. АНДРЕЕВ, аспирант, ассистент  
Волгоградский государственный аграрный университет  
400002, Волгоград, пр. Университетский, 26, [Klotchkov@bk.ru](mailto:Klotchkov@bk.ru)

*Изложен алгоритм расчета осесимметричных сочлененных оболочек с различными физико-механическими характеристиками материалов на основе МКЭ с использованием скалярной и векторной интерполяции полей перемещений. В качестве элемента дискретизации используется криволинейный фрагмент меридиана оболочки с узлами  $i$  и  $j$ . Выполнен анализ НДС тонкостенной конструкции из разнородных материалов в форме цилиндра, сочлененного со сферой и эллипсоидом.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сочлененные осесимметричные оболочки, скалярная интерполяция, векторная интерполяция, конечный элемент, условия сочленения оболочек.

Конструкции из сочлененных осесимметричных оболочек с различными физико-механическими свойствами материалов, из которых они изготовлены, находят широкое применение в различных отраслях строительства и машиностроения. Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) такого рода конструкций в настоящее время выполняется, в основном, на основе численных методов, в частности метода конечных элементов (МКЭ) [1-8]. Применяемые для этих целей зарубежные вычислительные комплексы типа ANSYS, ABAQUS, NASTRAN и другие используют в криволинейных системах координат неинвариантную интерполяцию отдельных компонент вектора перемещений как скалярных величин, что приводит в ряде случаев [9, 10] к получению некорректных значений расчетных величин. Поэтому актуальной остается задача создания новых вычислительных алгоритмов, основанных на инвариантной интерполяции полей перемещений как векторных величин. В настоящей работе излагается алгоритм конечно-элементного расчета осесимметрично нагруженных сочлененных оболочек с различными значениями физико-механических характеристик материалов на основе инвариантного способа интерполяции полей перемещений как векторных величин.

#### 1. Геометрия оболочки

Срединная поверхность осесимметричной оболочки описывается радиус-вектором:

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x)\vec{k}, \quad (1)$$

где  $r(x)$  - радиус вращения.

Орты локального базиса точки срединной поверхности осесимметричной оболочки определяются по формулам:

$$\vec{e}_1^0 = \vec{R}_{,1}^0 = x_{,1}\vec{i} + r_{,1}\vec{k}; \quad \vec{e}_n^0 = \vec{e}_1^0 \times \vec{j} = -r_{,1}\vec{i} + x_{,1}\vec{k}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-00133 мол\_а).

где нижний индекс 1 после запятой обозначает операцию дифференцирования по дуге меридиана  $s$ .

На основании (2) можно сформировать прямую и обратную матричные зависимости:

$$\{\vec{e}_1^0\} = [d^0] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{i}\} = [d^0]^{-1} \{\vec{e}_1^0\}, \quad (3)$$

где

$$\{\vec{e}^0\}^T = \{\vec{e}_1^0 \vec{e}_n^0\}; \quad \{\vec{i}\} = \{\vec{i} \vec{k}\}$$

Производные ортонормированного базиса (3) по дуге меридиана  $s$  могут быть выражены через этот же локальный базис зависимостями:

$$\vec{e}_{1,s}^0 = k \vec{e}_n^0; \quad \vec{e}_{n,s}^0 = -k \vec{e}_1^0, \quad (4)$$

где

$$k = r_{,xx} \cdot (x_{,1})^3.$$

Положение точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , до и после деформирования определяется радиус-векторами:

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{e}_n^0; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}. \quad (5)$$

Входящий в (5) вектор перемещения точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , с учетом гипотезы прямой нормали определяется выражением:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta (\vec{e}_n - \vec{e}_n^0), \quad (6)$$

где  $\vec{v} = u \vec{e}_1^0 + w \vec{e}_n^0$  - вектор перемещения точки срединной поверхности;  $\vec{e}_n$  - орт нормали к срединной поверхности в деформированном состоянии.

Деформации в точке, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , определяются соотношениями механики сплошной среды [11]:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta = (g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\alpha}^0) / 2, \quad (7)$$

где греческие индексы последовательно принимают значения 1, 2.

