УДК 514.181.2

ГЕОМЕТРИЯ САМОНЕСУЩИХ ПОКРЫТИЙ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ

С.А. БЕРЕСТОВА*, *д-р ф.-м. наук, профессор*
Н.Е. МИСЮРА*, *старший преподаватель*
Е.А. МИТЮШОВ*, *д-р ф.-м. наук, профессор*
**Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620002, Екатеринбург, ул. Мира,19.*

Приведен алгоритм построения неограниченного множества велароидальных поверхностей теоретически пригодных для формирования самонесущих пространственных конструкций на прямоугольном плане. Дается общий вид уравнения велароидальной поверхности с использованием двух четных функций, удовлетворяющих специальным краевым условиям. Доказывается континуальность мощности множества велароидальных поверхностей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: велароидальные поверхности, самонесущие покрытия, пространственные конструкции.

По классификации работы [1] велароидальными поверхностями называются поверхности переноса на прямоугольном плане, образованные движением образующей переменной кривизны. Велароидальная поверхность ограничена отрезками нулевой кривизны $k_x = 0$, $k_y = 0$. Там же отмечается, что к настоящему времени известны только три велароидальные поверхности – синусоидальный велароид, параболический велароид, эллиптический велароид. Указанные велароидальные поверхности записываются следующими уравнениями:

$$z = f \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \qquad \text{– синусоидальный велароид,}$$

$$z = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}\right) \qquad \text{– параболический велароид,}$$

где a и b – размеры плоского прямоугольного контура в плане, f –максимальный подъем поверхности над плоскостью $z = 0$;

$$z = \sqrt{f^2 - \frac{f^2 - c^2}{a^2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{f^2 - c^2}{a^2} x^2 y^2} \qquad \text{– эллиптический велароид,}$$

где a – полупролеты поверхности в направлении координатных осей x и y, $(f - c)$ – стрела подъема поверхности в ее центре.

Помимо поверхностей на прямоугольном плане к велароидальным также относят поверхности на произвольных планах, в частности кольцевых планах [2-4]. Множество велароидальных поверхностей может быть получено на основании следующей теоремы:

Теорема 1. *Всякая поверхность, заданная уравнением*

$$\bar{r} = \{x, y, f_1(x) f_2(y)\}, \ -a \le x \le a, \quad -b \le y \le b$$

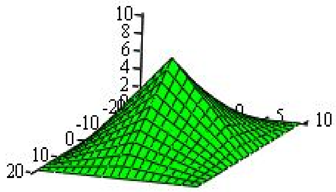
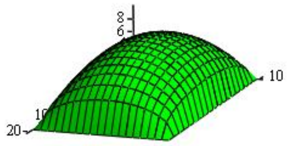
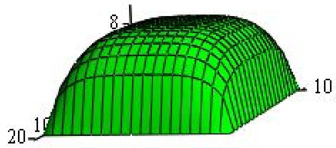
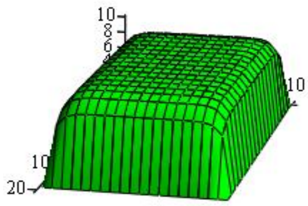
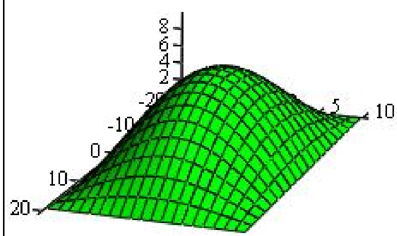
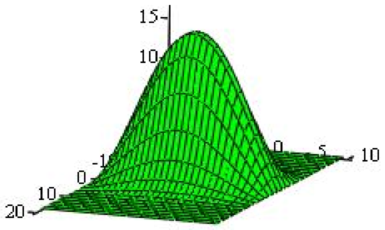
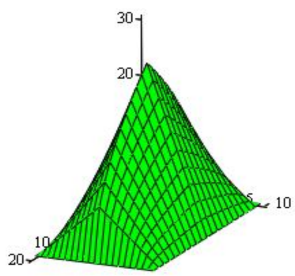
является велароидальной, если $f_1(x)$ *и* $f_2(y)$ *четные функции и выполняется условие* $f_1(-a) = f_1(a) = f_2(-b) = f_2(b) = 0$.

