

Геометрические исследования срединных поверхностей тонких оболочек

**ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
НА ЗАДАННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛАНАХ**

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*  
Российский университет дружбы народов,  
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; E-mail: i.v.ivn@mail.ru

*Современное градостроительство требует создания новых форм конструкций при строительстве общественных зданий, выставочных павильонов, спортивных и промышленных сооружений. В статье рассматриваются возможности построения поверхностей на криволинейных планах, в том числе 4-х, 3-х и 2-х угольных планах с криволинейным контуром. Также рассматривается возможность конструирования поверхностей на аналитических замкнутых контурных кривых с заданием опорных точек.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** формообразование поверхностей, криволинейная система координат, контурные кривые, поверхности на криволинейных планах.

В строительстве, машиностроении и других областях техники широко используются поверхности на криволинейных планах. В большинстве это канонические формы поверхностей [1] – поверхности вращения, цилиндрические и конические поверхности, поверхности зонтичного типа, эллипсоидальные поверхности, поверхности в форме гиперболического гиперboloида. Современные формы архитектурных конструкций все более широко используются в современном градостроительстве [2]. В тоже время формы корпусов автомобилей, самолетов и вертолетов невозможно описать одним общим уравнением. Такие конструкции обычно разбиваются на отдельные криволинейные отсеки, путем вырезания их плоскими сечениями из общей конструкции. В 1960 году Американский ученый Стивен А. Кунс предложил способ задания поверхности двойной кривизны с помощью граничных кривых на четырехугольных планах, получившей его имя (лоскут Кунса - Coons patch, поверхности Кунса). Опубликованный им в 1967 г. препринт “Surfaces for Computer-Aided Design in Space Form” [3] получил широкую известность как «Малая красная книга». Предложенный им аппарат граничных кривых и функций сопряжения дал основу для всех дальнейших исследований в этой области.

Поверхности Кунса используются при создании сложных конструктивных форм, которые не возможно описать единым уравнением: корпуса аэропланов, кораблей, автомобилей и т.п. Разбивая плоскими сечениями сложные поверхностные формы на отсеки, каждый отсек аппроксимируется поверхностью Кунса. В большинстве работ посвященных поверхностям Кунса, рассматриваются вопросы компьютерного моделирования сложных конструктивных форм, обеспечению непрерывности сопряжения отсеков на граница отсеков [4].

Однако, подход к построению поверхностей на опорных кривых четырех и трех угольных планах позволяет создавать новые формы пространственных строительных конструкций, в том числе на криволинейных планах. Эти вопросы были рассмотрены в работах [5-7].

В статье [6] рассматривались вопросы образования модифицированных поверхностей Кунса на наклонных плоских опорных кривых. Некоторые их опорных кривых могут лежать в горизонтальной плоскости. Если все опорные кривые модифицированной поверхности Кунса расположены в горизонтальной плоскости, то поверхность вырождается в плоскость. При этом, в области ограниченной опорными кривыми образуется плоская криволинейная система координат, включающая контурные кривые криволинейного плана. Если задаться

некоторой функцией вертикальной координаты в полученной координатной системе, это дает возможность создавать новые формы поверхностей на криволинейных планах.

Рассмотрим трапециевидный план в плоскости  $xу$  с угловыми точками  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ , соединенными плоскими кривыми  $\rho_1(t_1) \div \rho_4(t_4)$  в той же плоскости (рис. 1). Получим координатную систему, включающую контурные кривые.

Противоположные линии контура параметризуем через общие параметры

$u, v \in (0,1)$  по формулам

$$u_i = t_i(u) = t_{iH}(1-u) + t_{iK}u, \quad i = 1, 3;$$

$$v_j = t_j(v) = t_{jH}(1-v) + t_{jK}v, \quad j = 2, 4. \quad (1)$$

Векторное уравнение трапециевидного криволинейного плана, получим в виде:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + \mathbf{r}_2(u, v), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{r}_1(u, v) = \rho_1(t_1(u))(1-v) + \rho_3(t_3(u))v;$$

$$\mathbf{r}_2(u, v) = \rho_2(t_2(v))(1-u) + \rho_4(t_4(v))u.$$

Очевидно:  $\mathbf{r}(u, 0) = \rho_1(u)$ ;  $\mathbf{r}(u, 1) = \rho_3(u)$ ;  $\mathbf{r}(0, v) = \rho_4(v)$ ;  $\mathbf{r}(1, v) = \rho_2(v)$ .

