АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Э.Я. ЕЛЕНИЦКИЙ, *к.т.н., доцент*
ООО «Глобалтэнксинжиниринг»
443010, г. Самара, ул. Галактионовская, д.139, кв.4, elenit@list.ru

Получены дифференциальные уравнения и построено новое точное решение задачи для прямолинейного стержня и плоской статически определимой стержневой системы при действии продольно-поперечных нагрузок. Рассмотрено три характерных участка стержня, отличающихся схемами расположения упругого ядра прямоугольного сечения. Определены все компоненты напряженно-деформированного состояния и границы упругопластических зон. Представлен численный анализ результатов в линейной и нелинейной постановке.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: упругопластический материал, упругое ядро сечения, продольно-поперечный изгиб, уравнения равновесия, краевая задача, стержневая система.

При решении физически нелинейных задач строительной механики, точность приближенных методов определяется, как правило, с помощью других приближенных процедур. Например, в монографии [1] результаты расчета стержня итерационными методами упругих решений [2], переменных параметров упругости [3], Ньютона-Канторовича [4] и других [5, 6] оцениваются путем сравнения с аналогичными результатами, полученными методом конечных разностей [7].

Проверка численных расчетов с помощью точных нелинейных аналитических зависимостей в большинстве случаев не представляется возможной, поскольку их набор является весьма ограниченным. С целью расширения набора замкнутых решений и получения в явном виде высокоточных расчетных соотношений в настоящей статье рассмотрена краевая задача для стержня прямоугольного сечения и статически определимой стержневой системы из идеального упругопластического материала. Впервые аналитическое решение такой задачи было получено А.Р. Ржаницыным при условии действия только поперечной силы для простейших случаев нагружения однопролетного стержня [8]. Обобщение этого замкнутого решения выполнено в работе [9] для квадратичного закона распределения изгибающего момента вдоль статически определимой балки на двух опорах. Более простое решение без интегрирования дифференциальных уравнений в условиях чистого изгиба балки представлено в [10]. При этом полученные зависимости эффективно использовались для определения механических характеристик материалов в задачах микро-инженерии. Аналогичным образом аналитически исследовались напряжения прямолинейного стержня для различных моделей пластического течения [11] и криволинейного стержня для различных законов неоднородности по высоте сечения [12]. Случай продольно-поперечного изгиба бруса прямоугольного сечения, являющийся обобщением исследования его чистого изгиба [2, 13], рассмотрен в работе [14]. При этом решение значительно усложняется, поскольку распределение напряжений по высоте сечения становится несимметричным. Однако представленные в монографии [14] результаты являются приближенными, поскольку стержень моделируется набором участков с постоянными по длине жесткостными параметрами, а линеаризация осуществляется итерационной процедурой на основе зависимости между фиктивной нагрузкой и деформациями фиксированных сечений. Аналогичная задача для сжато-изогнутого консольного стержня из упругопластического материала с упрочнением исследовалась методом конечных элементов [15]. Итерационный подход, корректирующий приведенную жесткость каждого участка стержня с помощью секущего модуля упругости, реализован в [16]. Задача определения границ упругопластических зон в продольном сечении стержня точно решена в работах [8, 14, 17, 18]. Замкнутое аналитическое решение для стержневых систем в упругопластической стадии работы материала при действии продольно-поперечных нагрузок в литературе отсутствует.

Ниже приведена постановка и интегрирование физически нелинейной краевой задачи для продольно-поперечного изгиба стержня прямоугольного сечения. На основе полученных интегралов построено замкнутое решение для плоских стержневых систем ветвящегося типа с краевыми условиями, обеспечивающими статическую определимость. При этом точно определены все компоненты напряженно-деформированного состояния и границы упругопластических зон. Изотропный материал характеризуется модулем линейной упругости E, а его деформирование подчиняется диаграмме Прандтля с предельными значениями деформаций ε_p и напряжений σ_p.Также как в других аналогичных исследованиях, используется гипотеза плоских несжимаемых поперечных сечений, которая достаточно точно описывает деформирование конструкции независимо от свойств материала [8].

Предварительно рассмотрим консольную схему стержня длинной l, для которой на свободном конце в плоскости главной жесткости прикладывается сила с составляющими P_x, P_y, вызывающими появление пластических деформаций, области которых выделены штриховкой (рис.1а). Пролет стержня с неизменными высотой и шириной сечения h, b можно разделить на три характерных зоны, каждой из которых соответствует различая схема расположения упругого ядра сечения. В зоне I крайние верхние и нижние волокна испытывают пластическое течение, в зоне II пластическое деформирование происходит только с одной стороны сечения, в зоне III весь материал работает упруго. Границы зон определяются размерами l_1, l_2 в системе координат xy.