Входящие в (7) ковариантные компоненты метрического тензора до и после деформирования определяются скалярными произведениями базисных векторов:

$$g_{\alpha\alpha}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\alpha^0; \quad g_{\alpha\alpha} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_{,\alpha}, \quad (8)$$

где

$$\vec{g}_\alpha^0 = R_{,\alpha}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_\alpha = R_{,\alpha}^\zeta.$$

## 2. Конечный элемент и интерполяция перемещений

В качестве конечного элемента выбирается криволинейный фрагмент меридиана оболочки, выделенный двумя плоскостями перпендикулярными оси  $Ox$ , с узлами  $i$  и  $j$ . Каждый такой фрагмент для удобства численного интегрирования отображается на отрезок в локальной системе координат  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

Столбец узловых варьируемых параметров в локальной  $\eta$  и глобальной  $s$  системах координат выбирается в следующем виде:

$$\left\{ \begin{matrix} U_y^L \\ \end{matrix} \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \begin{matrix} \{u_y^L\}^T & \{w_y^L\}^T \\ \end{matrix} \right\}_{1 \times 6}; \quad \left\{ \begin{matrix} U_y^G \\ \end{matrix} \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \begin{matrix} \{u_y^G\}^T & \{w_y^G\}^T \\ \end{matrix} \right\}_{1 \times 6}, \quad (9)$$

где

$$\{q_y^L\}^T = \{q^i q^j q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta\eta}^i q_{,\eta\eta}^j\}; \quad \{q_y^G\}^T = \{q^i q^j q_{,s}^i q_{,s}^j q_{,ss}^i q_{,ss}^j\}.$$

Здесь под  $q^m$  ( $m = i, j$ ) понимается меридиональная  $u$  или нормальная  $w$  компонента вектора перемещения.

3. Варианты интерполяционной процедуры

В разработанном алгоритме реализованы два варианта интерполяции перемещений. В первом варианте использована общепринятая интерполяция отдельных компонент вектора перемещения как скалярных величин

$$q = \{\psi\}^T \{q_y^{\Pi}\} = \{\psi\}^T [L] \{q_y^{\Gamma}\} \quad (10)$$

где  $\{\psi\}^T = \{\psi_1 \psi_2 \dots \psi_6\}$  - матрица-строка, представленная полиномами Эрмита пятой степени,  $[L]$  - матрица перехода от столбца  $\{q_y^{\Pi}\}$  к столбцу  $\{q_y^{\Gamma}\}$ .

Во втором варианте интерполяционное выражение записывается непосредственно для вектора перемещения в следующем виде:

$$\vec{V} = \{\psi\}^T \left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Pi} \right\} = \{\psi\}^T [L] \left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}, \quad (11)$$

где  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Pi} \right\}^T = \left\{ \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \right\}_{1 \times 6}$ ,  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}^T = \left\{ \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \right\}_{1 \times 6}$  - матрицы - строки векторных узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат;  $[L]$  - матрица перехода от столбца  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Pi} \right\}$  к столбцу  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}$ .

Представляя входящие в структуру  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}$  векторы перемещения узлов и их производные компонентами, отнесенными к узловым локальным базисам:

$$\overrightarrow{V}^m = u^m \overrightarrow{e}_1^{0m} + w^m \overrightarrow{e}_n^{0m}; \quad \overrightarrow{V}_{,s}^m = l_1^{1m} \overrightarrow{e}_1^{0m} + l_n^{1m} \overrightarrow{e}_n^{0m}; \quad \overrightarrow{V}_{,ss}^m = l_{11}^{1m} \overrightarrow{e}_1^{0m} + l_{nn}^{1m} \overrightarrow{e}_n^{0m}, \quad (12)$$

столбец  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}$  можно представить матричным произведением

$$\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\} = [\vec{A}] \{n_y\}, \quad (13)$$

где

$$[\vec{A}]_{6 \times 12} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e}_1^{0i} & \overrightarrow{e}_n^{0i} & & & & & & & & & & \\ & & \overrightarrow{e}_1^{0j} & \overrightarrow{e}_n^{0j} & & & & & & & & \\ & & & & \overrightarrow{e}_1^{0i} & \overrightarrow{e}_n^{0i} & & & & & & \\ & & & & & & \overrightarrow{e}_1^{0j} & \overrightarrow{e}_n^{0j} & & & & \\ & & & & & & & & \overrightarrow{e}_1^{0i} & \overrightarrow{e}_n^{0i} & & \\ & & & & & & & & & & \overrightarrow{e}_1^{0j} & \overrightarrow{e}_n^{0j} \end{bmatrix},$$

$$\{n_y\}_{1 \times 12}^T = \{u^i w^i u^j w^j l_1^i l_n^i l_1^j l_n^j l_{11}^i l_{11}^j l_{11}^i l_{11}^j\}.$$

