

Вопросы теории ползучести

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МОДУЛЬ ДЕФОРМАЦИЙ С УЧЕТОМ НИСПАДАЮЩЕЙ ВЕТВИ ДИАГРАММЫ "ε - σ"

М.Е. БАШКАТОВА, асп.

Московский институт коммунального хозяйства и строительства

Экспериментальные исследования силовых деформаций сжатых бетонных образцов, осуществляемых в условиях стеснения их деформаций, показывают

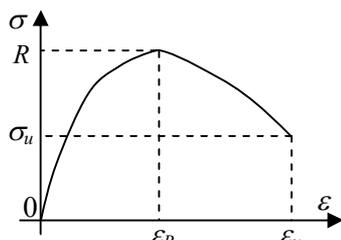


Рис. 1. Диаграмма "ε - σ" сжатия бетона

появление в диаграмме "ε - σ" ниспадающей ветви (рис. 1). В реальных конструкциях деформации бетона стесняются либо менее нагруженными волокнами бетона и арматурой при неоднородном напряженном состоянии (например, при изгибе или в нецентральной сжатии), либо арматурой при центральном сжатии.

В результате стеснения в бетоне прорабатывается ниспадающая ветвь диаграммы "ε - σ" и наблюдается значительное превышение перед разрушением деформации ε_u над деформацией ε_R , ограничивающей восходящую ветвь диаграммы. Зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ предполагается установленной.

Для описания диаграммы "ε - σ" с учетом ниспадающей ветви при кратковременном нагружении используются, например, функции [1, 2]

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \cdot e^{-\varepsilon/\varepsilon_R}, \quad (1) \quad \sigma(\varepsilon) = R \sum_{i=0}^n a_i (\varepsilon/\varepsilon_R)^i. \quad (2)$$

Согласно предпосылкам о взаимонезависимости и суммируемости частных деформаций и суперпозиции деформаций ползучести получены нелинейные уравнения силового сопротивления бетона [1]

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{S_M[\sigma(t)]}{E_0^M(t)} + C_0^*(t, t) S_{II}[\sigma(t)] - \int_{t_0}^t S_{II}[\sigma(t)] \frac{\partial}{\partial \tau} C_0^*(t, \tau) d\tau, \quad (3)$$

где $E_0^M(t)$ – начальный модуль мгновенных деформаций ко времени t ; $C_0^*(t, \tau)$ – начальная мера простой ползучести к моменту t при загрузении в момент τ ; $S_M[\sigma(t)]$ и $S_{II}[\sigma(t)]$ – нелинейные функции напряжений для мгновенных деформаций и деформаций ползучести; t_0, τ, t – время начала нагружения, текущее время и момент наблюдения.

С.В. Бондаренко по функциям нелинейности напряжений

$$S_M^0[\sigma(t)] = S_M[\sigma(t)]/\sigma(t) \text{ и } S_{II}^0[\sigma(t)] = S_{II}[\sigma(t)]/\sigma(t)$$

построил общую для мгновенных и запаздывающих деформаций функцию нелинейности напряжений $S^0[\sigma(t)]$ и представил $\varepsilon(t, t_0)$ в виде [3]

$$\varepsilon(t, t_0) = S^0[\sigma(t)] \cdot \sigma(t) / E_n^{sp}(t, t_0), \quad (4)$$

где $E_n^{sp}(t, t_0)$ – временный линейный модуль деформаций

$$E_n^{sp}(t, t_0) = \left[\frac{1}{E_0^M(t)} + C_0^*(t, t) - \int_{t_0}^t \frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} C_0^*(t, \tau) d\tau \right]^{-1}. \quad (5)$$

Согласно формул (1), (2), (4) и (5) имеем

$$\sigma(\varepsilon, t, t_0) = E_n^{sp}(t, t_0) \varepsilon(t, t_0) e^{-\varepsilon(t, t_0)/\varepsilon_R(t, t_0)}, \quad (6)$$

$$\sigma(\varepsilon, t, t_0) = E_n^{sp}(t, t_0) \varepsilon(t, t_0) \sum_{i=0}^W a_i \left[\frac{\varepsilon(t, t_0)}{\varepsilon_R(t, t_0)} \right]^i. \quad (7)$$

Расчет железобетонных конструкций сопряжен в частности с необходимостью определения жесткости сечений их элементов. При однородном напряженно-деформированном состоянии (НДС) жесткость сечения с абсциссой v (ось v направлена по длине элемента) определяется по формуле

$$D(v, t) = E^{sp}(t, t_0) A, \quad (8)$$

где A – площадь нормального сечения элемента.

Когда напряжения $\sigma(z, t)$ по высоте сечения распределяются линейно, то

$$D(v, t) = E_n^{sp}(t, t_0) \cdot J, \quad (9)$$

где J – момент инерции сечения относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно нейтральной оси.

