

Расчет и проектирование строительных конструкций

УДК 624.04

**ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСЛОЙНОЙ БАЛКИ
В РЯДАХ ФУРЬЕ**

Р.А. ТУРУСОВ, д-р физ.-мат. наук, профессор,

В.И. АНДРЕЕВ, д-р техн. наук, профессор,

Н.Ю. ЦЫБИН, аспирант

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,

129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; rob-turusov@yandex.ru

В статье получено решение задачи об изгибе шарнирно-опёртой многослойной балки под действием нормальной равномерно-распределенной нагрузки и вынужденных продольных усилий. Взаимодействие слоев осуществляется с помощью контактного слоя, в котором происходит межмолекулярное взаимодействие вещества адгезива с субстратом. Предполагается, что контактный слой является анизотропной средой, представляющей массив коротких упругих стерженьков – связей, не контактирующих между собой. Метод контактного слоя позволяет решать задачи определения концентрации касательных напряжений, возникающих на границах между слоями и в угловых точках, их изменение, например, в процессе ползучести, а также определять физические характеристики контактного слоя на основе экспериментальных данных.

На основе исходных дифференциальных уравнений получено решение в виде разложения в ряды Фурье по синусам для общего случая многослойной балки. Приведен пример расчета трехслойной балки. Проанализирована сходимость полученного решения в зависимости от числа учитываемых членов разложения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: композит, многослойная балка, изгиб, ряды Фурье, краевой эффект, метод контактного слоя, разрешающие уравнения.

Исходная система уравнений

Исходная система дифференциальных уравнений, полученная в [1] для задачи изгиба многослойной балки (рис. 1), записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} D_k \frac{d^4 v_k}{dx^4} &= e_k^- b g_k^* \left(\frac{N_k + N_{f,k}}{B_k} - \frac{N_{k-1} + N_{f,k-1}}{B_{k-1}} + \frac{d^2 v_k}{dx^2} e_k^- + \frac{d^2 v_{k-1}}{dx^2} e_{k-1}^+ \right) + \\ &+ e_k^+ b g_{k+1}^* \left(\frac{N_{k+1} + N_{f,k+1}}{B_{k+1}} - \frac{N_k + N_{f,k}}{B_k} + \frac{d^2 v_{k+1}}{dx^2} e_{k+1}^- + \frac{d^2 v_k}{dx^2} e_k^+ \right) - \\ &\quad - e_k^* b (v_k - v_{k-1}) + e_{k+1}^* b (v_{k+1} - v_k) + q_k; \\ \frac{d^2 N_k}{dx^2} &= g_k^* b \left(\frac{N_k + N_{f,k}}{B_k} - \frac{N_{k-1} + N_{f,k-1}}{B_{k-1}} + \frac{d^2 v_k}{dx^2} e_k^- + \frac{d^2 v_{k-1}}{dx^2} e_{k-1}^+ \right) - \\ &\quad - g_{k+1}^* b \left(\frac{N_{k+1} + N_{f,k+1}}{B_{k+1}} - \frac{N_k + N_{f,k}}{B_k} + \frac{d^2 v_{k+1}}{dx^2} e_{k+1}^- + \frac{d^2 v_k}{dx^2} e_k^+ \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В уравнения (1): v_k , N_k – перемещение и соответственно продольная сила в слое k ; D_k , B_k – приведенные жесткость на изгиб и сжатие слоя k определяемые из выражений:

$$B_k = \int_{F_k} E_k dF_k; \quad D_k = \int_{F_k} E_k y_k^2 dF_k;$$

E_k – модуль Юнга слоя k ; b – ширина балки; e_k^-, e_k^+ – расстояние от верхней и нижней грани слоя k до нейтральной оси соответственно,

$$e_k^- = \frac{\int_0^{h_k} E_k(\xi_k) \xi_k d\xi_k}{\int_0^{h_k} E_k(\xi_k) d\xi_k}; \quad e_k^+ = h_k - e_k^-;$$

ξ_k – переменная, отсчитываемая от верхней грани слоя k ; h_k – толщина слоя k ; g_k^*, e_k^* – приведенная жесткость контактного слоя k на сдвиг и сжатие:

$$g_k^* = \frac{G_k^*}{h_k^*}; \quad e_k^* = \frac{E_k^*}{h_k^*}.$$

Все величины, относящиеся к контактному слою, отмечены символом *.

