

Численные методы расчета конструкций

К РАСЧЕТУ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ ОБЪЕМНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. П. КИСЕЛЁВ, канд. техн. наук, доцент
Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия

Объемные конечные элементы могут эффективно использоваться при исследовании напряженно-деформированного состояния в зонах пересечения оболочек с различной толщиной стенок. В настоящей работе изложен вывод основных соотношений для ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек в зоне их сопряжения. Для восьми узлового шестигранного конечного элемента на границе сочленения двух оболочек получены соотношения для выражения узловых неизвестных одной оболочки через соответствующие неизвестные другой оболочки. Это позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние оболочек в зоне их сочленения.

Для описания геометрии двух пересекающихся под прямым углом цилиндрических оболочек вводятся две системы координат x, y, z для основной оболочки с радиусом r и толщиной t и x', y', z' для примыкающего патрубка с радиусом r' и толщиной t' ($r > r'$) (рис. 1). Здесь и далее символы без штриха будут относиться к параметрам основной оболочки, со штрихом к патрубку.

Положение произвольных точек основной оболочки и примыкающей, будет определяться в криволинейных системах координат x, θ, r и x', θ', r' радиус-векторами, соответственно для основной оболочки

$$\vec{R} = x\vec{i} + r\sin\theta\vec{j} + r\cos\theta\vec{k} \quad (1)$$

и для примыкающей оболочки

$$\vec{R}' = x'\vec{i}' + r'\sin\theta'\vec{j}' + r'\cos\theta'\vec{k}'. \quad (2)$$

Единичные векторы координатного базиса основной оболочки выражаются через векторы координатного базиса примыкающей оболочки и наоборот, матричными соотношениями

$$\{i\} = [M]\{i'\}; \quad \{i'\} = [M^{-1}]\{i\}, \quad (3)$$

$$\text{где } \{i\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}^T; \quad \{i'\} = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}^T; \quad [M] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad [M^{-1}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Дифференцированием уравнения (1) по криволинейным координатам x, θ, r можно получить ковариантные векторы локального базиса основной оболочки, например, $\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = \vec{R}_{,x} = \vec{i} + r_{,x}\sin\theta\vec{j} + r_{,x}\cos\theta\vec{k}$. Для цилиндрической оболочки $r = \text{const}$, тогда $r_{,x} = 0,0$ и выражения будут иметь вид

$$\vec{a}_1 = \vec{i}; \quad \vec{a}_2 = \vec{R}_{,\theta} = r\cos\theta\vec{j} + r\sin\theta\vec{k}; \quad \vec{a}_n = \vec{R}_{,r} = \sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}, \quad (4)$$

Аналогично и для примыкающей оболочки

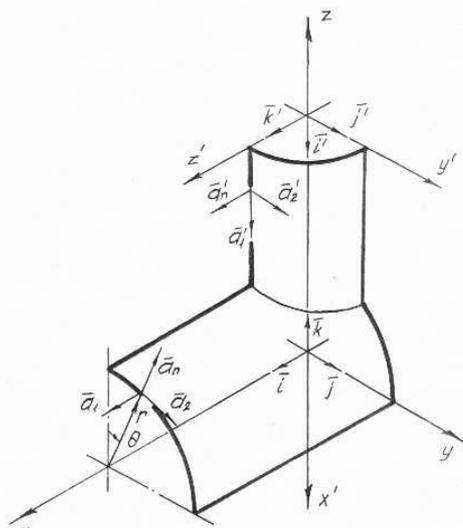


Рис. 1. Пересечение цилиндрических оболочек

$$\bar{a}_1' = \bar{i}'; \quad \bar{a}_2' = \bar{R}_{\theta}' = r' \cos \theta' \bar{j}' + r' \sin \theta' \bar{k}'; \quad \bar{a}_n' = \bar{R}_{r'} = \sin \theta' \bar{j}' + \cos \theta' \bar{k}'. \quad (5)$$

Векторы локального базиса можно выразить через соответствующие векторы координатного базиса

$$\{a\} = [N]\{i\}, \quad (6) \quad \text{и} \quad \{a'\} = [N']\{i'\}, \quad (7)$$

$$\text{где} \quad \{a\} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_n\}; \quad \{a'\} = \{\bar{a}_1', \bar{a}_2', \bar{a}_n'\}$$

$$[N] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r \cos \theta & -r \sin \theta \\ -1 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}; \quad [N'] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r' \cos \theta' & -r' \sin \theta' \\ -1 & \sin \theta' & \cos \theta' \end{vmatrix}.$$

