УДК 539.371: 539.22

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БУБНОВА - ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Г.Л. КОЛМОГОРОВ, *доктор технических наук, профессор.*
Т.Е. МЕЛЬНИКОВА, *кандидат технических наук, доцент.*
Е.О. АЗИНА, *бакалавр техники и технологий.*
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»;
614990, г. Пермь-ГСП, Комсомольский проспект, д. 29, dpm@ pstu.ru

Предложена методика оценки устойчивости анизотропных пластин, основанная на применении метода Бубнова – Галеркина. В качестве примера рассмотрена задача расчета устойчивости ортотропной прямоугольной пластины, шарнирно опертой по контуру, под действием в срединной поверхности сжимающей нагрузки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: анизотропия, устойчивость, пластина, критическая нагрузка, метод Бубнова – Галеркина, сжатие

Конструкционные элементы, выполненные из композиционных материалов, широко применяются в машиностроении, например, авиастроении, космической технике, судостроении. Подобные элементы часто можно представить в форме пластины. Оценка устойчивости в условиях эксплуатации и несущей способности таких конструкционных элементов является актуальной задачей, которая требует учета специфических особенностей поведения при деформировании анизотропных материалов [1-3]. Характерным видом расчетов конструкций из композиционных анизотропных материалов являются расчеты на устойчивость при действии сжимающей нагрузки в срединной поверхности анизотропных пластин [3, 4]. В работе предложена методика расчета на устойчивость при сжатии прямоугольных пластин из ортотропного материала, как частного случая учета анизотропии упругих свойств [2].

В работе [**5**] рассмотрен расчет на устойчивость анизотропной (ортотропной) прямоугольной пластины, свободно опертой по контуру, при действии усилий в плоскости срединной поверхности. Методика расчета при этом основана на применении решения аналогичного решению Навье с использованием двойных тригонометрических рядов [4]. Авторами получены математические соотношения, определяющие условия потери устойчивости ортотропной прямоугольной пластины и позволяющие рассчитать минимальные значения критической нагрузки.

В данной работе приведена методика расчета на устойчивость при сжатии ортотропной прямоугольной пластины с использованием метода Бубнова - Галеркина [6] . При этом учтено, что анизотропный материал пластины в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии [1, 2]. Для описания характеристики упругих свойств ортотропного материала в случае плоского напряженного состояния достаточно знать четыре упругих постоянных материала: $E_x^{'}$, $E_y^{'}$ – аналоги модулей упругости в направлении осей x и y соответственно, $E^{''}$ - упругая постоянная, которая связывает направления x и y, G - модуль сдвига ортотропного материала.

Устойчивость пластины при сложном нагружении определяется поперечной нагрузкой и силами, действующими в плоскости срединной поверхности. Дифференциальное уравнение сложного изгиба анизотропной прямоугольной пластины без учета поперечной нагрузки имеет вид [**5**]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 , \quad (1)$$

где $w(x,y)$ – функция прогибов; $H = D_1 + 2D_{xy}$;

$D_x = \dfrac{E'_x h^3}{12}$, $D_y = \dfrac{E'_y h^3}{12}$, $D_1 = \dfrac{E''h^3}{12}$, $D_{xy} = \dfrac{Gh^3}{12}$ - жесткости при изгибе в соответствующих направлениях; h – толщина пластины; N_x, N_y, N_{xy} – погонные усилия, действующие в срединной поверхности пластины.

Для решения дифференциального уравнения (1) используем приближенный метод решения задач – метод Бубнова – Галеркина, в соответствие с которым искомая функция прогибов задается в виде ряда [6]

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i(x,y), \tag{2}$$

где b_i – неизвестные коэффициенты; $w_i(x,y)$- подходящие функции, удовлетворяющие краевым условиям задачи изгиба прямоугольной пластины под действием сжимающей нагрузки, лежащей в срединной поверхности; n – количество членов ряда.

По методу Бубнова – Галеркина с учетом (1) и (2) должны выполняться равенства:

$$\iint \sum_{i=1}^{n} b_i \left[D_x \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} - \right.$$

$$\left. - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right] w_k \, dx\, dy = 0, \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{3}$$

Применение метода Бубнова – Галеркина позволяет привести уравнения (3) к системе n алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_1\delta_{11} + b_2\delta_{12} + \ldots = 0, \\ b_1\delta_{21} + b_2\delta_{22} + \ldots = 0. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Коэффициенты δ_{ik} ($i = 1,2,\ldots n$; $k = 1,2,\ldots n$) системы (4) определяются следующим интегралом, который рассчитывается по площади пластины:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \iint \left[D_x \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} - \right.$$

$$\left. - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right] w_k \, dx\, dy = 0 \cdot \tag{5}$$

Система уравнений (4) имеет ненулевое решение при условии равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов δ_{ik} [6]. Записав это условие, имеем

$$\det = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = 0. \tag{6}$$

Раскрывая определитель (6), получим уравнение n-ой степени, из решения которого определяются значения критической нагрузки.