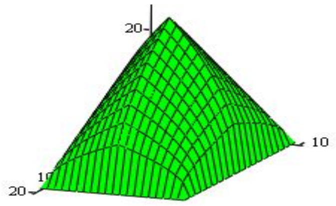
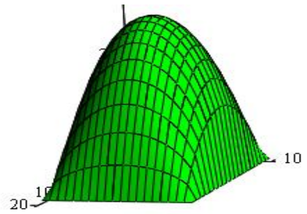
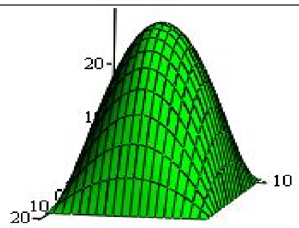
Примеры поверхностей, удовлетворяющих условиям теоремы 1 приведены в табл. 1. Здесь a и b – полупролеты поверхности в направлении координатных осей x и y, h – стрела подъема поверхности в их центре.

Полнота решения задачи о множестве велароидальных поверхностей дается теоремой 2.

Теорема 2. *Мощность множества велароидальных поверхностей – континуум.*

Таблица 1. Поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы 1

	Велороидальные поверхности	Математическая модель
1		$\vec{r}=\left\{x,y,h\left(1-\left\|\frac{x}{a}\right\|\right)\left(1-\left\|\frac{y}{b}\right\|\right)\right\}$
2		$\vec{r}=\left\{x,y,h\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^{2}}\right\}$
3		$\vec{r}=\left\{x,y,h\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{4}}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^{4}}\right\}$
4		$\vec{r}=\left\{x,y,h\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{10}}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^{10}}\right\}$
5		$\vec{r}=\left\{x,y,h\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)\right\}$
6		$\vec{r}=\left\{x,y,h\left[e^{-(\alpha x)^2}-e^{-(\alpha a)^2}\right]\left[e^{-(\beta y)^2}-e^{-(\beta b)^2}\right]\right\}$
7		$\vec{r}=\left\{x,y,h\sqrt{1-\left\|\frac{x}{a}\right\|}\left(1-\left\|\frac{y}{b}\right\|\right)\right\}$

8		$\vec{r}=\left\{x, y, h\sqrt{1-\left\vert\frac{x}{a}\right\vert}\sqrt{1-\left\vert\frac{y}{b}\right\vert}\right\}$
9		$\vec{r}=\left\{x, y, h\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}$
10		$\vec{r}=\left\{x, y, h\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\right\}$

Доказательство этого утверждения следует из того, что каждой велароидальной поверхности, удовлетворяющей условиям теоремы 1, можно поставить в соответствие множество велароидальных поверхностей

$$\vec{r}=\left\{x, y, (f_1(x))^t (f_2(y))^t\right\}, \quad -a \le x \le a, \quad -b \le y \le b, \quad 0 \le t \le 1 .$$

Из континуальности мощности множества $t \in [0,1]$ следует, что мощность множества велароидальных поверхностей совпадает с мощностью множества вещественных чисел, то есть является континуумом.

Пример использования велороидальной поверхности для ахиографического оформления плоских фасадов с использованием законов линейной перспективы был рассмотрен в работе [5].

Список литературы

1. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.

2. *Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л.* Исследование поверхностей велароидального типа с двумя семействами синусоид на кольцевом плане //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4. – С. 9 — 12.

3. *Шамбина С. Л., Непорада В. И.* Велароидальные поверхности и их применение в строительстве и архитектуре// Праці Таврійськ. державн. агротехнол. ун-ту. – 2012. – 53. – No 4. – С. 168 — 173.

4. *Непорада В.И., Баграмян А.Э., У Жуйчен.* Использование велароидальных оболочек в архитектуре на примере проекта многофункционального спортивного комплекса // Международная научно-техническая конференция студентов: Сборник докладов (15 - 19 марта 2010 г.). – С. 225 — 228.

5. *Berestova S.A., Zhilin S.S., Misyura N.E., Mityushov E.A.* A method for modelling an architectural drawing type solution for environmental objects using linear perspective on a flat surface// Mathematical Design & Technical Aesthetics. – 2015. – №1(3) . P. 11 — 23.

Поступила в редакцию 23 марта 2017 г. Прошла рецензирование 12 мая 2017 г. Принята к публикации 14 июня 2017 г.