$N_{f,k}$ – вынужденные усилия в слое k , обусловленные наличием предварительного натяжения, действием температуры и т.д. Пример с учетом данных усилий можно найти, например, в работах [2 – 5]; q_k – нормальная равномерно-распределенная нагрузка в слое k .

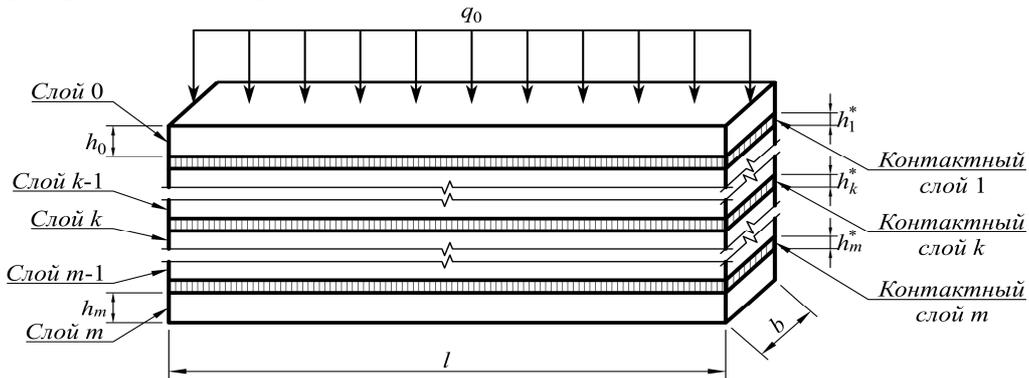


Рис. 1 Модель многослойной балки

Из системы уравнений (1) путем подстановки $k = 0 \dots m$, где $m + 1$ – число слоев, можно получить частные случаи разрешающих уравнений.

Граничные условия

Будем рассматривать шарнирно-опёртую балку (рис. 2), граничные условия для которой записываются в виде:

$$v_k(0) = v_k(l) = \frac{d^2}{dx^2}[v_k(0)] = \frac{d^2}{dx^2}[v_k(l)] = N_k(0) = N_k(l) = 0. \quad (2)$$

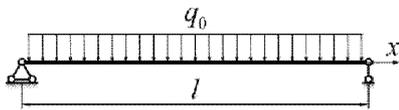


Рис. 2 Расчетная схема

Для данных граничных условий решение системы уравнений (1) можно получить в виде разложения в ряды Фурье по синусам, так как в этом случае все граничные условия будут удовлетворены.

Разложение исходных функций в ряды Фурье

В общем случае разложение произвольной функции в ряд Фурье по синусам с периодом $T = l$ на интервале $x = 0 \dots l$ записывается в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(\lambda_n x), \quad (3)$$

где $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$. Таким образом получим:

$$\left. \begin{aligned} v_k &= \sum_{n=1}^{\infty} v_k^n \sin(\lambda_n x); \frac{d^2 v_k}{dx^2} = -\lambda_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} v_k^n \sin(\lambda_n x); \frac{d^4 v_k}{dx^4} = \lambda_n^4 \sum_{n=1}^{\infty} v_k^n \sin(\lambda_n x); \\ N_k &= \sum_{n=1}^{\infty} N_k^n \sin(\lambda_n x); \frac{d^2 N_k}{dx^2} = -\lambda_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} N_k^n \sin(\lambda_n x). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поперечную нагрузку и вынужденные усилия также необходимо разложить в ряды Фурье

$$\left. \begin{aligned} q_k &= \sum_{n=1}^{\infty} q_k^n \sin(\lambda_n x); \\ N_{f,k} &= \sum_{n=1}^{\infty} N_{f,k}^n \sin(\lambda_n x), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$q_k^n = \frac{2q_k}{l} \int_0^l \sin(\lambda_n x) dx = \frac{4q_k \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi \cdot n};$$

где

$$N_{f,k}^n = \frac{2N_{f,k}}{l} \int_0^l \sin(\lambda_n x) dx = \frac{4N_{f,k} \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}.$$

Преобразование исходной системы уравнений

Подставим выражения (4) и (5) в систему уравнений (1). После преобразований получим систему из двух разрешающих алгебраических уравнений для слоя k :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k,k-1}^n v_{k-1}^n + \beta_{k,k-1} N_{k-1}^n + \alpha_{k,k}^n v_k^n + \beta_{k,k} N_k^n + \alpha_{k,k+1}^n v_{k+1}^n + \beta_{k,k+1} N_{k+1}^n &= F_k^n; \\ \xi_{k,k-1}^n v_{k-1}^n + \psi_{k,k-1} N_{k-1}^n + \xi_{k,k}^n v_k^n - \psi_{k,k}^n N_k^n + \xi_{k,k+1}^n v_{k+1}^n + \psi_{k,k+1} N_{k+1}^n &= f_k^n, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