На рис. 2 приведены координатные системы 4-х угольных планов, включающие заданные контурные кривые:

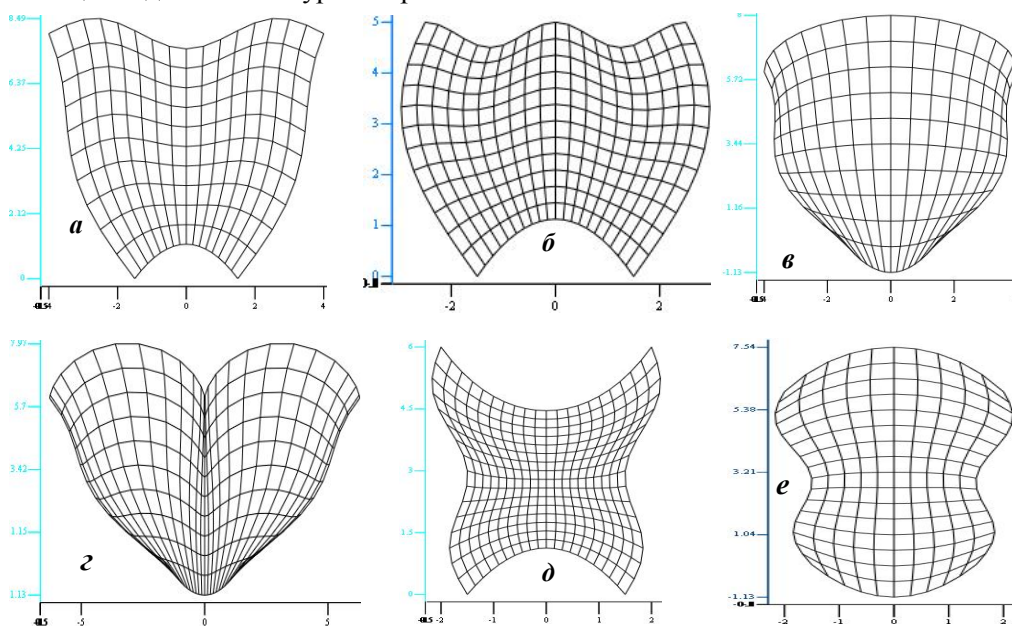


Рис. 2. Координатные системы на криволинейных симметричных трапециевидных планах

а) опорные кривые: 1 - парабола с вершиной внутрь плана; 2, 4 - синусоиды на две полуволны; 3 - синусоида на три полуволны;

б) опорные кривые: 1 - парабола с вершиной внутрь плана; 2, 4 - синусоиды на одну полуволну; 3 - косинусоида на четыре полуволны;

в) опорные кривые: 1 - парабола с вершиной из плана; 2, 4 - синусоиды на две полуволны; 3 - полуэллипс;

г) опорные кривые: 1 - парабола с вершиной из плана; 2, 4 - синусоиды на две полуволны; 3 - двойная циклоида;

д) опорные кривые: 1, 3 - параболы с вершинами внутрь плана; 2, 4 - синусоиды на три полуволны;

е) опорные кривые: 1, 3 - параболы с вершинами из плана; 2, 4 - синусоиды на три полуволны

Задавая функцию  $z(u, v)$  получаем уравнение поверхности на заданном криволинейном плане:

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + z(u, v)\mathbf{k} . \quad (3)$$

Функцию  $z(u, v)$  можно задавать, в частности, независимыми функциями координат  $u, v$  -  $\varphi(u)$  и  $\psi(v)$ , и их комбинациями:  $z(u, v) = \varphi(u)$ ,  $z(u, v) = \psi(v)$ ,  $z(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$ ,  $z(u, v) = \varphi(u)\psi(v)$  и др.