Столбец  $\{n_y\}$  может быть выражен через столбец узловых неизвестных в глобальной системе координат  $\{U_y^{\Gamma}\}$  с помощью матричной зависимости

$$\{n_y\} = [T] \{U_y^{\Gamma}\} \quad (14)$$

С учетом (14) интерполяционное выражение (11) может быть представлено в виде:

$$\vec{v} = \{\psi\}^T [\vec{A}] [G] [T] \{U_y^{\Gamma}\}, \quad (15)$$

где матрица  $[G]$  определяется из равенства  $[L]_{6 \times 6} [\vec{A}]_{6 \times 12} = [\vec{A}]_{6 \times 12} [G]_{12 \times 12}$ .

Входящие в  $[A]$  узловые орты базисов с помощью (3) могут быть выражены через орты базиса внутренней точки элемента дискретизации

$$\{\vec{e}^{0m}\} = [d^{0m} [d^0]^{-1}] \{\vec{e}^0\} \quad (16)$$

С учетом (16) матрица  $[\vec{A}]$  может быть представлена матричной суммой:

$$[\vec{A}] = \vec{e}_1^0 [A_1] + \vec{e}_n^0 [A_n]. \quad (17)$$

Принимая во внимание (17) и представляя вектор перемещения внутренней точки элемента дискретизации компонентами, отнесенными к локальному базису этой точки, выражение (15) примет следующий вид:

$$u \vec{e}_1^0 + w \vec{e}_n^0 = \{\psi\}^T (\vec{e}_1^0 [A_1] + \vec{e}_n^0 [A_n]) \{Z_y\}, \quad (18)$$

где  $\{Z_y\} = [G][T]\{V_y^T\}$

Сопоставляя левую и правую части (18), можно записать интерполяционные зависимости для компонент векторов перемещения во втором варианте интерполяционной процедуры:

$$u = \{\psi\}^T [A_1] \{Z_y\}; \quad w = \{\psi\}^T [A_n] \{Z_y\}. \quad (19)$$

Сравнивая между собой (10) и (19), можно отметить, что во втором варианте каждая компонента вектора перемещения внутренней точки элемента дискретизации зависит от узловых значений обеих компонент и их производных, в то время как в первом варианте компонента вектора перемещения зависит от узловых значений только этой же компоненты и не зависит от узловых значений другой компоненты. Кроме того, через соотношение (16) в аппроксимирующие выражения входят параметры используемой криволинейной системой координат.

#### 4. Условия на границе сочленения $n$ оболочек

Для корректного определения НДС  $n$  сочлененных осесимметричных оболочек, столбец узловых неизвестных одной из них на границе сочленения принимается за основной. Узловые неизвестные остальных  $(n-1)$  оболочек в узле сочленения должны быть выражены через столбец узловых неизвестных основной оболочки, исходя из кинематических и силовых условий сочленения.

Первым кинематическим условием сочленения является инвариантность векторов перемещений  $n$  оболочек в узле сочленения:

$$\vec{v}^{(1)} = \vec{v}^{(2)} = \dots = \vec{v}^{(i)} = \dots = \vec{v}^{(n)}, \quad (20)$$

где верхний индекс в скобках указывает на номер оболочки.

Для того, чтобы воспользоваться соотношением (20), необходимо векторы локального базиса основной оболочки (например  $i$ -ой) последовательно выразить через орты остальных  $(n-1)$  оболочек

$$\{\vec{e}_{2 \times 1}^{(i)}\} = [d_{2 \times 2}^{(k)}] \{\vec{e}_{2 \times 1}^{(k)}\} \quad (21)$$

где  $k = 1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n;$

$$\{\vec{e}^{(i)}\}^T = \{\vec{e}_{1 \times 1}^{0(i)} \vec{e}_n^{0(i)}\} \{\vec{e}^{(k)}\}^T = \{\vec{e}_{1 \times 1}^{0(k)} \vec{e}_n^{0(k)}\}$$