Распределение напряжений по высоте сечения и деформации элементарного участка длиной dx для зоны I представлены на рис. 2а,б. При этом размеры и положение упругого ядра определяются формулой:

$$z_{1,2} = -0{,}5n \pm \sqrt{0{,}75\,(1 - m - n^2)}\,, \tag{1}$$

полученной из уравнений равновесия внешних и внутренних усилий (рис. 2а).

В равенстве (1) используются выражения для безразмерных границ $z_{1,2}$=$Z_{1,2}/h$; безразмерных усилий n, m; усилий N_p, M_p, обеспечивающих независимо друг от друга переход всего сечения в зону пластического течения [14], а именно:

$$n = N / N_p\,;\; m = M / M_p\,,\;\; N_p = bh\sigma_p\,;\;\; M_p = bh^2\sigma_p / 4\,, \tag{2}$$

$$N = P_x\,,\;\; M = Px + M_0\,. \tag{3}$$

Формулы (3) содержат выражения продольной силы N и изгибающего момента M в расчетном сечении, причем для консольной схемы (рис.1а):

$$M_0 = 0\,,\;\; P = P_y\,. \tag{4}$$

Основными расчетными параметрами средней линии сечения в зоне I являются ее деформации ε_0 и кривизна $1/\rho$, определяемые из схемы деформирования (рис. 2б) по формулам:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_p(z_2 + z_1)(z_2 - z_1)^{-1},\;\; 1/\rho = 2\varepsilon_p[(z_1 - z_2)h]^{-1}. \tag{5}$$

Исходя из равенства первой производной от функции продольных перемещений $u(x)$ продольным деформациям ε_0 и равенства второй производной от функции прогибов $w(x)$ кривизне средней линии стержня $1/\rho$, с учетом (5) имеем:

$$du / dx = \varepsilon_p(z_2 + z_1)(z_2 - z_1)^{-1},$$

$$d^2w / dx^2 = 2\,\varepsilon_p[(z_1 - z_2)\,h]^{-1}. \tag{6}$$

При наличии (1) дифференциальные уравнения (6) принимают вид:

$$du / dx = \lambda nh[3(k_3 - k_1x)]^{-0.5},$$

$$d^2w / dx^2 = 2\lambda[3\,(k_3 - k_1x)]^{-0{,}5}\,, \tag{7}$$

где с учетом равенств (2) обозначено

$$k_1 = P / M_p\,,\;\; k_2 = M_0 / M_p\,,\;\; k_3 = 1 - n^2 - k_2\,,\;\; \lambda = \sigma_p / Eh\,. \tag{8}$$

Интегрируя (7), приходим, с точностью до постоянных C_{11}, C_{12}, C_{13} к следующим выражениям для продольных и нормальных линейных перемещений u_1, w_1, а также углов поворота ψ_1 в зоне I:

$$u_1 = \frac{-2\lambda nh}{\sqrt{3}\;k_1}\sqrt{k_3 - k_1x} + C_{11}\,,\;\; \psi_1 = \frac{-4\lambda}{\sqrt{3}\;k_1}\sqrt{k_3 - k_1x} + C_{12}\,,$$

$$w_1 = \frac{8\lambda}{3\sqrt{3}\;k_1^2}\left(k_3 - k_1x\right)^{1{,}5} + C_{12}x + C_{13}\,. \tag{9}$$

Параметры границ упругого ядра, полученные из уравнений равновесия усилий в сечении стержня в зоне II (рис.2в) определяются соотношениями:

$$z_1 = 1 - 3m\,(1 - n)^{-1} / 4\,,\qquad \alpha = 4(1 - n)^2(1 - n - 0{,}5\,m)^{-1} / 3\,. \tag{10}$$

Рассматривая продольные и изгибные деформации элементарного участка стержня для исследуемой зоны (рис.2г), представим их следующим образом:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_p(0,5-\alpha z_1)(0,5+z_1)^{-1}, \;\; 1/\rho = \varepsilon_p(1+\alpha)[(0,5+z_1)h]^{-1}. \quad (11)$$