в которой

$$\alpha_{k,k-1}^n = e_{k-1}^+ e_k^- g_k^* \lambda_n^2 - e_k^*; \beta_{k,k-1} = \frac{e_k^- g_k^*}{B_{k-1}};$$

$$\alpha_{k,k}^n = \frac{D_k}{b} \lambda_n^4 + \lambda_n^2 \left[(e_k^-)^2 g_k^* + (e_k^+)^2 g_{k+1}^* \right] + e_k^* + e_{k+1}^*; \beta_{k,k} = \frac{1}{B_k} (e_k^+ g_{k+1}^* - e_k^- g_k^*);$$

$$\alpha_{k,k+1}^n = e_{k+1}^- e_k^+ g_{k+1}^* \lambda_n^2 - e_{k+1}^*; \beta_{k,k+1} = -\frac{e_k^+ g_{k+1}^*}{B_{k+1}};$$

$$F_k^n = \frac{q_k^n}{b} + e_k^- g_k^* \left(\frac{N_{f,k}^n}{B_k} - \frac{N_{f,k-1}^n}{B_{k-1}} \right) + e_k^+ g_{k+1}^* \left(\frac{N_{f,k+1}^n}{B_{k+1}} - \frac{N_{f,k}^n}{B_k} \right);$$

$$\xi_{k,k-1}^n = g_k^* \lambda_n^2 e_{k-1}^+; \psi_{k,k-1} = \frac{g_k^*}{B_{k-1}};$$

$$\xi_{k,k}^n = \lambda_n^2 (g_k^* e_k^- - g_{k+1}^* e_k^+); \psi_{k,k}^n = -\frac{\lambda_n^2}{b} - \frac{1}{B_k} (g_k^* + g_{k+1}^*);$$

$$\xi_{k,k+1}^n = -g_{k+1}^* \lambda_n^2 e_{k+1}^-; \psi_{k,k+1} = \frac{g_{k+1}^*}{B_{k+1}}; f_k^n = g_k^* \left(\frac{N_{f,k}^n}{B_k} - \frac{N_{f,k-1}^n}{B_{k-1}} \right) - g_{k+1}^* \left(\frac{N_{f,k+1}^n}{B_{k+1}} - \frac{N_{f,k}^n}{B_k} \right).$$

Система разрешающих уравнений для балки в целом может быть получена из уравнений (6) и представлена в матричной форме для n -го члена разложения следующим образом:

$$[A]_n \cdot [x]_n = [\eta]_n, \quad (7)$$

где $[A]_n$ – матрица коэффициентов размером $2m \times 2m$; $[x]_n$ – вектор неизвестных длиной $2m$; $[\eta]_n$ – вектор приложенных усилий длиной $2m$.

Решением системы уравнений (7) является выражение

$$[x]_n = [\eta]_n \cdot [A]_n^{-1}. \quad (8)$$

В развернутой форме систему (7) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{0,0}^n & \beta_{0,0} & \alpha_{0,1}^n & \beta_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{0,0}^n & \Psi_{0,0}^n & \xi_{0,1}^n & \Psi_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_{k,k-1}^n & \beta_{k,k-1} & \alpha_{k,k}^n & \beta_{k,k} & \alpha_{k,k+1}^n & \beta_{k,k+1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \xi_{k,k-1}^n & \Psi_{k,k-1} & \xi_{k,k}^n & \Psi_{k,k} & \xi_{k,k+1}^n & \Psi_{k,k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{m,m-1}^n & \beta_{m,m-1} & \alpha_{m,m}^n & \beta_{m,m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{m,m-1}^n & \Psi_{m,m-1} & \xi_{m,m}^n & \Psi_{m,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_0^n \\ N_0^n \\ \vdots \\ v_k^n \\ N_k^n \\ \vdots \\ v_m^n \\ N_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0^n \\ f_0^n \\ \vdots \\ F_k^n \\ f_k^n \\ \vdots \\ F_m^n \\ f_m^n \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Стоит заметить, что при вычислении коэффициентов в первых и последних двух строках матрицы $[A]_n$ и вектора $[\eta]_n$ необходимо учесть, что $g_0^* = g_{m+1}^* = e_0^* = e_{m+1}^* = 0$.