На рис. 3 построены поверхности на трапецевидном плане, соответствующем рис. 2, б, с функциями  $\varphi(u) = a \sin(\pi u)$ ;  $\psi(v) = b(0,5 - v)^2$ , варианты:

а)  $z(u, v) = \varphi(u)$ ,  $a = 1$ ; б)  $z(u, v) = \psi(v)$ ;  $b = -4$ ;

в)  $z(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$ ,  $a = 1$ ;  $b = -2$ ; г)  $z(u, v) = \varphi(u)\psi(v)$ ;  $a = 1$ ;  $b = -2$ ;

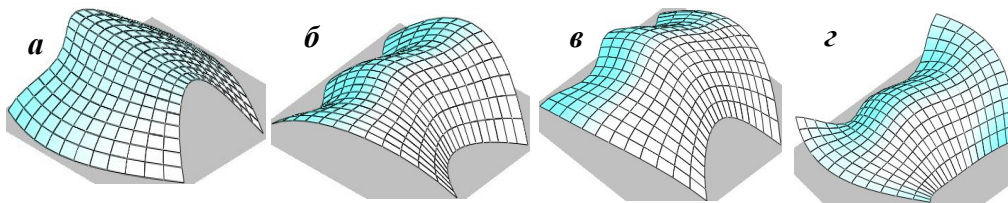
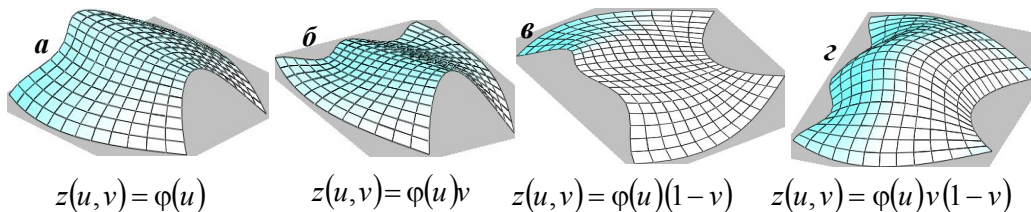


Рис. 3. Варианты поверхностей на криволинейном плане  $\varphi(u) = a \sin(\pi u)$ ;  $\psi(v) = b(0,5 - v)^2$

Так как система координат в плоскости криволинейная, координатные линии на поверхности - пространственные кривые, в том числе, в общем случае и контурные кривые. В случае, когда функция координаты  $z$  является функцией одного аргумента (варианты а, б), то две опорные кривые являются плоскими кривыми и лежат в плоскости криволинейного плана.

Пространственные контурные кривые можно сделать плоскими (в горизонтальной плоскости), если функцию  $z(u, v)$  домножить на множители:  $u$  - 4-я контурная кривая будет плоской;  $(1-u)$  - 2-я контурная кривая плоская;  $v$  - 1-я контурная кривая плоская;  $(1-v)$  - 3-я контурная кривая плоская.

На рис. 4 поверхности на аналогичном плане и функцией  $\varphi(u) = a \sin(\pi u)$ :



$$z(u, v) = \varphi(u) \quad z(u, v) = \varphi(u)v \quad z(u, v) = \varphi(u)(1 - v) \quad z(u, v) = \varphi(u)v(1 - v)$$

Рис. 4. Варианты поверхностей на криволинейном плане  $\varphi(u) = a \sin(\pi u)$

Если функцию вертикальной координаты задать в виде суммы функций от координат  $u$  и  $v$ , то, варьируя горизонтальные и пространственные контурные кривые, можно получить 15 вариантов поверхности.