Об авторах: *БЕРЕСТОВА СВЕТЛАНА АЛЕКСАНДРОВНА родилась в 1972 году в Нижнем Тагиле Свердловской области, окончила УрГУ в 1994 году, доктор физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой теоретической механики Института фундаментального образования, УрФУ им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19. Область науч-*

ных интересов: анизотропия свойств поликристаллических и композиционных материалов, математическое моделирование реальных объектов и процессов. E-mail: s.a.berestova@yandex.ru

МИСЮРА НАТАЛЬЯ ЕВГЕНЬЕВНА родилась в 1976 году в Екатеринбурге, окончила механико - математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова в 1999 году, старший преподаватель кафедры теоретической механики Института фундаментального образования, УрФУ им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19. Область научных интересов: геометрическое моделирование реальных процессов и явлений, разработка инвариантных методов трансформации и формообразования поверхностей.Email: n_misura@mail.ru

МИТЮШОВ ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ родился в 1946 году в Свердловске, окончил УрГУ имени А.М. Горького в 1970 году, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, 630002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. Область научных интересов: математическое моделирование технических систем и процессов. E-mail: mityushov-e@mail.ru

Для цитирования: *Берестова С.А., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А.* Геометрия самонесущих покрытий на прямоугольном плане// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 4. – С. 15 — 18 (DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-15-18).

References

1.*Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N.* (2010). *Encyclopedia of Analytic Surfaces*. Moscow: The Book House "LIBROKOM". 560.

2. *Krivoshapko, S.N., Shambina, S.L.*(2009). Investigation of velaroidal surfaces with two families of sinusoids on the ring plan. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings,*(4), 9—12.

3. *Shambina, S.L., Neporada, V.I.* (2012). Velaroid surfaces and their application in construction and architecture, *Pratzi Tavriysk. Derjavn. Agrotechnol. Un-t,* 53(4). 168 — 173.

4. *Neporada, V.I, Bagramyan, A.E, U. Juichen* (2010). Use of velaroid shells in architecture on the example of the multifunctional sports complex project. *International Scientific and Technical Conference of Students*: Proc. of reports, RUDN, March 15 - 19, 2010. 225 — 228.

5. *Berestova, S.A., Zhilin, S.S., Misyura, N.E., Mityushov, E.A.* (2015). A method for modeling an architectural drawing type solution for environmental objects using linear perspective on a flat surface, *Mathematical Design & Technical Aesthetics,* № 1 (3). 11 — 23.

GEOMETRY OF SELF-BEARING COVERING ON RECTANGULAR PLAN

S.A. BERESTOVA, N.E. MISYURA, E.A. MITYUSHOV

An algorithm for constructing an unlimited set of velaroid surfaces theoretically suitable for the formation of self-supporting spatial structures on ectangular plane is given. The general form of the equation of the velaroidal surface is given using two even functions satisfying special boundary conditions. The continuum capacity of the set of these surfaces is proved.

KEY WORDS: velaroidal surfaces, self-supporting coatings, spatial constructions.

Article history: *Received: March 23, 2017. Revised: May 12, 2017. Accepted: June 14, 2017.*

About the authors: *BERESTOVA SVETLANA ALEKSANDROVNA was born in 1972 in Nizhny Tagil, Sverdlovsk region, graduated from Ural State University named after A.M. Gorky in in 1994, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Theoretical Mechanics of the Institute of Fundamental Education, Ural Federal University named after the first President of Russia BN. Yeltsin, 620002, Ekaterinburg, ul. Mira, 19. Area of scientific interests: anisotropy of the properties of polycrystalline and composite materials, mathematical modeling of real objects and processes.* E-mail: s.a.berestova@yandex.ru

MISYURA N.E. was born in 1976 in Ekaterinburg, graduated from the Mechanics and Mathematics Department of Moscow State University named after *Lomonosov in 1999, senior lecturer of the Department of Theoretical Mechanics of the Institute of Fundamental Education, Ural Federal University named after the first President of Russia BN. Yeltsin, 620002, Ekaterinburg, ul. Mira, 19. Area of scientific interests: geometric modeling of real processes and phenomena, the development of invariant methods of transformation and shaping of surfaces. Email: n_misura@mail.ru*

MITYUSHOV E.A. was born in 1946 in Sverdlovsk, graduated from Ural State University named after A.M. Gorky in 1970, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical Mechanics of the Ural Federal University named after the first President of Russia BN. Yeltsin, 630002, Ekaterinburg, ul. Mira, 19. Area of scientific interests: mathematical modeling of technical systems and processes. E-mail: mityushov-e@mail.ru

For citation: *Berestova S.A, Misyura N.E., Mityushov E.A.* Geometry of self-bearing covering on rectangular plan. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings,* (4), 15 — 18.

DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-15-18