Уравнение равновесия с учетом зависимостей (10), (11) принимают вид:

$$\frac{du}{dx} = \lambda h \frac{2}{3}[\frac{0,5}{1-k_4x-k_5} - \frac{4n-3+3k_4x+3k_5}{3(1-k_4x-k_5)^2}(1-1,5k_4x-1,5k_5)],$$

$$d^2w/dx^2 = 8\lambda(1-n)^2[0,25m^2(1-n)^{-1}+1-m-n]^{-1}/9, \quad (12)$$

где обозначено

$$k_4 = 0,5k_1/(1-n), \; k_5 = 0,5k_2/(1-n). \quad (13)$$

Интегрируя (12), получим с точностью до постоянных C_{21}, C_{22}, C_{23} следующие выражения для линейных u_2, w_2 и угловых ψ_2 перемещений стержня в зоне II:

$$u_2(x) = 2\lambda h\frac{1-n}{k_1}[k_4x+k_5+4\frac{1-n}{3}\ln(1-k_4x-k_5)-\frac{4}{9}\frac{1-n}{k_4x+k_5-1}]+C_{21},$$

$$\psi_2(x) = -32\lambda(1-n)^3\{9k_1[k_1x+k_2-2(1-n)]\}^{-1}+C_{22},$$

$$w_2(x) = -32\lambda k_1^{-2}(1-n)^3\ln[2(1-n)-k_1x-k_2]/9+C_{22}x+C_{23}. \quad (14)$$

Упругий характер деформирования стержня в зоне III позволяет представить его перемещения u_3, w_3, ψ_3 с точностью до постоянных C_{31}, C_{32}, C_{33}.

Границы между зонами I-II и II-III характеризуются условиями: z_2=-0,5 для формулы (1) (рис. 2а), и z_1=0,5 для первой формулы (10) (рис. 2в). Тогда границы зон могут быть установлены из следующих зависимостей:

при $x=l_1$: $m = 2(1-2n^2+n)/3$; при $x=l_2$: $m = 2(1-n)/3$. (15)

Равенства (15), дополненные условием предельной несущей способности [10]:

$$m \le 1-n^2 \quad (16)$$

и представленные графически на рис.1г, определяют области действия полученных решений для различных схем расположения упругого ядра сечения.

С учетом равенств (2), (3), (8) из (15) следует:

$$l_1 = 2k_1^{-1}(1-2n^2+n)/3-k_2/k_1, \quad l_2 = 2k_1^{-1}(1-n)/3-k_2/k_1. \quad (17)$$

Девять произвольных постоянных интегрирования дифференциальных уравнений определяются из девяти граничных условий, имеющих вид:

при $x=l_1$: $u_1(l_1) = u_2(l_1)$, $\psi_1(l_1) = \psi_2(l_1)$, $w_1(l_1) = w_2(l_1)$, (18)

при $x=l_2$: $u_1(l_2) = u_2(l_2)$, $\psi_1(l_2) = \psi_2(l_2)$, $w_1(l_2) = w_2(l_2)$, (19)

при $x=l$: $u_1(l) = \psi_1(l) = w_1(l) = 0$, (20)

где первая группа условий (18), (19) относится к внутренним границам, а вторая (20) обеспечивает консольное закрепление стержня длиной l.

Переходя к шарнирно опертому стержню замечаем (рис.1б), что полученные расчетные соотношения не изменяются за исключением формул (4), (20), которые с учетом симметрии расчетной схемы следует представить следующим образом:

$$M_0 = P_y l, \;\; P = -P_y, \quad (21)$$

при $x=0$: $u_1(0) = \psi_1(0) = 0$, при $x=l$: $w_3(l) = 0$. (22)

Необходимо отметить, что полученный набор решений для перемещений стержня является наиболее полным, так как включает все варианты распределения упругих и пластических деформаций. При этом возможны частные случаи, когда в пролете стержня отсутствует одна из зон I, II, или когда весь стержень деформируется упруго. Наличие соотношений (15)-(17) позволяет заранее произвести соответствующий анализ и сформировать условия, аналогичные равенствам (18), (19). В этом случае целесообразно обеспечить автоматическое выполнение этих условий и исключить из решения часть произвольных постоянных. Тогда расчетные соотношения для отдельного стержня e принимают вид:

$$\vec{d}_e(x) = \vec{d}_{pe} + a_e(x)\vec{C}_e, \tag{23}$$

где $\vec{d}_e$ – матрица искомых перемещений; $\vec{d}_{pe}$ – матрица известны частных решений для сечений различного типа и различных нагрузок, и при этом обеспечивающая условия совместности перемещений для внутренних границ стержня; a_e – матрица фундаментальных решений дифференциальных уравнений; $\vec{C}_e$ – вектор-столбец произвольных постоянных общего решения этих уравнений.