Для зоны примыкания одной оболочки к другой с учетом (3) выражение (7) можно привести к виду

$$\{a'\} = [N'] [M]^{-1} \{i\} \quad \text{или} \quad \{a'\} = [L]\{i\}, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad [L] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -r' \sin \theta' & r' \cos \theta' & 0 \\ \cos \theta' & \sin \theta' & 0 \end{vmatrix}.$$

Векторы координатного базиса основной оболочки выражаются через векторы локального базиса примыкающей оболочки

$$\{i\} = [L]^{-1} \{a'\}. \quad (9)$$

Таким образом, в зоне примыкания оболочек можно получить матричное выражение векторов локального базиса основной оболочки через векторы локального базиса примыкающей

$$\{a\} = [N][L]^{-1} \{a'\} \quad \text{или} \quad \{a\} = [A]\{a'\}, \quad (10)$$

$$\text{где} \quad [A] = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{r'} \sin \theta' & \cos \theta' \\ r \sin \theta & r \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' & r \cos \theta \sin \theta' \\ -\cos \theta & \sin \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' & \sin \theta \sin \theta' \end{vmatrix}.$$

В узлах, расположенных на гранях сопряжения оболочек, вводятся следующие векторы узловых неизвестных для основной оболочки и примыкающей, соответственно

$$\{u_y^e\}^T = \{u, u_1, u_2, u_3, v, v_1, v_2, v_3, w, w_1, w_2, w_3\}; \quad (11, a)$$

$$\{u_y^e\}^T = \{u', u'_1, u'_2, u'_3, v', v'_1, v'_2, v'_3, w', w'_1, w'_2, w'_3\}, \quad (11, б)$$

где $u, u_j, v, v_j, w, w_j, u', u'_j, v', v'_j, w', w'_j$ ($j = 1, 2, 3$) компоненты вектора перемещений и их первые производные в координатах x, θ, r и x', θ', r' .

При составлении матрицы жесткости системы в элементах, расположенных на гранях сопряжения, в качестве неизвестных принимались компоненты вектора (11,а). После формирования матрицы жесткости конечного элемента примыкающей оболочки, узлы которой расположены на грани сопряжения, выполняется преобразование указанной матрицы жесткости конечного элемента и вектора усилий рассматриваемого элемента, обусловленное переходом от вектора узловых неизвестных (11,а) к вектору (11,б).

Вектор перемещений точки, расположенной на грани сопряжения можно представить компонентами, отнесенными к базисам векторов $\{a\}$ и $\{a'\}$

$$\bar{V} = u\bar{a}_1 + v\bar{a}_2 + w\bar{a}_3; \quad \bar{V}' = u'\bar{a}_1' + v'\bar{a}_2' + w'\bar{a}_3', \quad (12)$$

Используем очевидное равенство правых частей уравнений (12)

$$\{V\}^T \{a\} = \{V'\}^T \{a'\}, \quad (13)$$

где $\{V\}^T = \{u, v, w\}$ и $\{V'\}^T = \{u', v', w'\}$.

Используя выражение (10), компоненты вектора перемещения основной оболочки можно привести к локальному базису векторов примыкающей оболочки

$$\{V\}^T [A] \{a'\} = \{V'\}^T \{a'\}. \quad (14)$$

Из выражения (14) компоненты вектора примыкающей оболочки можно выразить через компоненты вектора основной оболочки

$$u' = vr \sin \theta - w \cos \theta; \quad v' = -u \frac{1}{r'} \sin \theta' + vr \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' + w \sin \theta \frac{1}{r'} \cos \theta'; \quad (15)$$

$$w' = u \cos \theta' + vr \cos \theta \sin \theta' + w \sin \theta \sin \theta'.$$

Производные вектора перемещений точки, расположенной на грани пересечения оболочек по направлениям x', θ', r' примыкающей оболочки в системе координат x, θ, r основной оболочки определяются по формуле

$$\vec{V}'_j = \vec{a}'_j \text{grad} \vec{V}, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (16)$$