Пример расчёта. Модель трехслойной балки. Разрешающие уравнения для трехслойной балки.

В качестве примера расчета рассмотрим трехслойную балку (рис. 3), состоящую из двух внешних слоев углепластика и внутреннего слоя синтактика на основе полых стеклянных микросфер. Подобные конструкции все чаще находят себе применение в авиастроении и машиностроении, где необходимо обеспечить высокую жесткость и прочность, заменяя собой металлы, имея более низкую массу.

Стоит заметить, что слои эпоксидной смолы, скрепляющие субстрат, в данной схеме не учитываются.

В данном случае разрешающая система уравнений (7) примет вид:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{0,0}^n & \beta_{0,0} & \alpha_{0,1}^n & \beta_{0,1} & 0 & 0 \\ \xi_{0,0}^n & \Psi_{0,0}^n & \xi_{0,1}^n & \Psi_{0,1} & 0 & 0 \\ \alpha_{1,0}^n & \beta_{1,0} & \alpha_{1,1}^n & \beta_{1,1} & \alpha_{1,2}^n & \beta_{1,2} \\ \xi_{1,0}^n & \Psi_{1,0}^n & \xi_{1,1}^n & \Psi_{1,1} & \xi_{1,2}^n & \Psi_{1,2} \\ 0 & 0 & \alpha_{2,1}^n & \beta_{2,1} & \alpha_{2,2}^n & \beta_{2,2} \\ 0 & 0 & \xi_{2,1}^n & \Psi_{2,1} & \xi_{2,2}^n & \Psi_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_0^n \\ N_0^n \\ v_1^n \\ N_1^n \\ v_2^n \\ N_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0^n \\ f_0^n \\ F_1^n \\ f_1^n \\ F_2^n \\ f_2^n \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Коэффициенты, входящие в систему уравнений (10), имеют вид:

$$\alpha_{0,0}^n = \frac{D_0}{b} \lambda_n^4 + \lambda_n^2 (e_0^+)^2 g_1^* + e_1^*; \quad \beta_{0,0} = \frac{e_0^+ g_1^*}{B_0}; \quad \alpha_{0,1}^n = e_1^- e_0^+ g_1^* \lambda_n^2 - e_1^*; \quad \beta_{0,1} = -\frac{e_0^+ g_1^*}{B_1};$$

$$\xi_{0,0}^n = -\lambda_n^2 g_1^* e_0^+; \quad \Psi_{0,0}^n = -\frac{\lambda_n^2}{b} - \frac{g_1^*}{B_0}; \quad \xi_{0,1}^n = -g_1^* \lambda_n^2 e_1^-; \quad \Psi_{0,1} = \frac{g_1^*}{B_1};$$

$$\alpha_{1,0}^n = e_0^+ e_1^- g_1^* \lambda_n^2 - e_1^*; \beta_{1,0} = \frac{e_1^- g_1^*}{B_0};$$

$$\alpha_{1,1}^n = \frac{D_1}{b} \lambda_n^4 + \lambda_n^2 \left[(e_1^-)^2 g_1^* + (e_1^+)^2 g_2^* \right] + e_1^* + e_2^*;$$

$$\beta_{1,1} = \frac{1}{B_1} (e_1^+ g_2^* - e_1^- g_1^*); \alpha_{1,2}^n = e_2^- e_1^+ g_2^* \lambda_n^2 - e_2^*; \beta_{1,2} = -\frac{e_1^+ g_2^*}{B_2};$$

$$\xi_{1,0}^n = g_1^* \lambda_n^2 e_0^+; \psi_{1,0} = \frac{g_1^*}{B_0}; \xi_{1,1}^n = \lambda_n^2 (g_1^* e_1^- - g_2^* e_1^+);$$

$$\psi_{1,1}^n = -\frac{\lambda_n^2}{b} - \frac{1}{B_1} (g_1^* + g_2^*); \xi_{1,2}^n = -g_2^* \lambda_n^2 e_2^-; \psi_{1,2} = \frac{g_2^*}{B_2};$$