С учетом (21) из (20) могут быть получены выражения

$$u^{(k)} = u^{(i)} d_{11}^{(k)} + w^{(i)} d_{21}^{(k)}; \quad w^{(k)} = u^{(i)} d_{12}^{(k)} + w^{(i)} d_{22}^{(k)}. \quad (22)$$

Вторым кинематическим условием сочленения является предположение о том, что угол между нормальными к срединным поверхностям  $n$  сочленяемых

оболочек в процессе деформирования остается неизменяемым. Вследствие этого предположения будут справедливы равенства:

$$\vec{v}_{,1}^{(i)} \cdot \vec{e}_n = \vec{v}_{,1}^{0(i)} \cdot \vec{e}_n = \vec{v}_{,1}^{(k)} \cdot \vec{e}_n = \vec{v}_{,1}^{0(k)} \cdot \vec{e}_n, \quad (23)$$

где  $\vec{v}_{,1}^{(i)} = \vec{e}_1^{0(i)} (u_{,1}^{(i)} - k^{(i)} \cdot w^{(i)}) + \vec{e}_n^{0(i)} (w_{,1}^{(i)} + k^{(i)} \cdot u^{(i)})$ ;  $k^{(i)} = r_{,xx}^{(i)} \cdot (x_{,s}^{(i)})^3$ .

После выполнения скалярного умножения из (23) можно выразить производную нормальной компоненты вектора перемещения через узловые неизвестные основной ( $i$ -ой) оболочки

$$w_{,1}^{(k)} = w_{,1}^{(i)} + k^{(i)} \cdot u^{(i)} - k^{(k)} \cdot u^{(k)},$$

или с учетом (22):

$$w_{,1}^{(k)} = w_{,1}^{(i)} + k^{(i)} \cdot u^{(i)} - k^{(k)} (u^{(i)} d_{11}^{(k)} + w^{(i)} d_{21}^{(k)}) \quad (24)$$

В качестве силового условия сочленения  $n$  оболочек можно рассмотреть статическое условие равновесия по изгибающим моментам в узле сочленения:

$$M^{(1)} + M^{(2)} + \dots + M^{(i)} + \dots + M^{(k)} + \dots + M^{(n)} = 0. \quad (25)$$

Входящие в (23) изгибающие моменты могут быть определены по формулам [13]

$$M^{(k)} = \frac{E^{(k)} (h^{(k)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(k)} + \nu^{(k)} \kappa_{22}^{(k)}), \quad (26)$$

где  $E^{(k)}$ ,  $h^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$  - модуль упругости, толщина и коэффициент Пуассона  $k$ -ой оболочки;  $\kappa_{11}$ ,  $\kappa_{22}$  - искривления срединной поверхности.

Из равенства (25) с учетом (26) можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \kappa_{11}^{(k)} + \nu^{(k)} \kappa_{22}^{(k)} = & \frac{12}{E^{(k)} (h^{(k)})^3} \left( -\frac{E^{(1)} (h^{(1)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(1)} + \nu^{(1)} \kappa_{22}^{(1)}) - \dots \right. \\ & \dots - \frac{E^{(2)} (h^{(2)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(2)} + \nu^{(2)} \kappa_{22}^{(2)}) - \frac{E^{(i)} (h^{(i)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(i)} + \nu^{(i)} \kappa_{22}^{(i)}) - \dots \\ & \left. \dots - \frac{E^{(n)} (h^{(n)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(n)} + \nu^{(n)} \kappa_{22}^{(n)}) \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\kappa_{11}^{(k)} = -w_{,11}^{(k)} - u_{,1}^{(k)} \cdot k^{(k)} - u^{(k)} \cdot k_{,1}^{(k)}$  [13], из соотношения (27) в узле сочленения можно выразить вторую производную нормальной компоненты вектора перемещения  $k$ -ой оболочки через узловые неизвестные  $i$ -ой оболочки и вторые производные нормальной компоненты векторов перемещений остальных  $(n-2)$  оболочек

$$w_{,11}^{(k)} = f(w_{,11}^{(1)}, w_{,11}^{(2)}, \dots, w_{,11}^{(k-1)}, w_{,11}^{(k+1)}, \dots, w_{,11}^{(n)}, u_{,1}^{(i)}, u^{(i)}, w^{(i)}, w_{,1}^{(i)}). \quad (28)$$

Узловые неизвестные  $u_{,1}$  и  $u_{,11}$  всех сочлененных оболочек в узле сопряжения остаются свободно варьируемыми.