Компоненты векторного равенства (23) имеют следующий вид:

$$\vec{d}_e(x) = \begin{bmatrix} u_e(x) \\ \varphi_e(x) \\ w_e(x) \end{bmatrix}, \ \vec{d}_{pe}(x) = \begin{bmatrix} u_{pe}(x) \\ \varphi_{pe}(x) \\ w_{pe}(x) \end{bmatrix}, \ a(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}, \ \vec{C}_e = \begin{bmatrix} C_{e1} \\ C_{e2} \\ C_{e3} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

где матрица $a(x)$ соответствует структуре решения (9), (14).

Наличие соотношений (23), (24) позволяет производить расчеты не только отдельных стержней прямоугольного сечения, но и статически определимых стержневых систем в упруго-пластической стадии работы материала. При этом составная конструкция может быть образована последовательным соединением участков, а также иметь структуру ветвящегося типа. В последнем случае граничные условия задачи формируется автоматически по формулам [19]:

$$\sum_{e=1}^{n} h'_{je}\vec{d}_e(\xi L_e) = \vec{d}_j^*, \quad j=1,2\ldots m, \tag{25}$$

$$\sum_{e=1}^{n} h'''_{je}\vec{d}_e(\xi L_e) = 0, \quad j=1,2\ldots m_1, \tag{26}$$

где n – число участков-элементов длиной L_e; m, m_1 – число узлов и простых узлов стержневой системы; h'_{je}, h'''_{je} – матрицы, преобразующие перемещения из локального в глобальный базис и одновременно осуществляющие необходимую компоновку внешних связей и элементов в узле j; $\vec{d}_j^*$ – вектор-столбец внешних заданных кинематических воздействий в узле j; ξ – параметр, принимающий значения 0 и 1 для начального и конечного сечений элемента.

Как показано в работе [19], общее число условий внешнего опирания конструкции (25) и сопряжения элементов-стержней системы (26) составляет $3n$. Следовательно, подстановка зависимостей (23) в граничные условия (25), (26) приводит к замкнутой системе неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных произвольных постоянных $\vec{C}_e$ (e=1, n). Определив эти постоянные, получаем в явном виде искомые функции перемещений (23).

Решение задачи для отдельного стержня проиллюстрируем численно на примере с исходными данными: l=3 м, b=0,1 м, h=0,15 м, E=206000 МПа, σ_p=240 МПа, P_x=400 кН, P_y=44 кН. На рис.3а показаны границы области пластических деформаций консольного стержня, полученные по формулам (1), (10) при P_x=0 (пунктирные линии) и $P_x \neq 0$ (сплошные линии). В первом случае имеем l_1=l_2=2,045 м и высоту упругого ядра сечения, примыкающего к заделке ΔZ=Z_1-Z_2=38,7 мм. Наличие продольной силы изменяет форму области неупругого деформирования таким образом, что ее размеры характеризуются параметрами l_1=2,222 м, l_2=1,818 м, ΔZ=25,8 мм. На рис.3б представлены результаты для прогибов консольного стержня из упругого материала (кривая 1), упругопластического материала при P_x=0 (кривая 2), упругопластического материала при $P_x \neq 0$ (кривая 3). Перемещения на свободном конце стержня для указанных вариантов расчета составили 68,35 мм, 83,34 мм, 89,41 мм. Следовательно, наличие продольной силы привело к увеличению максимальных прогибов на 7,3%. Расчет шарнирно опертого стержня при действии указанной на рис.1б нагрузки показал, что все результаты на половине пролета совпадают с результатами расчета консольного стержня. С помощью представленного точного решения выполнена проверка вычислительного комплекса ANSYS при использовании конечного элемента Beam189. Максимальный прогиб составил 89,07 мм. Разница результатов точного и конечно-элементного расчета не превышает 0,38 %.