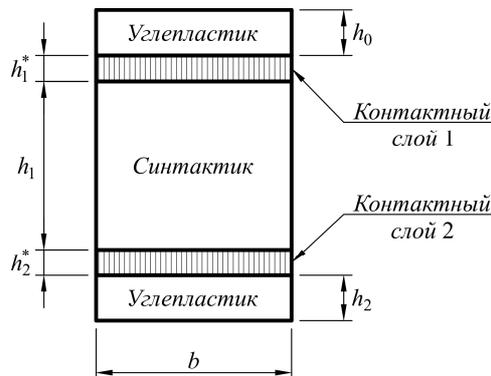


Рис. 3 Модель трехслойной балки

$$\alpha_{2,1}^n = e_1^+ e_2^- g_2^* \lambda_n^2 - e_2^*; \beta_{2,1} = \frac{e_2^- g_2^*}{B_1}; \alpha_{2,2}^n = \frac{D_2}{b} \lambda_n^4 + \lambda_n^2 (e_2^-)^2 g_2^* + e_2^*; \beta_{2,2} = -\frac{e_2^- g_2^*}{B_2};$$

$$\xi_{2,1}^n = g_2^* \lambda_n^2 e_1^+; \psi_{2,1} = \frac{g_2^*}{B_1}; \xi_{2,2}^n = \lambda_n^2 g_2^* e_2^-; \psi_{2,2}^n = -\frac{\lambda_n^2}{b} - \frac{g_2^*}{B_2};$$

$$F_0^n = \frac{q_0^n}{b} + e_0^+ g_1^* \left(\frac{N_{f,1}^n}{B_1} - \frac{N_{f,0}^n}{B_0} \right); f_0^n = -g_1^* \left(\frac{N_{f,1}^n}{B_1} - \frac{N_{f,0}^n}{B_0} \right);$$

$$F_1^n = \frac{q_1^n}{b} + e_1^- g_1^* \left(\frac{N_{f,1}^n}{B_1} - \frac{N_{f,0}^n}{B_0} \right) + e_1^+ g_2^* \left(\frac{N_{f,2}^n}{B_2} - \frac{N_{f,1}^n}{B_1} \right);$$

$$f_1^n = g_1^* \left(\frac{N_{f,1}^n}{B_1} - \frac{N_{f,0}^n}{B_0} \right) - g_2^* \left(\frac{N_{f,2}^n}{B_2} - \frac{N_{f,1}^n}{B_1} \right);$$

$$F_2^n = \frac{q_2^n}{b} + e_2^- g_2^* \left(\frac{N_{f,2}^n}{B_2} - \frac{N_{f,1}^n}{B_1} \right); f_2^n = g_2^* \left(\frac{N_{f,2}^n}{B_2} - \frac{N_{f,1}^n}{B_1} \right).$$

Выражения для n -ых членов разложения функций в ряды Фурье, полученные из системы уравнений (10) весьма громоздки, поэтому здесь не приводятся.

При расчете использованы следующие геометрические и физико-механические характеристики

$$h_0 = h_2 = 2 \text{ мм}; h_1 = 30 \text{ мм}; b = 10 \text{ мм}; E_0 = E_2 = 3.5 \cdot 10^5 \text{ МПа}; E_1 = 2.6 \cdot 10^3 \text{ МПа};$$

$$q = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; l = 500 \text{ мм}; g_1^* = g_2^* = 10^4 \frac{\text{МПа}}{\text{мм}}; e_1^* = e_2^* = 10^4 \frac{\text{МПа}}{\text{мм}}.$$

Модуль Юнга E_1 для синтактика на основе стеклосфер с наполнением 50% получен из результатов испытания на растяжение 5 образцов стержней на испытательной машине MTS insight 100.

Из решения системы (10) определяются перемещения и продольные силы для каждого из слоев. Остальные параметры балки выражаются через них следующим образом

$$M_k = -D_k \frac{d^2 v_k}{dx^2}; \quad Q_k = -D_k \frac{d^3 v_k}{dx^3} + \tau_k^* b e_k^- + \tau_{k+1}^* b e_k^+; \quad (11)$$

$$\varphi_k = \frac{dv_k}{dx}; \quad \tau_1^* = -\frac{1}{b} \frac{dN_1}{dx}; \quad \tau_2^* = \frac{1}{b} \frac{dN_2}{dx}.$$

Исследование сходимости аналитического решения в рядах, по сравнению с численным решением

На рисунках 4, 5 приведены кривые, демонстрирующие погрешность вычисления прогибов в середине балки и касательных напряжений на краю для слоя 1, полученные из решения в рядах, по сравнению с численным решением исходной системы для различного числа учтенных членов разложения [4]. Для остальных параметров кривые имеют аналогичный характер.

Для численного решения исходной системы уравнений использовался метод Рунге-Кутты 5-го порядка с максимально допустимой погрешностью 10^{-8} .

Сходимость данных величин в слое 0 будет проанализирована отдельно, в связи с наличием в них краевых эффектов.