С учетом (22), (24) и (28) формируются матрицы преобразований  $[T^{(k)}]$  на которые умножаются матрицы жесткости и столбцы узловых усилий конечных элементов непосредственно примыкающих к узлу сочленения  $(n-1)$  оболочек

$$[T^{(k)}]^T [MG^{(k)}] [T^{(k)}] = [T^{(k)}]^T \{R^{(k)}\}, \quad (29)$$

где  $[MG^{(k)}]$ ,  $\{R^{(k)}\}$  - матрица жесткости и столбец узловых усилий конечного элемента  $k$ -ой оболочки.

### 5. Пример расчета

В качестве примера была рассчитана оболочечная конструкция, состоящая из цилиндра и сочленённых с ним эллипсоида и сферы, радиусы которых описывались уравнениями:  $r_1 = (b/a)\sqrt{a^2 - x_1^2}$  ( $0 \leq x_1 \leq 1,2\text{ м}$ );  $r_2 = \sqrt{R^2 - x_2^2}$  ( $0 \leq x_2 \leq 0,8\text{ м}$ ) (рис. 1).

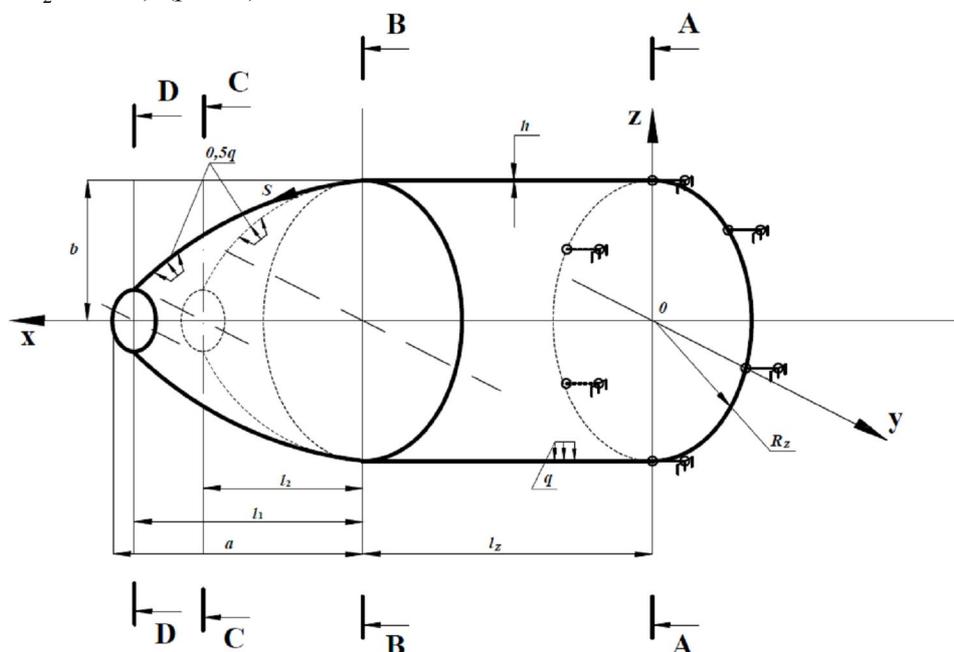


Рис. 1

Были приняты следующие исходные данные: радиус цилиндра  $R_z = 0,9\text{ м}$ ; длина цилиндра  $l_z = 6,0\text{ м}$ ; параметры эллипсоида  $a = 1,3\text{ м}$ ;  $b = 0,9\text{ м}$ ; радиус сферы  $R = 0,9\text{ м}$ ; толщина всех трех оболочек была принята равной  $h = 0,02\text{ м}$ ;  $l_1 = 1,2\text{ м}$ ;  $l_2 = 0,8\text{ м}$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Первоначально модуль упругости всех оболочек имел одинаковые значения равные  $E_u = E_c = E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Цилиндр был загружен внутренним давлением интенсивности  $q = 5,0 \text{ МПа}$ ; эллипсоид и сфера – давлением равным  $0,5q = 2,5 \text{ МПа}$ . Правый торец цилиндра был шарнирно закреплён. Левые концевые сечения эллипсоида и сферы оставались свободными. Расчеты выполнялись в двух вариантах: в первом варианте при формировании матрицы жесткости была использована общепринятая интерполяция отдельных компонент вектора перемещения как скалярных величин (10); во втором варианте была использована интерполяционная процедура, основанная на соотношениях (11) - (19). Результаты повариантного расчета при одинаковых значениях модуля упругости материала цилиндра и сочлененных с ним оболочек представлены в таблице 1, в которой приведены значения меридиональных  $\sigma_m$  и кольцевых  $\sigma_k$  напряжений на наружной  $\sigma^h$  и внутренней  $\sigma^s$  поверхностях оболочек в опорном сечении (А-А), в узле сочленения (В-В), в концевом сечении сферы (С-С) и в концевом сечении эллипсоида (D-D) при различных значениях  $n_s$  - числа элементов дискретизации каждой из оболочек. В правой крайней колонке приведены значения напряжений на срединной поверхности  $\sigma^{cp}$ , вычисленные исходя из условия равновесия (в опорном сечении) и по формуле Лапласа (в концевых сечениях) [13]:

$$\frac{\sigma_M}{R_M} + \frac{\sigma_K}{R_K} = \frac{q}{h},$$

где  $R_M$  и  $R_K$  – радиусы меридиональной и кольцевой кривизны.

Таблица 1

Вариант интерполяции		I			II			Аналитическое решение $\sigma^{cp}$ (МПа)
Сечение $n_3$		16	20	24	16	20	24	
A-A	$\sigma_M^e$	92,36	92,36	92,365	92,40	92,39	92,38	92,37
	$\sigma_M^h$	92,36	92,36	92,365	92,40	92,39	92,38	
	$\sigma_K^e$	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0
	$\sigma_K^h$	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	
B-B	$\sigma_M^e$	109,8	115,3	117,8	109,8	115,3	117,8	-
	$\sigma_M^h$	76,18	70,09	67,29	76,22	70,12	67,31	
	$\sigma_K^e$	152,4	154,0	154,8	152,4	154,0	154,8	-
	$\sigma_K^h$	142,4	140,5	139,6	142,4	140,5	139,6	
C-C	$\sigma_M^e$	-0,021	-0,013	-0,009	0,004	0,003	0,0027	0,000
	$\sigma_M^h$	-0,009	-0,008	-0,006	0,011	0,007	0,0047	
	$\sigma_K^e$	112,2	112,3	112,3	112,9	112,8	112,7	112,5
	$\sigma_K^h$	112,2	112,3	112,3	112,9	112,8	112,7	
D-D	$\sigma_M^e$	-0,021	-0,006	-0,001	0,027	0,016	0,012	0,000
	$\sigma_M^h$	0,061	0,035	0,022	0,026	0,017	0,013	
	$\sigma_K^e$	84,02	84,23	83,37	85,30	85,14	85,04	83,91
	$\sigma_K^h$	81,81	82,01	82,14	83,04	82,92	82,83	

Анализ табличных данных показывает быструю сходимость вычислительного процесса, практическое совпадение параметров НДС в обоих вариантах расчета и соответствие численных значений напряжений значениям, полученным аналитическим путем.

Если модуль упругости материала цилиндра последовательно уменьшать, то цилиндрическая часть оболочечной конструкции будет становиться все более податливой (модули сочлененных оболочек при этом остаются равными первоначальному значению  $E_c = E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ), а сочлененные оболочки под действием заданной нагрузки получают возможность смещаться как абсолютно твердые тела.

Результаты повариантных расчетов при последовательном уменьшении модуля упругости материала цилиндра представлены в таблице 2, в которой приведены численные значения напряжений в зависимости от отношения модуля упругости материала цилиндра к модулю сферы (эллипсоида)  $E_u / E_c$  ( $E_u / E_s$ ) при  $n_3 = 16$ .