Далее рассмотрим результаты точного аналитического решения для стержневой системы, представленной на рис.1в. Геометрические параметры конструкции: L_1=2 м, L_2=3 м, L_3=1 м, L_4=2,5 м, α=30°, ширина всех сечений b=0,1 м, высота сечения горизонтального участка и наклонного стержня соответственно h_1=0,15 м, h_2=0,22 м. Характеристики материала аналогичны предыдущему примеру. Значения нагрузок: P_y=50 кН, P_x=124 кН, M=140 кН·м, q=10 кН/м. Нумерация узлов и стержней приведена на рис.1в, где также показана глобальная система координат XOY. Оси x местной системы отсчета направлены от начала к концу стержня. Условия внешнего опирания (25) в развернутом виде записываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{d}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \vec{d}_4(L_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Аналогично для условий сопряжения стержней (26) имеем:

$$h_1\vec{d}_1(L_1) = h_2\vec{d}_2(0), \quad h_2\vec{d}_2(L_2) = h_3\vec{d}_3(0), \quad h_2\vec{d}_2(L_2) = h_4\vec{d}_4(0), \tag{28}$$

где обозначено:

$$h_1 = h_2 = h_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix}. \tag{29}$$

На рис.3в в масштабе 10:1 изображены перемещения стержневой системы в упруго-пластической (сплошные линии) и упругой (пунктирные линии) постановке. В первом и втором случае максимальный прогиб горизонтального участка конструкции $w_{\max}$ составляет соответственно 119,58 мм и 92,86 мм.

На рис.3г показаны границы зон пластического течения конструкции. При этом l_1= 1,666 м, l_2= 1,559 м, ΔZ= 367 мм.

Результаты расчета той же задачи по программе ANSYS приведены в таблице 1. Там же производится сравнение результатов точного и конечно-элементного (в скобках) расчетов для различных уровней нагрузки P_y при прочих неизменных параметрах. Длина конечных элементов Beam189 составляет 0,1 м, количество слоев сетки по высоте сечения равно 30.

Таблица 1

P_y, кН	$w_{\max}$, мм	ΔZ, мм	ε, %
50	119,58 (119,41)	55,1	0,14
55	140,23 (139,63)	45,1	0,43
60	180,77 (178,01)	32,1	1,53
65	375,59 (303,70)	5,72	19,14

Как следует из таблицы 1, точность конечно-элементного расчета существенно зависит от соотношения упругих и пластических деформаций по высоте сечений. Так, в наиболее нагруженном сечении при $\Delta Z\ /h_1 \geq 0{,}3$ погрешность составляет не более 0,43%, а при приближении к предельному состоянию, когда $\Delta Z\ /h_1 = 0{,}03813$, она достигает 19,14%.

Заключение

1. Получено новое точное решение краевой задачи для стержня и плоской статически определимой стержневой системы ветвящегося типа в физически нелинейной постановке.

2. Установлены в явном виде размеры зон с различными схемами расположения упругого ядра прямоугольного сечения. Автоматическое выполнение условий сопряжения указанных зон позволяет снизить количество произвольных постоянных для каждого стержня в общем случае с девяти до трех.

4. Тестирование конечного элемента Beam189 показало существенную зависимость точности вычислений комплекса ANSYS от соотношения упругих и пластических деформаций.

Литература

1. *Петров В.В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфа-Инженерия, 2014. – 480 с.

2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

3. *Биргер И.А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред, №2. – М.: Наука, 1975. – с.51-73.

4. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук, Т. III, №6. – М.: Изд. АН СССР, 1948. – С.89-185.

5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

6. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1975. – 119 с.

7. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.

8. *Ржаницын А.Р.* Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. – М.: Госстройиздат, 1954. – 288 с.

9. *Stok B., Halilovic M.* Analytical solutions in elasto-plastic bending of beams with rectangular cross section//Applied Mathematical Modelling. – 2009. Vol. 33, №3. – P. 1749-1760.

10. *Bin J. Wanji C.* A new analytical solution of pure bending beam in couple stress elasto-plasticity: theory and applications // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47, №6. – P. 779-785.

11. *Joudaki J., Sedighi M.* Effect of materials behavior on residual stress distribution in elastic–plastic beam bending: An analytical solution// Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications. – 2015. – P.1-12.

12. *Nie G. J., Zhong Z.* Analytical solution for elastic and elastoplastic bending of a curved beam composed of inhomogeneous materials // Key Engineering Materials. - Trans Tech Publications. – 2013. Vol. 535. – P.353-356.

13. *Лукаш П.А.* Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с.

14. *Безухов Н.И., Лужин О.В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.

15. *Salazar J. A., Lange D.F., Cruz A.T., Castillo H.I., Rodriguez G.M.* Elastoplastic Analysis of a Cantilever Beam under Combined Compressive and Bending Load// ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. – American Society of Mechanical Engineers, 2013. – P. V009T10A025-V009T10A033.

16. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. – СПб.: Лань, 2008. – 656 с.

17. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.

18. *Chica E., Teran J. M. G., Iban A. L.* Yield surface for elastoplastic beam 2D element considering damage material //8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Eccomas 2008). – 2008.

19. *Еленицкий Э.Я.* Краевая задача для гибких составных конструкций ветвящегося типа// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. – №6. – С.73-80.

R e f e r e n c e s

1. *Petrov V.V.* (2014). *Nelinejnaya inkrementalnaya stroitelnaya mekhanika*, Moscow: Infa-Inzheneriya, 480 p.

2. *Ilyushin A.A.* (1948). *Plastichnost*, Moscow: Gostekhizdat, 376 p.

3. *Birger I.A.* (1975). Obshchie algoritmy resheniya zadach teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti // Uspekhi mekhaniki deformiruemyh sred, – №2. M.: Nauka, p.51-73.

4. *Kantorovich L.V.* (1948). Funkcionalnyj analiz i prikladnaya matematika // Uspekhi matematicheskih nauk, t. III, №6. M.: Izd. AN SSSR, p.89-185.

5. *Zenkevich O.* (1975). *Metod konechnyh ehlementov v tekhnike*, Moscow: Mir, 541 p.

6. *Petrov V.V.* (1975). *Metod posledovatel'nyh nagruzhenij v nelinejnoj teorii plastin i obolochek*, Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 119 p.

7. *Novozhilov V.V.* (1948). *Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti*, Moscow: Gostekhizdat, 211 p.

8. *Rzhanicyn A.R.* (1954). *Raschet sooruzhenij s uchetom plasticheskih svojstv materiala*, Moscow: Gosstrojizdat, 288 p.

9. *Stok B., Halilovic M.* (2009). Analytical solutions in elasto-plastic bending of beams with rectangular cross section, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, №3, p.1749-1760.

10. *Bin J. Wanji C.* (2010). A new analytical solution of pure bending beam in couple stress elasto-plasticity: theory and applications, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, №6, p. 779-785.

11. *Joudaki J., Sedighi M.* (2015). Effect of material's behavior on residual stress distribution in elastic–plastic beam bending: An analytical solution, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications*, p.1-12.

12. *Nie G. J., Zhong Z.* (2013). Analytical solution for elastic and elastoplastic bending of a curved beam composed of inhomogeneous materials, *Key Engineering Materials. – Trans Tech Publications*, Vol. 535, p.353-356.

13. *Lukash P.A.* (1978). Osnovy nelinejnoj stroitelnoj mekhaniki. Moscow: Strojizdat, 208 p.

14. *Bezuhov N.I., Luzhin O.V.* (1974). Prilozhenie metodov teorii uprugosti i plastichnosti k resheniyu inzhenernyh zadach. Moscow: Vysshaya shkola, 200 p.

15. *Salazar J. A., Lange D.F., Cruz A.T., Castillo H.I., Rodriguez G.M.* (2013). Elastoplastic Analysis of a Cantilever Beam under Combined Compressive and Bending Load, *ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition.–American Society of Mechanical Engineers*, p. V009T10A025-V009T10A033.

16. *Darkov A.V., Shaposhnikov N.N.* (2008). *Stroitelnaya mekhanika*, St. Petersburg: Lan, 656 p.

17. *Sokolovskij V.V.* (1969). *Teoriya plastichnosti*, Moscow: Vysshaya shkola, 608 p.

18. *Chica E., Teran J. M. G., Iban A. L.* (2008). Yield surface for elastoplastic beam 2D element considering damage material, *8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Eccomas 2008).*

19. *Elenitskiy E.Ya.* (2016). Boundary value problem for branching type flexible compound structures, *Structural Mechanics of Engineering Construction and Building*, №6, p.73-80.

ANALYTICAL SOLUTION FOR BEAM STRUCTURE WITH ELASTO-PLASTIC PROPERTIES OF MATERIAL

E.YA. ELENITSKIY
LTD «Globaltanksengineering» , *Samara, Russia*

The differential equations are received and the new exact solution of a problem for a rectangular cross section and flat statically determination beam structure at action of longitudinal and transvers loadings is constructed. Three characteristic areas of the beam, distinguished by schemes of position of elastic core section were considered. All the components of the stress-strain state, borders of elastic-plastic zones are determined. A numerical analysis of linear and nonlinear formulation was presented.

KEY WORDS: elastic-plastic material, elastic core section, longitudinal and transverse bending, equilibrium equations, boundary value problem, beam structure.