В качестве примера применения приведенной методики рассмотрим задачу оценки устойчивости прямоугольной свободно опертой по контуру ортотропной пластины под действием сжимающего усилия N_x. Расчетная схема задачи приведена на рис.1.

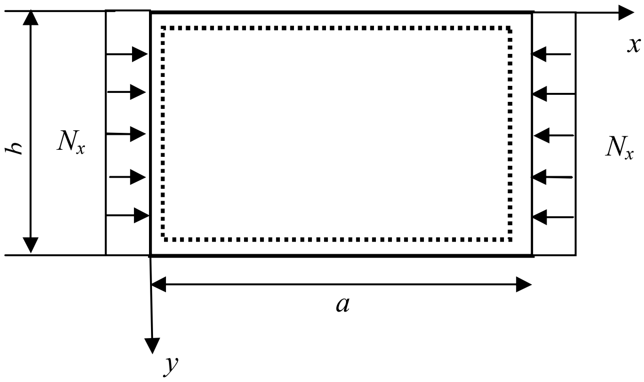

Рис.1. Расчетная схема нагружения пластины

Дифференциальное уравнение (3) с учетом того, что усилие N_x является сжимающим, примет вид

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \qquad (7)$$

Функция прогибов пластины должна удовлетворять граничным условиям свободного опирания по контуру, а именно:

$$w(0, y) = 0; \; w(a, y) = 0; \, w(x, 0) = 0; \, w(x, b) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0; \; \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=a} = 0; \; \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0; \; \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=b} = 0. \qquad (8)$$

В этом случае можно задать функцию $w(x,y)$ в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (9)$$

где m и n – количество полуволн синусоид в направлении x и y при сжатии и потере устойчивости пластины.

Преобразования и вычисления, произведенные с функцией (9) и соответствующие методу Бубнова – Галеркина, приводят к соотношению, определяющему значение нагрузки N_x в следующем виде:

$$N_x = D_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 2H \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + D_y \frac{n^4 \pi^2 a^2}{b^4 m^2}. \qquad (10)$$

В задачах устойчивости актуальным является определение минимальных значений критической нагрузки. Предполагая, что при потере устойчивости пластина деформируется в направлении y в форме, соответствующей одной полуволне синусоиды (n=1), из соотношения (10) определили значение сжимающей нагрузки N_x в виде:

$$N_x = D_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 2H \frac{\pi^2}{b^2} + D_y \frac{\pi^2 a^2}{b^4 m^2}, \qquad (11)$$

Минимальное значение усилия (11) определили из условия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial m} = 0. \qquad (12)$$

Из условия (12) рассчитали значение параметра m, соответствующее минимальному значению N_x, а, следовательно, критическому значению сжимающей нагрузки:

$$m = \sqrt[4]{(D_y a)/(D_x b)}\ . \tag{13}$$

Подставим (13) в (11), получим окончательно выражение для расчета критической нагрузки:

$$N_{kp} = \frac{2\pi^2\left(H + \sqrt{D_x D_y}\right)}{b^2}. \tag{14}$$

Зная характеристики ортотропного материала, используя соотношение (14), можно рассчитать критическую нагрузку при потере устойчивости прямоугольной свободно опертой по контуру ортотропной пластины при сжатии.

В частном случае, при сведении решения, полученного для критической нагрузки при оценке устойчивости ортотропной пластины, к анализу устойчивости изотропной пластины следует принять $D_x = H = D_y = D$ (D – цилиндрическая жесткость изотропной пластины). При этом из (14) получим

$$N_{kp} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}\ . \tag{15}$$

Значение критической нагрузки (15) совпадает с известным решением задачи устойчивости изотропной свободно опертой квадратной пластины [7, 8].

Таким образом, предложена методика определения критической нагрузки при оценке устойчивости анизотропной (ортотропной) пластины с использованием процедуры метода Бубнова - Галеркина. Методика применена для решения задачи устойчивости ортотропной свободно опертой по контуру прямоугольной пластины при сжатии в одном направлении под действием нагрузки, приложенной в срединной поверхности. Сведение полученного решения к задаче устойчивости изотропной пластины показало согласование полученного решения с известным решением задачи устойчивости квадратной свободно опертой по контуру изотропной пластины под действием сжимающей нагрузки, ориентированной в одном направлении.

Список литература

1. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. — 463 с.

2. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов: пер. с англ. – М.: Мир, 1982.—- 334 с.

3. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. — 446 с.

4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки: пер. с англ.- М.: Наука, 1966. — 635 с.

5. *Колмогоров Г.Л., Зиброва Е.О.* Вопросы устойчивости анизотропных пластин// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015, № 2. С. 65 — 69.

6. *Красносельский М.А, Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. — 456 с.

7. *Саргсян А.Е.* Строительная механика. Механика инженерных конструкций: учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2008. — 462 с.

8. *Leissa Arthur W.* A Review of Laminated Composite Plate Buckling// *Appl. Mech. Rev*., 40(5), 1987, p. 575 — 591.

