

### К ВЫБОРУ РЕШЕТКИ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

М.Н. КИРСАНОВ, д.ф.-м.н., профессор

Национальный исследовательский университет "МЭИ",

111250, Москва, Красноказарменная, 14, c216@ya.ru

Приводятся аналитические решения задачи о прогибе плоской статически определенной фермы с раскосной решеткой. Решение сравнивается с аналогичным для фермы с треугольной решеткой. Преобразования выполнены в системе компьютерной математики Maple, обобщение на произвольное число панелей — методом индукции. Получены асимптотические свойства решений. Выведены формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ферма, решетка фермы, Maple, прогиб

**Постановка задачи.** Проще всего оценить жесткость, прочность и эксплуатационные свойства сооружения, анализируя соответствующие аналитические решения. Альтернативный и наиболее распространенный способ — численный расчет различных вариантов конструкции. При этом полной картины численный анализ не дает, получение же аналитических решений для сооружений с достаточным для полноценного анализа числом параметров в общем случае затруднительно. Современные математические программы (Maple, Mathematica, Maxima) позволяют достаточно легко вывести формулу для прогиба и напряжений в элементах конструкций, например, в фермах, с некоторой определенной конфигурацией, с заданным числом элементов, произвольными размерами, свойствами материала и нагрузками. Вывести же зависимость решения от числа панелей можно лишь обобщая ряд решений задач с различным числом панелей. Это возможно для регулярных периодических схем. Применительно к такой задаче в [1-5] разработан и апробирован на различных конструкциях метод индукции. Этот же метод применяется и в настоящей работе для сравнительного анализа двух ферм с различными типами решеток. В качестве основной рассмотрим симметричную ферму с треугольной решеткой с дополнительными шпренгелями (рис. 1), содержащую  $n$  панелей в половине пролета.

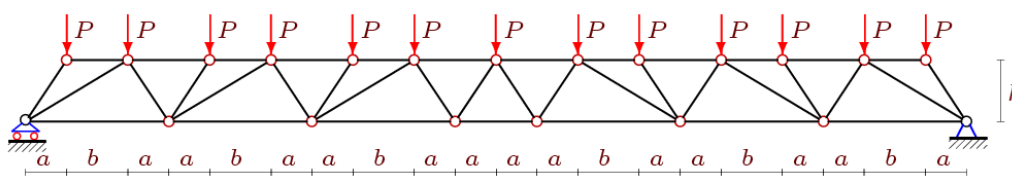


Рис. 1. Ферма 1,  $n=3$

**Вывод формул для прогиба.** Для вывода формулы зависимости прогиба фермы от числа панелей и ее размеров воспользуемся программой [1], рассчитывающей в аналитической форме усилия в стержнях. В программу заложен метод вырезания узлов. Ферма содержит  $6n + 3$  узла и  $m = 12n + 6$  стержней вместе с тремя опорными стержнями. Ввод данных начинается с заданием координат узлов. Нумерация идет слева направо, сначала по нижнему поясу (узлы  $1, \dots, 2n+2$ ), затем по верхнему (узлы  $2n+3, \dots, 6n+3$ ). Имеем следующие координаты нижнего пояса:

$$x_i = c(i-1), y_i = 0, c = 2a + b,$$

$$x_{i+n+1} = c(i+n-1) + 2a, y_{i+n+1} = 0, i = 1, \dots, n+1.$$

Координаты узлов верхнего пояса:

$$\begin{aligned}x_{2i+2n+1} &= a + c(i-1), \quad x_{2i+2n+2} = a + b + c(i-1), \\x_{2i+4n+2} &= c(i+n) + a - b, \quad y_{2i+4n+3} = c(i+n) + a, \quad i = 1, \dots, n, \\y_i &= h, \quad i = 2n+3, \dots, 6n+3.\end{aligned}$$

По аналогии с заданием графа в дискретной математике конфигурация решетки задается специальными векторами, содержащими номера концов стержней. Так, например, нижний пояс задан векторами  $\bar{N}_i = [i, i+1]$ ,  $i = 1, \dots, 2n+1$ , верхний —  $\bar{N}_{i+2n+1} = [i+2n+2, i+2n+3]$ ,  $i = 1, \dots, 4n$ . В программе составляется матрица коэффициентов уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат. Решением системы уравнений получаем в символьной форме усилия в стержнях.