В предыдущих примерах поверхности строились на симметричном трапецевидном плане. Как и в случае поверхностей Кунса опорные точки плана

можно смещать [5, 6], получая план в виде произвольного четырехугольник, параллелограмма, а совмещая опорные точки получаем поверхность на треугольном или двухугольном (опорные точки на одной прямой) криволинейных планах.

На рис. 5 поверхности на аналогичном плане и функцией  $\psi(v) = a \sin(\pi v)$ .

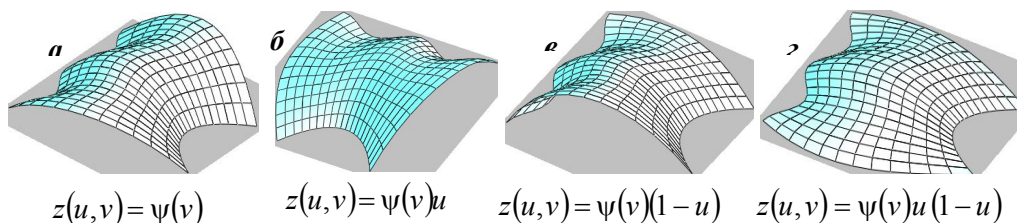


Рис. 5. Варианты поверхностей на криволинейном плане  $\psi(v) = a \sin(\pi v)$

На рис. 6 поверхности с синусоидальными функциями вертикальной координаты на пять полуволн:  $\varphi(u) = a \sin(5\pi u)$ ,  $\psi(v) = b \sin(5\pi v)$ ;

$$\omega(u, v) = \varphi(u) + \psi(v); \quad z(u, v) = \omega(u, v)u(1 - u)v(1 - \alpha v).$$

Рис. 6, а-в  $\alpha=0$  - 3-я опорная кривая пространственная линия; рис. 6, г-з  $\alpha=1$  - все опорные кривые - плоские, в горизонтальной плоскости. Планы опорных точек: а) прямоугольный; б) параллелограммовидный; в) 4-х угольный с одним прямым углом; г-е) треугольные планы; ж-з) опорные точки на одной прямой.

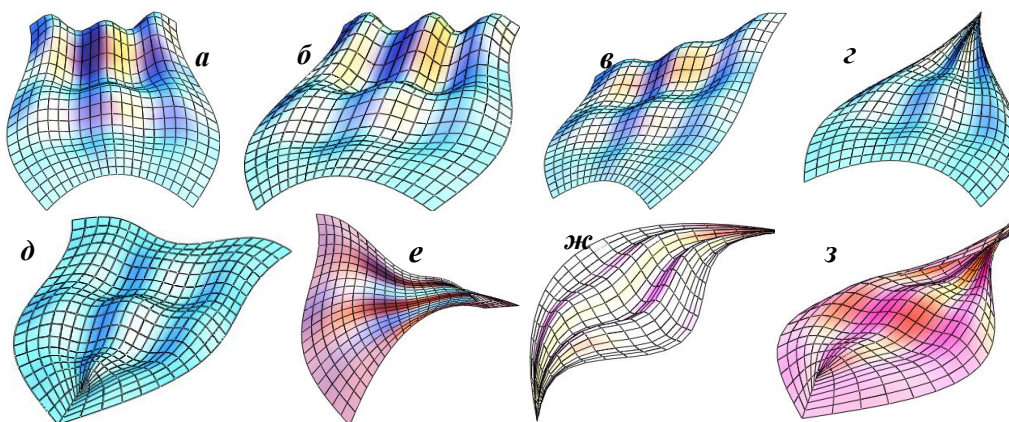


Рис. 6. Поверхности с вариантами планов опорных точек

На рис. 6, г 3-я и 4-я опорные точки совмещены на оси симметрии прямоугольного плана; рис. 6, д 1-я и 2-я опорные точки совмещены на оси симметрии прямоугольного плана; рис. 6, е 2-я и 3-я опорные точки совмещены на оси симметрии прямоугольного плана. Рис. 6, ж - 4-я и 3-я опорные точки совмещены с 1-й и 2-й точками соответственно на одной прямой.. Рис. 6, з - 2-я и 4-я опорные точки совмещены со 1-й и 3-й точками соответственно на одной прямой на диагонали прямоугольного плана.