где $\text{grad} \vec{V} = \vec{a}^1 \vec{V}_{,1} + \vec{a}^2 \vec{V}_{,2} + \vec{a}^3 \vec{V}_{,3}$ – вектор–градиент векторного поля перемещения. Из формулы (16) получим

$$V_{,j}' = \vec{a}'_j (\vec{a}^1 \vec{V}_{,1} + \vec{a}^2 \vec{V}_{,2} + \vec{a}^3 \vec{V}_{,3}) \quad (17)$$

Выражения производных векторов перемещений основной оболочки и для примыкающей оболочек будут иметь вид

$$\vec{V}_{,1} = u_{,1} \vec{a}_1 + v_{,1} \vec{a}_2 + w_{,1} \vec{a}_n; \quad \vec{V}_{,2} = u_{,2} \vec{a}_1 + (v_{,2} + \frac{1}{r} w) \vec{a}_2 + (-rv + w_{,2}) \vec{a}_n; \quad (18)$$

$$\vec{V}_{,3} = u_{,3} \vec{a}_1 + (\frac{v}{r} + v_{,3}) \vec{a}_2 + w_{,3} \vec{a}_n.$$

$$\vec{V}'_{,1} = u'_{,1} \vec{a}'_1 + v'_{,1} \vec{a}'_2 + w'_{,1} \vec{a}'_n;$$

$$\vec{V}'_{,2} = u'_{,2} \vec{a}'_1 + (v'_{,2} + \frac{1}{r'} w') \vec{a}'_2 + (-r' v' + w'_{,2}) \vec{a}'_n;$$

$$\vec{V}'_{,3} = u'_{,3} \vec{a}'_1 + (\frac{v'}{r'} + v'_{,3}) \vec{a}'_2 + w'_{,3} \vec{a}'_n.$$

Преобразовав выражение (17) с учетом (18), получим

$$V'_{,1} = V_{,2} r \sin \theta - V_{,3} \cos \theta; \quad V'_{,2} = -V_{,1} \frac{1}{r'} \sin \theta' + V_{,2} r \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' + V_{,3} \sin \theta \frac{1}{r'} \cos \theta';$$

$$V'_{,3} = V_{,1} \cos \theta' + V_{,2} r \cos \theta \sin \theta' + V_{,3} \sin \theta \sin \theta'. \quad (19)$$

С использованием производных (19) можно получить зависимости производных компонент вектора перемещений на грани пересечения оболочек

$$u'_{,1} = \left(v_{,2} + \frac{1}{r} w \right) r^2 \sin^2 \theta + \left(rv - \frac{v}{r} - v_{,3} - w_{,2} \right) r \sin \theta \cos \theta - w_{,r} \cos^2 \theta;$$

$$v'_{,1} = -u_{,2} \frac{1}{r'} \sin \theta' \sin \theta + u_{,3} \frac{1}{r'} \sin \theta' \cos \theta' + (-rv + w_{,2}) r \sin^2 \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' +$$

$$+ \left(v_{,2} + \frac{1}{r} w \right) r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' - \left(\frac{v}{r} + v_{,3} \right) r \cos^2 \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' - w_{,3} \sin \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' \cos \theta;$$