Формула Максвелла-Мора дает выражение для прогиба (вертикальное перемещение среднего узла верхнего пояса) фермы с заданным числом панелей. Последовательный расчет десяти ферм позволяет выявить закономерность образования коэффициентов итоговой формулы. В результате имеем

$$\Delta_1 EF = P \frac{C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 d^3 + C_4 g^3 + C_5 ab^2 + C_6 a^2 b}{2h^2},$$

где  $d = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $g = \sqrt{(a+b)^2 + h^2}$  — длины раскосов,  $EF$  — жесткость стержней, принятая одинаковой для всей фермы. Коэффициенты получены в результате решения рекуррентных уравнений с применением операторов **rgf\_findrecur** и **rsolve** системы Maple:

$$\begin{aligned}C_1 &= (40n^4 + 64n^3 + 44n^2 + 14n + 3) / 3, \\C_2 &= n(5n^3 + 2n^2 + n + 1) / 3, \\C_3 &= 2n^2 - n + 1, \\C_4 &= n(2n + 1), \\C_5 &= n(10n^3 + 8n^2 + 4n + 1), \\C_6 &= n(20n^3 + 24n^2 + 14n + 3).\end{aligned}$$

Первый оператор по данным расчета последовательности ферм возвращает рекуррентное уравнение, второй — его решение. Коэффициенты  $C_1, C_2, C_5, C_6$  удовлетворяют уравнению шестого порядка

$$K_1 = 5K_{n-1} - 10K_{n-2} + 10K_{n-3} - 5K_{n-4} + K_{n-5}$$

с различными начальными условиями, остальные коэффициенты — уравнению

$$K_1 = 3K_{n-1} - 3K_{n-2} + K_{n-3}.$$

Аналогично выводится формула для прогиба фермы сравнения с более простой и распространенной на практике треугольной решеткой (рис. 2). Ферма содержит  $4n + 3$  узлов и  $m = 8n + 6$  стержней вместе с тремя опорными.

Прогиб имеет вид: 
$$\Delta_2 EF = P \frac{C_7 f^3 + C_8 f^3}{16h^2},$$

где  $f = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ ,  $C_7 = (20n^4 + 40n^3 + 34n^2 + 14n + 3) / 3$ ,  $C_8 = 2n^2 + 2n + 1$ .

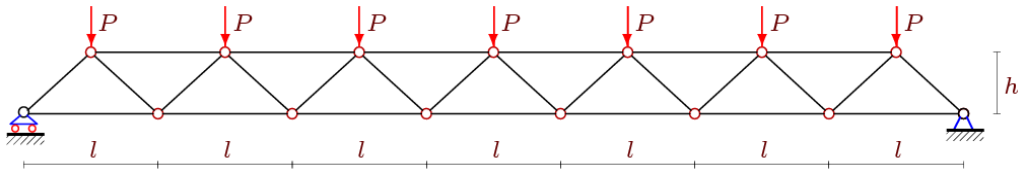


Рис. 2. Ферма 2,  $n=5$

На рисунке 3 приведены кривые прогиба для обеих ферм при длине пролета  $L = (2n + 1)l = (6n + 2)a$ . Для фермы 1 принято  $a = b$ . Графики построены при  $L = 40\text{ м}$ ,  $h = 3\text{ м}$ . Введена относительная величина  $\bar{\Delta} = \Delta EF / P_s$ , где для фермы 1  $P_s = (4n + 1)P$ , а для фермы 2 —  $P_s = (2n + 1)P$ , так, что суммарная нагрузка и длина пролета в обоих случаях одинаковые. Обе кривые обнаруживают минимум приблизительно при одних и тех же значениях чисел панелей  $n$ . Найденная экстремальная точка отвечает вполне реальным для высоты  $h=3\text{ м}$  значениям длин панелей  $l = 3,6\text{ м}$ ,  $a = 1,2\text{ м}$  и может быть использована в практике для оптимизации жесткости сооружения.

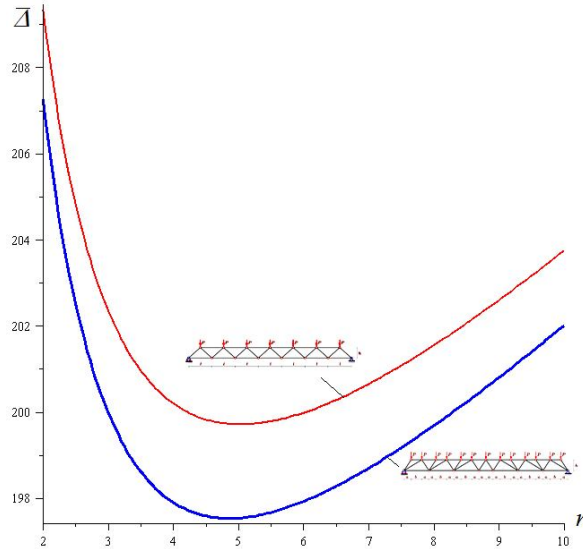


Рис. 3.