Погрешность вычислялась следующим образом:

$$\delta f(x) = \left| \frac{f_{\text{числ.}}(x)}{f_{\text{ряд.}}(x, n_{\text{max}})} - 1 \right|, \quad (12)$$

где n_{max} – число учитываемых членов разложения.

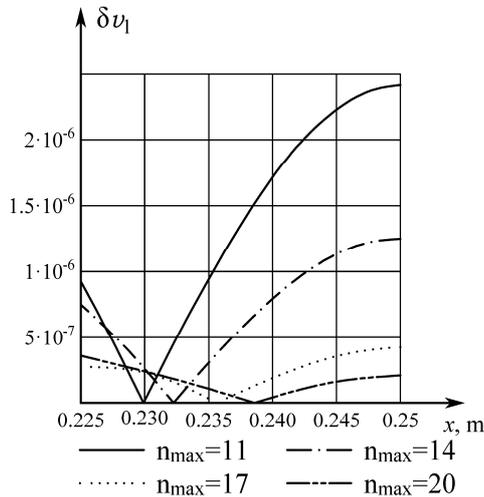


Рис. 4. Погрешность вычисления прогибов

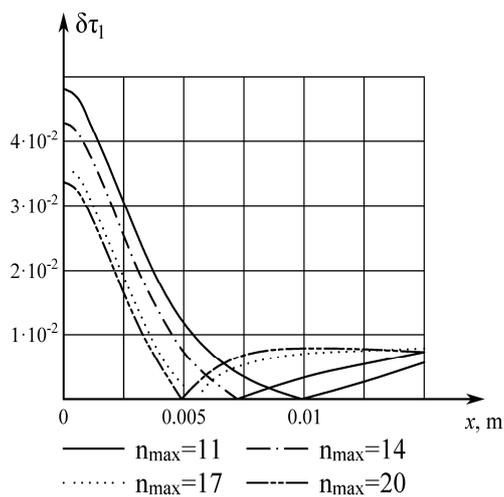


Рис. 5. Погрешность вычисления касательных напряжений в контактном слое

Для слоя 0 произведено отдельное сравнение сходимости моментов и поперечных сил, в связи с тем, что сходимость данных величин в результате возникновения краевого эффекта и, соответственно, существенной нелинейности, намного хуже. На рисунках 6, 7 показаны зависимости, демонстрирующие данный факт.

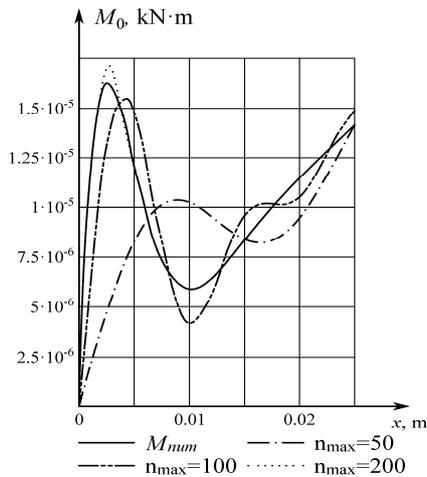


Рис. 6. Эпюры моментов для различного числа членов ряда и численного решения

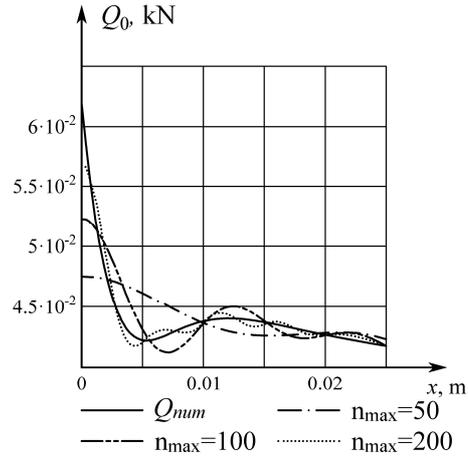


Рис. 7. Эпюры поперечных сил для различного числа членов ряда и численного решения

На рис. 8, 9 приведены нормированные графики, отражающие характер изменения напряженно-деформированного состояния трехслойной балки в слое 1 при 20 учитываемых членах разложения и слое 0 при 500 членах разложения.