На рис. 7 показана возможность построения поверхностей на круговом плане. На окружности устанавливаются опорные точки. Контурными кривыми являются отрезки окружности между опорными точками. На рис. 7, а, б опорные точки образуют прямоугольный план. На рис. 7, в опорные точки попарно совмещены.

Функция вертикальной координаты  $z(u, v) = \omega(u, v)u(1-u)v(1-v)$  - контурные кривые в горизонтальной плоскости,  $\omega(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$ ,  $z(u, v) = \omega(u, v)u(1-u)v(1-v)$ .

Положение опорных точек определяется радиусом с направляющим углом  $\theta$  от оси симметрии прямоугольного плана (ось  $x$ ):

- а)  $\theta = 0,25\pi$ , опорные точки на квадратном плане;
- б)  $\theta = 0,15\pi$  - прямоугольный план;
- в)  $\theta = 0,15\pi$  - две опорных точки, контурные кривые две полуокружности.

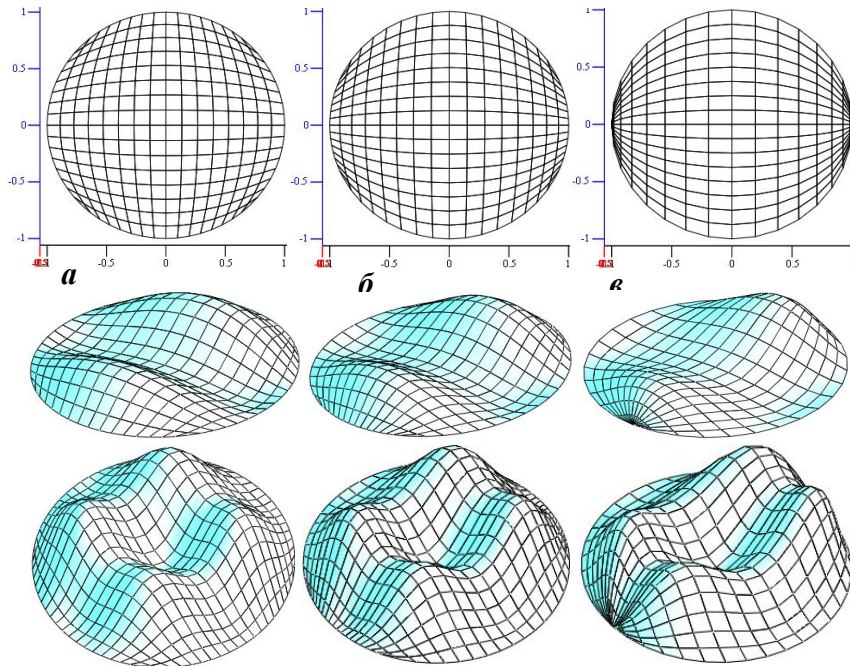


Рис. 7. Поверхности на круговом плане

На рис. 7 в верхнем ряду приведены координатные системы на круговых планах, в нижних рядах общий вид поверхностей. В среднем ряду функции:  $\varphi(u) = a \sin(3\pi u)$  - синусоида на три полуволны,  $\psi(v) = b(0,5 - v)^2$  - парабола.

В нижнем ряду поверхности с функциями вертикальной координаты:  $\varphi(u) = a(1 - \cos 2\pi u)$ ;  $\psi(v) = a(1 - \cos 2\pi v)$ .

Аналогично можно формировать поверхности на других замкнутых кривых, используя опорные точки.