$$\begin{aligned}
w_{,1}' &= u_{,2} \cos \theta' r \sin \theta - u_{,3} \cos \theta' \cos \theta + \left(v_{,2} + \frac{1}{r} w \right) r^2 \cos \theta \sin \theta \sin \theta' + \\
&+ (-rv + w_{,2}) r \sin^2 \theta \sin \theta' - \left(\frac{v}{r} + v_{,3} \right) r \cos^2 \theta \sin \theta' - w_{,3} \sin \theta \cos \theta' \cos \theta; \\
u_{,2}' &= -v_{,1} r \sin \theta \frac{1}{r'} \sin \theta' + w_{,1} \cos \theta \frac{1}{r'} \sin \theta' + \left(v_{,2} + \frac{1}{r} w \right) \times r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' - \\
&- (-rv + w_{,2}) r \cos^2 \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' + \left(\frac{v}{r} + v_{,3} \right) r \sin^2 \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' - w_{,3} \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta'; \\
v_{,2}' &= u_{,1} \frac{1}{r'^2} \sin^2 \theta' - v_{,1} r \cos \theta \frac{1}{r'^2} \cos \theta' \sin \theta' - w_{,1} \sin \theta \frac{1}{r'^2} \cos \theta' \sin \theta' - \\
&- u_{,2} \frac{1}{r'} \sin \theta' \cos \theta \cos \theta' + \left(v_{,2} + \frac{1}{r} w \right) r^2 \cos^2 \theta \frac{1}{r'^2} \cos^2 \theta' + \\
&+ (-rv + w_{,2}) r \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r'^2} \cos^2 \theta' - u_{,3} \frac{1}{r'^2} \sin \theta' \cos \theta' \sin \theta + \\
&+ \left(\frac{v}{r} + v_{,3} \right) r \cos \theta \frac{1}{r'^2} \cos^2 \theta' \sin \theta + w_{,3} \sin^2 \theta \frac{1}{r'^2} \cos^2 \theta' - \\
&- \frac{1}{r'} \left(u \cos \theta' + vr \cos \theta \sin \theta' + w \sin \theta \sin \theta' \right); \\
w_{,2}' &= -u_{,1} \cos \theta' \frac{1}{r'} \sin \theta' - v_{,1} r \frac{1}{r'} \cos \theta \sin^2 \theta' - w_{,1} \sin \theta \frac{1}{r'} \sin^2 \theta' + \\
&+ u_{,2} r \cos \theta \frac{1}{r'^2} \cos^2 \theta' + \left(v_{,2} + \frac{w}{r} \right) r^2 \cos^2 \theta \sin \theta' \frac{1}{r'} \cos \theta' + \\
&+ (-rv + w_{,2}) \sin \theta \sin \theta' r \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' + u_{,3} \sin \theta \frac{1}{r'} \cos^2 \theta' + \\
&+ \left(\frac{v}{r} + v_{,3} \right) r \cos \theta \sin \theta' \sin \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' + w_{,3} \sin^2 \theta \sin \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' - \\
&- r \left(-\frac{1}{r'} \sin \theta' + vr \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' + w \sin \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' \right); \\
u_{,3}' &= v_{,1} r \sin \theta \cos \theta' - w_{,1} \cos \theta \cos \theta' + \left(v_{,2} + \frac{w}{r} \right) r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \theta' - \\
&- (-rv + w_{,2}) r \cos^2 \theta \sin \theta' + \left(\frac{v}{r} + v_{,3} \right) r \sin^2 \theta \sin \theta' - w_{,3} \cos \theta \sin \theta \sin \theta';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{3'} = & -u_{,1} \frac{1}{r'} \sin \theta' \cos \theta' + v_{,1} r \cos \theta \frac{1}{r'} \cos^2 \theta' + w_{,1} \sin \theta \frac{1}{r'} \cos^2 \theta' - \\
& \sigma, \text{ даН/см}^2 \\
& -u_{,2} r \cos \theta \sin^2 \theta' + \left(v_{,2} + \frac{w}{r} \right) r^2 \cos^2 \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' \sin \theta' + \\
& + (-rv + w_{,2}) \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' \sin \theta' - u_{,3} \sin \theta \frac{1}{r'} \sin^2 \theta' + \\
& \left(\frac{v}{r} + v_{,3} \right) r \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' \sin \theta \sin \theta' + w_{,3} \sin^2 \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' \sin \theta' - \\
& \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r'} \sin \theta' u + vr \cos \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' + w \sin \theta \frac{1}{r'} \cos \theta' \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{3'} = & u_{,1} \cos^2 \theta' + v_{,1} r \cos \theta \sin \theta' \cos \theta' + w_{,1} \sin \theta \sin \theta' \cos \theta' + \\
& + u_{,2} \cos \theta' r \cos \theta \sin \theta' + \left(v_{,2} + \frac{w}{r} \right) r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta' + \quad x', \text{ см} \\
& + (-rv + w_{,2}) \sin \theta r \cos \theta \sin^2 \theta' + u_{,3} \cos \theta' \sin \theta \sin \theta' + \\
& + \left(\frac{v}{r} + v_{,3} \right) r \cos \theta \sin^2 \theta' \sin \theta + w_{,3} \sin^2 \theta \sin^2 \theta'.
\end{aligned}$$