Таблица 2

Вариант интерполяции		I				II			
$E_z / E_s (E_l)$		1,0	0,1	0,01	0,001	1,0	0,1	0,01	0,001
Сечение									
A-A	$\sigma_M^e$	92,4	92,4	92,4	92,3	92,4	92,4	92,4	92,4
	$\sigma_M^H$	92,4	92,4	92,4	92,3	92,4	92,4	92,4	92,4
	$\sigma_K^e$	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0
	$\sigma_K^H$	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0
B-B	$\sigma_M^e$	115,3	337,7	430,2	442,2	115,3	337,8	430,2	442,2
	$\sigma_M^H$	70,1	-151,2	-243,3	-255,3	70,12	-151,2	-243,2	-255,2
	$\sigma_K^e$	154,0	130,2	132,6	133,0	154,0	130,2	132,6	133,0
	$\sigma_K^H$	140,5	-16,52	-69,5	-76,2	140,5	-16,5	-69,5	-76,2
C-C	$\sigma_M^e$	-0,013	-0,2	-2,1	-21,1	0,003	0,003	0,003	0,003
	$\sigma_M^H$	-0,008	-0,1	-0,8	-8,0	0,007	0,007	0,007	0,007
	$\sigma_K^e$	112,3	108,4	69,0	-324,0	112,8	112,7	112,7	112,7
	$\sigma_K^H$	112,3	108,0	64,9	-365,0	112,9	112,8	112,8	112,8
D-D	$\sigma_M^e$	-0,006	-0,3	-2,9	-29,29	0,016	0,016	0,016	0,016
	$\sigma_M^H$	0,035	0,4	3,6	35,62	0,017	0,017	0,017	0,017
	$\sigma_K^e$	84,2	75,8	-9,8	-863,2	85,1	85,1	85,1	85,1
	$\sigma_K^H$	82,0	73,2	-16,2	-908,0	82,9	82,9	82,9	82,9

Как видно из табл. 2, численные значения контролируемых параметров НДС в концевых сечениях сферы и эллипсоида весьма существенно различаются между собой в зависимости от варианта расчета. Так, в первом варианте кольцевые напряжения уменьшаются, а затем изменяют свой знак, что недопустимо. Меридиональные напряжения, наоборот, увеличиваются, хотя по условию незагруженности концевых сечений в меридиональном направлении, они должны быть равными нулю. Во втором варианте можно наблюдать практически абсолютную стабильность результатов вычислительного процесса при любых отношениях модулей упругости материала. Данный факт можно объяснить тем, что при использовании второго варианта интерполяционной процедуры производится автоматический учет смещений элемента дискретизации как жесткого целого в неявной форме за счет изменения как компонент вектора перемещения, так и изменения ортов локального базиса внутренней точки конечного элемента. Применение общепринятого способа интерполяции отдельных компонент вектора перемещения как скалярных величин в этих случаях приводит к неприемлемой погрешности вычислений.

*Вывод:* при построении КЭ модели дискретизации сочлененных осесимметричных оболочек с различными значениями физико-механических характеристик материала необходимо использовать процедуру, основанную на интерполяции непосредственно вектора перемещения в сочетании с разработанными кинематическими и статическими условиями сочленения.

Л и т е р а т у р а

1. Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Гаврюшин С.С. Моделирование процесса деформирования и оценка несущей способности системы грунт – тонкостенная конструкция // Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 2014. № 6. С. 20-24.
2. Матвиенко Ю.Г., Чернятин А.С., Разумовский И.А. Численный анализ несингулярных составляющих трехмерного поля напряжений в вершине трещины смешанного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2013. № 4. С. 40-48.
3. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический анализ слоистых пластин и полых оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2011. № 1. С. 161-171.
4. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Либроком, 2013. 336 с.
5. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // International Applied Mechanics, 2012. V. 48. № 6. Pp. 613–687.
6. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
7. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М. Физматлит, 2010. 1022 с.
8. Игнат'ев А.В., Игнат'ев В.А., Онищенко О.В. Возможность использования метода конечных элементов в форме классического смешанного метода для геометрически нелинейного анализа шарнирно-стержневых систем // Вестник МГСУ, 2015. № 12. С. 47-58.
9. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселева Т.А., Марченко С.С. Сравнительный анализ результатов конечно-элементных расчетов на примере эллипсоидальной оболочки // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2016. № 4. С. 44–53.
10. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Марченко С.С., Киселева Т.А. Сопоставительный анализ расчета НДС сочлененных оболочек на основе МКЭ с векторной интерполяцией и комплекса ANSYS // Известия Волгоградского государственного технического университета, 2013. Т. 8. №15 (118). С. 81-84.
11. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
12. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962. 432 с.
13. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. М.: Наука, 1976. 608 с.