**Усилия в критических стержнях и асимптотика.** Одновременно с выводом формулы для прогиба можно получить и аналитические выражения для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях, что необходимо для оценки устойчивости и прочности конструкции. Наиболее растянутый ( $S_1^+$ ) стержень в ферме 1 будет в середине нижнего пояса:

$$S_1^+ = P((4n^2 + 2n + 1)a + n(1 + 2n)b) / (2h),$$

наиболее сжатый — в середине верхнего пояса:

$$S_1^- = -Pn(2n + 1)(2a + b) / (2h).$$

Аналогично получается и в ферме сравнения:

$$S_2^+ = P(2n^2 + 2n + 1)a / (4h), \quad S_2^- = -Pn(n + 1)a / (2h).$$

Аналитическая форма решения позволяет легко получить асимптотику решения для прогибов ферм. Оба решения (как и ранее в ферме 1 принимаем  $a=b$ ) обнаруживают наклонную асимптоту, зависящую только от высоты фермы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Delta} = h / 2 .$$

**Выводы.** Полученные решения для двух ферм выявили, что ферма 1 с дополнительными раскосами имеет несколько большую жесткость по сравнению со стандартной фермой 2 с треугольной решеткой. Экстремальные и асимптотические параметры обеих ферм близки или совпадают. Ранее метод индукции и программа [1] применялись при получении точных решений в задачах о прогибе пространственных [5,6] и плоских [7-11] ферм. Обзоры некоторых аналитических решений для плоских ферм содержатся в [12,13].

#### Л и т е р а т у р а

1. *Кирсанов М. Н.* Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly»//Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
3. *Кирсанов М.Н.* О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы// Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35-44.
4. *Kirsanov M.* An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type// Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. Pp. 14-17.
5. *Кирсанов М.Н.* Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой// Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52-58.
6. *Ершов Л.А.* Формулы для расчета деформаций пирамидального купола// Научный альманах. 2016. N11-2(25). С. 315-318. DOI: 10.17117/na.2016.11.02.315
7. *Ponamareva M.A.* The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load// Science Almanac. 2016. N 4-3(18). Pp. 257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
8. *Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu.* Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12
9. *Voropai R. A.* Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice// Science Almanac. 2016. N 4-3(18). Pp. 238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
10. *Shipaeva A.S.* Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple// Science Almanac. 2016. N 5-3(19). Pp. 236-239.
11. *Bolotina T. D.* The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). Pp.7-8.
12. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
13. *Куйко Л.К.* Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.

#### R e f e r e n c e s

1. *Kirsanov M. N.* Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. 512 p.
2. *Kirsanov M.N.* Analiticheskij raschet balochnoj fermy s reshetkoj tipa «Butterfly». *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2016. № 4 (267). Pp., 2-5.
3. *Kirsanov M.N.* O vliyaniy naklona podvizhnoj opory na zhestkost' balochnoj fermy. *Vestnik MGSU*. 2016. № 10. Pp. 35-44.
4. *Kirsanov M.* An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*. 2016. Т. 1. № 3. Pp. 14-17.
5. *Kirsanov M. N.* Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
6. *Ershov L.A.* Formuly dlya rascheta deformacij piramidalnogo kupola. *Nauchnyj Al'manah*. 2016. N11-2(25). S. 315-318. DOI: 10.17117/na.2016.11.02.315

7. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load. *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). Pp. 257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
8. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12
9. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice. *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). Pp. 238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
10. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple. *Science Almanac*. 2016. N 5-3(19). Pp. 236-239.
11. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. № 4-3(8). Pp.7-8.
12. Tinkov D.V. Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennyh konstrukcij. *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2015. №5(57). Pp. 66–73.
13. Kijko L.K. Analiticheskaya ocenka progiba arochnoj fermy pod dejstviem vetrovoj nagruzki. *Nauchnyj vestnik*. 2016. № 1 (7). Pp. 247-254.

### ON THE CHOICE OF THE LATTICE GIRDER

M. N. KIRSANOV, Dr. Sc., Professor

National research University "MPEI", 111250, Moscow, Krasnokazarmennaya, 14, c216@ya.ru

The analytical solution to the problem of deflection of statically determinate flat truss with diagonal bars is obtained. The solution is compared with a similar of the truss with a triangular lattice. Solution is prepared in the system of computer mathematics Maple. The method of induction is used for generalization the solution to an arbitrary number of panels. The asymptotic properties of solutions are found. The formulas for forces in the most compression and tie rods are obtained.

KEY WORDS: truss, lattice, Maple, deflection.