Рис. 2

Рис. 3

Вектор узловых неизвестных примыкающей оболочки с использованием ной оболоч-

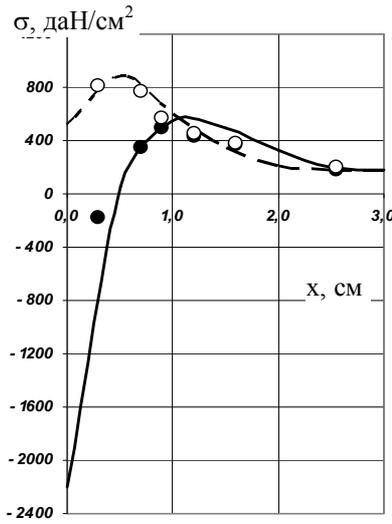


Рис. 4

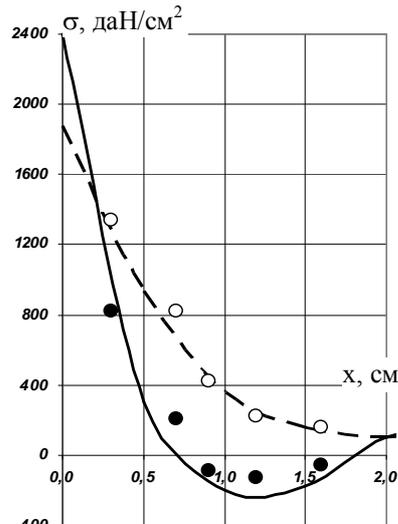
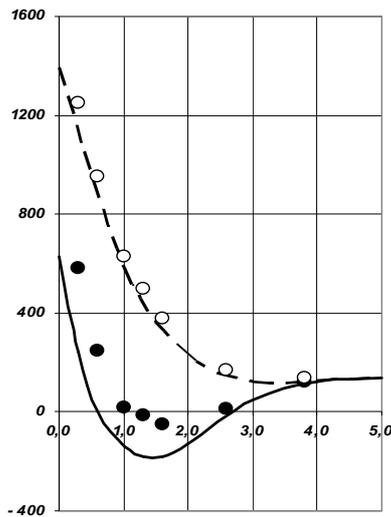
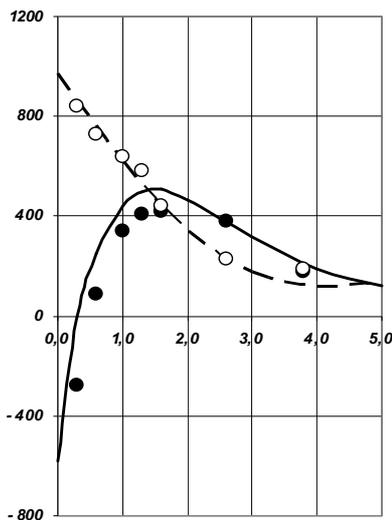


Рис. 5

(21)
ки на грани-

(22)
мированное
цилиндриче-
. Были при-
=0.00254 м,
нт Пуассона
аличия двух
онструкции.
элемент [1].
проверялась



На рисунках 2-5 представлены расчетные кривые изменения меридиональных (сплошные линии) и кольцевых (пунктирные линии) напряжений в продольном сечении рассчитываемой конструкции. На рисунках 2 и 3 изображены графики изменения напряжений во внутренних и наружных волокнах примыкающего цилиндра, соответственно, а на рисунках 4 и 5 – то же самое для основного цилиндра. Экспериментальные значения кольцевых напряжений обозначены светлыми кружками, меридиональных – темными кружками.

Анализ полученных графиков показывает удовлетворительное соответствие значений напряжений, определенных с использованием описанного алгоритма и полученных экспериментально [2].

Литература

1. Николаев А. П., Киселёв А. П. К расчету оболочек на основе метода конечных элементов // Вестник Российского университета дружбы народов, сер. Инж. исследования. - 2002. - № 1. – с.107-111.
2. Gwaltney R.C., Corum J. M., Bolt S.E. и др. Experimental stress analysis of cylinder-to-cylinder shell models and comparisons with theoretical predictions // Trans. ASME. – 1976. – vol. 98. - №4. – pp. 283-290.