References

1. Kayumov, R.A., Shakirzyanov, F.R., Gavryushin, S.S. (2014) Modelirovaniye processa deformirovaniya i ocenka nesushhey sposobnosti sistemi grunt – tonkostennaya konstrukciya, *Izvestiya Vishih Uhebnih Zavedeniy. Mashinostroenie*. № 6. S. 20-24.
2. Matvienko, Yu.G., Hemyatin, A.S., Razumovskiy, I.A. (2013). Chislenniy analiz nesingulyarnix sostavlyayushih trexmernogo polya napryazheniy v vershine treshhini smeshannogo tipa, *Problemi Mashinostroeniya i Nadejnosti Mashin*, № 4, p. 40-48.
3. Skopcov, K.A., Sheshenin, S.V. (2011). Asimptoticheskiy analiz sloistih plastin i pologix obolochek, *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela*, № 1, p. 161-171.
4. Bazhenov, V.A., Krivenko, O.P., Solovey, N.A. (2013). Nelineynoe deformirovaniye i ustoychivost' uprugih oboloshkek neodnorodnoy strukturi: modeli, metodi, algoritmi, maloizuhennie i novye zadachi, M.: Librikom, 336 p.
5. Maksimyyuk, V.A., Storozhuk, E.A., Chernyshenko, I.S. (2012). Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review), *International Applied Mechanics*, V. 48, № 6, p. 613–687.
6. Golovanov, A.I., Tyuleneva, O.N., Shigabutdinov, A.F. (2006). *Metod Konechnih Elementov v Statike i Dinamike Tonkostennih Konstrukciy*, M.: Fizmatlit, 392 p.
7. Bate K.-Yu. (2010). *Methodi Konechnix Elementov*, M.: Fizmatlit. 1022 p.
8. Ignat'ev, A.V., Ignat'ev, V.A., Onishhenko, O.V. (2015). Vozmozhnoct' ispol'zovaniya metoda konechnih elementov v forme klassicheskogo smeshannogo method dlya geometricheski nelineynogo analiza sharnirno-sterzhnevix system, *Vestnik MGSU*, № 12, p. 47-58.
9. Klochkov, Yu.V., Nikolaev, A.P., Kiseleva, T.A., Marchenko, S.S. (2016). Comparative analysis of the results of finite element calculations based on an ellipsoidal shell, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. Vol. 45, No. 4, pp. 328-336.

10. Klochkov, Yu.V., Nikolaev, A.P., Marchenko, S.S., Kiseleva, T.A. (2013). Sopostavitel'nyy analiz rascheta NDS sochlenennih obolochek na osnove MKE s vektornoy interpolyaciey i kompleksa ANSYS, *Izvestiya Volgogradskogo Gosudarstvennogo Texnicheskogo Universiteta*, Vol. 8, №15 (118), p. 81-84.
11. Sedov, L.I. (1976). *Mekhanika Sploshnoy Sredi*, M.: Nauka, Vol. 1, 536 p.
12. Novozhilov, V.V. (1962). *Teoriya Tonkih Obolochek*, L.: Sudostroenie, 432 p.
13. Belyaev, N.M. (1976). *Soprotivlenie Materialov*, M.: Nauka, 608 p.

**A MATHEMATICAL MODEL OF DISCRETIZATION OF ARTICULATED  
AXISYMMETRIC SHELLS WITH DIFFERENT VALUES OF  
PHYSICAL-MECHANICAL CHARACTERISTICS OF MATERIALS**

KLOCHKOV Yu.V., NIKOLAEV A.P., KISELEVA T.A., ANDREEV A.S.  
*Volgograd State Agricultural University, Volgograd, Russia*

It is described an algorithm for calculating axisymmetric articulated shells with different physical and mechanical characteristics of materials based on the FEM using scalar and vector interpolations of displacement fields. As part of the sampling, a curved fragment of the meridian of the shell with nodes  $i$  and  $j$  is used. The analysis of VAT thin-walled structures made of heterogeneous materials in the form of a cylinder, articulated to the sphere and ellipsoid is fulfilled.

KEY WORDS: articulated axisymmetric shell, scalar interpolation, vector interpolation, finite element, the conditions of articulation of the shells.