Поступила в редакцию 28 марта 2017 г. Прошла рецензирование 28 апреля 2017 г.
Принята к публикации 14 июня 2017 г.

Об авторах:

КОМОГОРОВ ГЕРМАН ЛЕОНИДОВИЧ, доктор технических наук, профессор кафедры Динамики и прочности машин, Пермский национальный исследовательский университет, 614990, пермский край, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, E-mail: dpm@ pstu.ru

МЕЛЬНИКОВА ТАТЬЯНА ЕВГЕНЬЕВНА, кандидат технических наук, доцент кафедры Динамики и прочности машин, Пермский национальный исследовательский университет, 614990, пермский край, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, E-mail: dpm@ pstu.ru

АЗИНА ЕЛЕНА ОЛЕГОВНА, магистр техники и технологий, кафедра Динамики и прочности машин, Пермский национальный исследовательский университет, 614990, пермский край, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, E-mail: dpm@ pstu.ru

Для цитирования: *Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е., Азина Е.О.* Применение метода Бубнова - Галеркина для оценки устойчивости анизотропных пластин// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 4. – С. 29 — 33.

DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-29-33

References

1. *Lechnitsky, S.G.* (1957). *Anisotropnye Plastinki [Anisotropic Plates]*, M.: Gostechizdat, 463 p.
2. *Kristensen, R.*(1982). *Vvedenie v Mechaniku Kompositov [Introduction in Mechanics of Composites]*, M.: Mir, 334 p. (in Russian).
3. *Vasiljev, V.V.* (1988). *Mechanika Konsruktcij iz Kompositnych Materialov [Mechanics of Structures from Composite Materials]*, M.: Mashinostroenie, 446 p. (in Russian).
4. *Timoshenko, S.P., Vojnovski-Kriger, C.* (1966). *Plastinki i Obolochki [Plates and Shells]*, M.: Nauka, 635 p.
5. *Kolmogorov, G.L., Zibrova, E.O.* (2015). The Sustainability of Anisotropic Plates. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (2), 65 — 69 (in Russian).
6. *Krasnoselskij, M.A., Vajnikko, G.M., Zabrejko, P.P., Rutitskij, JaB, Stetcenko, V.Ja.* (1969). *Priblizgennoe Reshenie Operatornych Uravnenij [Approximate Solution of Operator Equations]*, Moscow: Nauka, 456 p. (in Russian).
7. *Sargsyan, A.E.* (2008). *Stroitelnay Mechanika. Mechanika inginernych Konstruktciy [Structural Mechanics. Mechanics of Engineering Structures]*, Moscow: Vysshaya shkola, 462 p. (in Russian).
8. *Leissa Arthur W.* (1987). A Review of Laminated Composite Plate Buckling, *Appl. Mech. Rev.*, 40(5), 575 — 591.

APPLICATION OF THE BUBNOV-GALERKIN METHOD FOR ASSESSMENT OF STABILITY OF NON-ISOTROPIC PLATES

G.L. KOLMOGOROV, T.E. MELNIKOVA, E.O. AZINA

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

The technique of assessment of stability of non-isotropic plates based on application of the Bubnov-Galerkin method is offered. As an example, the problem of analysis of stability of an orthotropic rectangular plate, by the hinge opera on a contour, under action in a median surface of compression load is considered.

KEW WORDS: anisotropy, stability, plate, critical load, the Bubnov-Galerkin method, compression.

Article history: *Received: March 28, 2017. Revised: April 28, 2017. Accepted: June 14, 2017.*

About the authors:

KOLMOGOROV GERMAN LEONIDOVICH was born in 1940, graduated from the Ural polytechnical institute of S. M. Kirov (Sverdlovsk) in 1962. The Doctor of technical sciences, professor of the department of dynamics and strength of machine in Perm National Research Polytechnic University. He is the author more than 200 publications. The main research areas are: processing of metals pressure, theory of plates and envelopes, static and dynamic stability of structures, mechanic of a deformable solid body, E-mail: dpm@pstu.ru

MELNIKOVA TATIANA EVGENJEVNA was born in 1951, graduated from Perm polytechnic institute in 1974, Ph-doctor of technical sciences, docent of the department of dynamics and strength of machine in Perm National Research Polytechnic University. She is the author of over 80 publications. The main research areas are: processing of metals pressure, theory of plates and shells, static and dynamic stability of structures, mechanic of a deformable solid body, E-mail: dpm@pstu.ru

AZINA ELENA OLEGOVNA was born in 1992, graduated from Perm National Research Polytechnic University in 2016, Bachelor of technique and technologies of the department of dynamics and strength of machine in Perm National Research Polytechnic University. She is the author of the 4 publications. The main research areas are: processing of metals pressure, theory of plates and shells, static and dynamic stability of structures, E-mail: dpm@pstu.ru

For citation: *Kolmogorov G.L., Melnikova T.E., Azina E.O.* Application of the Bubnov-Galerkin method for assessment of stability of non-isotropic plates. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings,* (4), 29—33.

DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-29-33