Нормирование осуществлялось по следующей формуле:

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{\max[f(x)]} \quad (13)$$

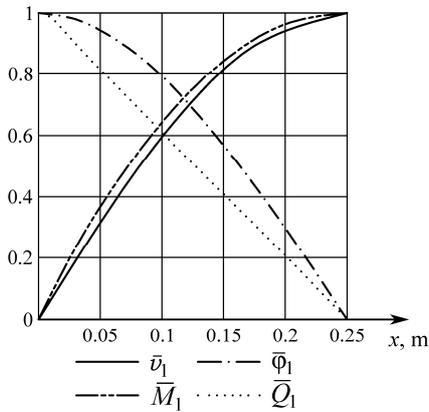


Рис. 8. Перемещения, углы поворота и усилия в слое 1

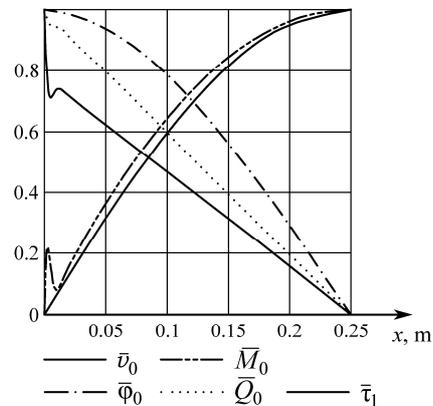


Рис. 9. Перемещения, углы поворота и усилия в слое 0, а также напряжения в контактном слое 1

На представленных графиках не отображены продольные силы в связи с тем, что характер их распределения совпадает с характером распределения моментов.

Заключение

Разработана методика решения задачи об изгибе многослойной-шарнирно опертой балки на основе разложения в ряды Фурье по синусам. Данный метод представлен в матричном виде, в результате чего решение может быть легко получено с использованием современным программных комплексов линейной алгебры.

Стоит заметить, что ряды для перемещений, углов поворота, моментов и продольных сил достаточно быстро сходятся, в результате решение с допустимой погрешностью в 5% можно получить уже при 10 учитываемых членах разложения. Для поперечных сил и касательных напряжений аналогичную погрешность имеет решение со 100 учитываемыми членами разложения. Однако, для анализа напряженно-деформированного состояния в зоне краевого эффекта необходимо рассматривать решения с учетом порядка 200-500 членов разложения в зависимости от условий нагружения модели.

Разработанный метод может использоваться также в задачах ползучести [7,8] для уточнения краевого эффекта.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Определение напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с применением метода контактного слоя// Вестник МГСУ. – 2016. – № 4. – С. 17 — 26.
2. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Напряженное состояние слоистого композита при нормальном отрыве. Часть 1// Научное обозрение. – 2015. – № 24. С. 98-101.
3. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Напряженное состояние слоистого композита при нормальном отрыве. Часть 2// Научное обозрение. – 2015. – № 24. С. 102-106.
4. Турусов Р.А., Маневич Л.И. Метод контактного слоя в адгезионной механике// Одномерные задачи. Клеи. Герметики. Технологии. – 2009. – № 6. – С. 2 — 12.
5. Маневич Л.И., Павленко А.В. Об учете структурной неоднородности композита при оценке адгезионной прочности// Прикладная механика и техническая физика. – 1982. – № 3 (133). – С. 140 — 145.
6. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. Application of the Contact Layer in the Solution of the Problem of Bending the Multilayer Beam// Procedia Engineering. – 2016. – №153. – P. 59 — 65
7. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep// Advanced Materials Research. – 2014. –Vol. 900. – P. 707 — 710.
8. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep// Advanced Materials Research. – 2014. Vol. 1004-1005. – P. 257 — 260.

Поступила в редакцию 13 марта 2017 г. Прошла рецензирование 12 мая 2017 г.

Принята к публикации 14 июня 2017 г.

Об авторах:

ТУРУСОВ РОБЕРТ АЛЕКСЕЕВИЧ родился в 1940 году в г. Москва, окончил Московский физико-технический институт в 1965 году, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26. Область научных интересов: физика и механика композитов и полимеров. E-mail: rob-turusov@yandex.ru

АНДРЕЕВ ВЛАДИМИР ИГОРЕВИЧ родился в 1941 году в г. Москва, окончил Московский физико-технический институт в 1964 году, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов, главный ученый секретарь Ассоциации строительных вузов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26. Область научных интересов: механика неоднородных тел, теория толстых оболочек, E-mail: asv@mgsu.ru

ЦЫБИН НИКИТА ЮРЬЕВИЧ родился в 1992 году в г. Новомосковск, окончил Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет в 2015 году, аспирант кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26. Тема кандидатской диссертации «Определение напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций с применением метода контактного слоя», E-mail: science@nikitatsybin.ru

Для цитирования: Турусов Р.А., Андреев В.И., Цыбин Н.Ю. Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 4. – С. 34 — 42.

DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-34-42

References

1. Andreev, V.I., Turusov, R.A., Tsybin, N.Yu. (2016). Opredeleniye napryazhonno-deformirovannogo sostoyaniya trechslonnoy balki s primeneniym metoda kontaktnogo sloya [The determination of stress-strain state of three-layered beam with application of a method of contact lay]. *Vestnik MGSU*, (4), 17 — 26 (in Russian).
2. Andreev, V.I., Turusov, R.A., Tsybin, N.Yu. (2015). Napryazhonnoye sostoyaniye sloistogo kompozita pri normalnom otryve [Stress state of layered composite with normal take-off]. Part 1. *Nauchnoye obozreniye*, (24), 98 — 101 (in Russian).
3. Andreev, V.I., Turusov, R.A., Tsybin, N.Yu. (2015). Napryazhonnoye sostoyaniye sloistogo kompozita pri normalnom otryve [Stress state of layered composite with normal take-off]. Part 2. *Nauchnoye obozreniye*, (24), 102 — 106 (in Russian).
4. Turusov, R.A., Manevich, L.I. (2009). Metod kontaktnogo sloya v adgezionnoy mekhanike. Odnomernyye zalachi [A method of contact lay in mechanics]. *Klei. Germetiki. Tekhnologii*, (6), 2 — 12 (in Russian).
5. Manevich, L.I., Pavlenko, A.V. (1982). Ob uchete strukturnoy neodnorodnosti kompozita pri ochenke adgezionnoy prochnosti [On taken into consideration a structural non-linearity of composite under evaluation adhesion strength]. *Prikladnaya Mekhanika i Technicheskaya Fizika*, 3 (133), 140 — 145 (in Russian).
6. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. (2016). Application of the Contact Layer in the Solution of the Problem of Bending the Multilayer Beam. *Procedia Engineering*, No 153, 59 — 65.
7. Andreev, V.I., Yazyev, B.M., Chepurnenko, A.S. (2014). On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep. *Advanced Materials Research*, Vol. 900, p. 707— 710.
8. Andreev, V.I., Chepurnenko, A.S., Yazyev, B.M. (2014). Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep. *Advanced Materials Research*, Vol. 1004-1005, pp. 257 — 260.

**GENERAL SOLUTION OF BENDING OF MULTILAYER BEAMS
IN FOURIER SERIES**

R.A. TURUSOV, V.I. ANDREEV, N.Yu. TSYBIN

The article deals with the solution of the problem of bending of a hinged multilayer beam under the normal uniformly distributed load and induced axial forces. The interaction between layers is accomplished by the contact layer in which the substances of adhesive and substrate are mixed. We will consider the contact layer as the transversal anisotropic medium with such parameters that it can be represented as a set of short elastic rods, which are not connected to each other. The solution is obtained in the form of decomposition into Fourier series of sines. There is an example of the calculation of a three-layer beam. The convergence of the obtained solution is analyzed according to the number of accounted members of the decomposition

Article history: Received: March 13, 2017. Revised: May 12, 2017. Accepted: June 14, 2017.

About the authors:

TURUSOV ROBERT ALEKSEEVICH was born in 1940 in Moscow, graduated from the Moscow Institute of Physics and Technology in 1965, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Yaroslavskoe Highway, 26. Area of scientific interests: physics and mechanics of composites and polymers. E-mail: rob-turusov@yandex.ru

ANDREI VLADIMIR IGOREVICH was born in 1941 in Moscow, graduated from the Moscow Institute of Physics and Technology in 1964, Full member of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Strength of Materials Department, Chief Scientific Secretary of the Association of Civil Engineering Universities, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Yaroslavskoe Highway, 26. Scientific interests: theory of thick shells, E-mail: asv@mgsu.ru

TSYBIN NIKITA YURIEVICH was born in 1992 in Novomoskovsk, graduated from the National Research Moscow State University of Civil Engineering in 2015, graduate student of the Department of Strength of Materials, National Research Moscow State Building University, 129337, Moscow, Yaroslavskoe Highway, 26. Theme of the dissertation "Determination of the stress-strain state of multi-layer structures with using contact layer method", E-mail: science@nikitatsybin.ru

For citation:

Turusov R.A., Andreev V.I., Tsybin N.Yu. (2017). General solution of bending of multilayer beams in Fourier series. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (4), 34 — 42

DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-34-42