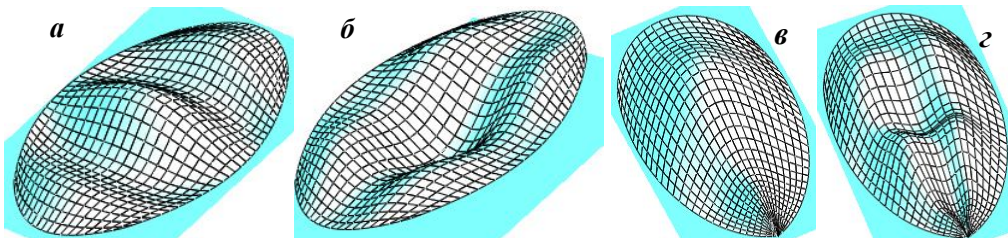


Рис. 8. Поверхности на эллипсоидальном плане

На рис. 8 представлены поверхности на эллипсоидальном плане: а, б - с четырьмя симметричными опорными точками (прямоугольный план

опорных точек);  $v, z$  – с тремя опорными точками (равнобедренный треугольный план опорных точек). На рис. 8,а,б – синусоидальные функции вертикальной координаты:  $\varphi = \sin p\pi u$ ;  $\psi = \sin t\pi v$ ; а -  $p=5, t=1$ ; б -  $p=3, t=3$ . На рис. 8,в,г – косинусоидальные функции:  $\varphi(u) = a(1 - \cos p\pi u)$ ;  $\psi(v) = a(1 - \cos t\pi v)$ ; в -  $p=3, t=2$ ; г -  $p=5, t=4$ .

Отметим, что координатная система на замкнутых кривых, отличается от полярной координатной системы круга или параметрической системы координат эллипсоидального плана.

#### Л и т е р а т у р а

1. S.N. Krivoshapko, V.N. Ivanov. Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
2. Иванов В.Н., Тхома Анамария. Новые формы пространственных конструкций// О строительных конструкциях типа оболочек / Материалы международной студенческой конференции, Москва, 23 ноября 2012 г.: пленарный доклад. М.: Изд-во МГАКХиС, 2013. – С. 101—106.
3. Steven A. Coons. Surfaces for Computer-Aided Design in Space Form. - Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA, 1967.
4. G. Farin. Curves and surfaces for CAGD. 5th ed. – Academic Press, 2002.
5. Иванов В.Н. Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – № 4. – С. 5-10.
6. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование модифицированных поверхностей Кунса// Вестник Российского университета дружбы народов. – Сер.: Инженерные исследования. – 2011. – № 2. – С. 85—90.
7. Иванов В.Н, Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций (Визуализация поверхностей в системах MathCad и AutoCad): Монография. – М.: Изд-во АСВ, 2016. – 412 с.

#### References

1. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
2. Ivanov, V.N., Тхома Анамария (2013). New forms of the space structures, *On Building Structures of the Shell Type: Materials of the International student conference*, Moscow, November 23, 2012, М.: Izd-vo MGAKHIS, 101—106.
3. Steven A. Coons (1967). *Surfaces for Computer-Aided Design in Space Form*. Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA.
4. G. Farin (2002). *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press.
5. Ivanov, V.N. (2007). Architectural compositions on the base of Coons surfaces, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, 5—10.
6. Ivanov, V.N. (2011). Geometry and forming of the Coons surfaces, *Vestnik RUDN; Ser.: Ingenierie Issledovaniya*, № 2, 85—90.
7. Ivanov, V.N., Romanova, V.A. (2016). *Design of the Forms of Space Structures (Visualizations of the surfaces at MathCad and AutoCad)*: Monograph, Moscow: Izd-vo ASV, 412 p.

#### THE FORMING OF THE SURFACES ON THE CURVED COUNTER PLANES

V.N. Ivanov

RUDN University, Moscow, Russia

The article concerns the questions of the forming of the space thin walled structures on curvilinear planes. They may be used for constructions of the social buildings, exhibition, on sport structures. This method may be used for forming surfaces at 4, 3 and 2-angle plans with curvilinear supporting contour lines and on the planes of closed curves as circle or ellipse as well.

KEY WORDS: supporting curves, supporting points, curved counter planes, forming of the surfaces on the curved planes.