Если же это распределение нелинейно, то нахождение $D(v, t)$ становится нелегкой задачей. При наличии в сечении двузначной эпюры напряжений определяются жесткости $D_c(v, t)$ и $D_p(v, t)$ его сжатой и растянутой зон и

$$D(v, t) = D_c(v, t) + D_p(v, t).$$

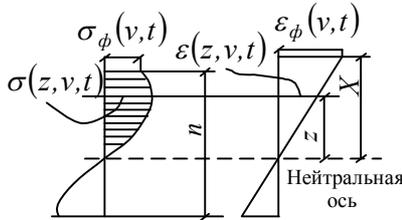


Рис. 2. Распределение деформаций и напряжений по высоте нормального сечения бетонного элемента

Принимается гипотеза плоских сечений, т.е.

$$\varepsilon(z, t) = (z/x) \varepsilon_\phi(v, t), \quad (10)$$

где $\varepsilon_\phi(v, t)$ – деформация фибрового волокна (рис. 2).

$$\text{В силу формулы (10)} \quad z = x\varepsilon / \varepsilon_f, \quad (11)$$

$$\text{а потому} \quad \sigma(z, v, t) = \sigma \left[\frac{x}{\varepsilon_\phi(v, t)} \varepsilon(z, v, t) \right]. \quad (12)$$

Для интегральных оценок нелинейных и неравновесных свойств железобетона В.М. Бондаренко ввел и использовал [4] понятие интегрального модуля деформаций $E^{un}(v, t)$, который находится при минимизации по $1/E^{un}(v, t)$ величины

$$\alpha[E^{un}(v, t)] = \int_p^q [\Delta b(z) z^m]^2 dz. \quad (13)$$

В выражении (13) $b(z)$ – ширина сечения; m – показатель моментности отклонения; p и q – пределы z по сечению;

$$\Delta = \varepsilon(z, v, t) - \varepsilon^{un}(z, v, t), \quad (14)$$

$$\text{где} \quad \varepsilon^{un}(z, v, t) = \sigma(z, v, t) / E^{un}(v, t). \quad (15)$$

В частности для сжатой зоны прямоугольного сечения [1] при $m = 1/2$ и

$$\sigma(z, v, t) = \left(\frac{z}{x} \right)^{n_\sigma} \sigma_\phi(v, t); \quad \varepsilon(z, t) = \left(\frac{z}{x} \right)^{n_\varepsilon} \varepsilon_\phi(v, t) \quad (16)$$

$$\text{имеем} \quad E^{un}(v, t) = \frac{2 + n_\varepsilon + n_\sigma}{2 + 2n_\sigma} \cdot E_\phi^{sp}(v, t). \quad (17)$$

Введем, следуя идее В.М. Бондаренко, интегральный модуль деформаций $\tilde{E}^{un}(v, t)$, минимизируя по $\tilde{E}^{un}(v, t)$ величину

$$\tilde{\alpha}[\tilde{E}^{un}(v, t)] = \int_p^q [\tilde{\Delta} b(z)]^2 dz, \quad (18)$$

где $\tilde{\Delta} = \sigma(z, v, t) - \sigma^{un}(z, v, t)$, (19) $\sigma^{un}(z, v, t) = \tilde{E}^{un}(v, t) \cdot \varepsilon(z, v, t)$. (20)

Согласно выражений (16) и (18) для сжатой зоны прямоугольного сечения

$$\tilde{E}^{un}(v, t) = \frac{1 + 2n_\varepsilon}{1 + n_\varepsilon + n_\sigma} \cdot E_\phi^{ep}(v, t). \quad (21)$$

При допущении гипотезы плоских сечений интегральные модули

$$\tilde{E}^{un}(v, t) = \frac{3}{2 + n_\sigma} \cdot E_\phi^{ep}(v, t), \quad (22) \quad E^{un}(v, t) = \frac{3 + n_\sigma}{2 + 2n_\sigma} \cdot E_\phi^{ep}(v, t) \quad (23)$$

практически совпадают и в качестве приближения $E^{un}(v, t)$ в [1] взят $\tilde{E}^{un}(v, t)$.

Функция $\sigma(z, v, t) = (z/x)^{n_\sigma} \cdot \sigma_\phi(v, t)$ описывает распределение напряжений лишь на восходящей ветви диафрагмы " $\varepsilon - \sigma$ ", а для нахождения интегрального модуля деформаций с учетом ниспадающей ветви необходимо задание $\sigma(z, v, t)$ на промежутке $[0, \varepsilon_u]$.

В то же время гипотеза плоских сечений часто приемлема для полной диаграммы " $\varepsilon - \sigma$ " и при заданной функции $\sigma(\varepsilon)$ позволяет находить $\tilde{E}^{un}(v, t)$.

В самом деле
$$\tilde{\alpha}[\tilde{E}^{un}(v, t)] = \int_0^x \left\{ b(z) [\sigma(\varepsilon) - \tilde{E}^{un}(v, t) \varepsilon] \right\} dz \quad (24)$$

и поскольку $z = x\varepsilon/\varepsilon_f$, то
$$\tilde{\alpha}[\tilde{E}^{un}(v, t)] = \frac{x}{\varepsilon_f} \int_0^{\varepsilon_f} \left\{ b(\varepsilon) [\sigma(\varepsilon) - \tilde{E}^{un}(v, t) \varepsilon] \right\}^2 d\varepsilon. \quad (25)$$

Используя условие
$$d\tilde{\alpha}[\tilde{E}^{un}(v, t)] / d\tilde{E}^{un}(v, t) = 0, \quad (26)$$

получим
$$\tilde{E}^{un}(v, t) = \frac{\int_0^{\varepsilon_f(v, t)} b(\varepsilon) \sigma(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_f(v, t)} b(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon}. \quad (27)$$

В линейном случае и при однородном НДС из (27) следует, что

$$\tilde{E}^{un}(v, t) = E_\phi^{ep}(v, t).$$

Для прямоугольного сечения $b(z) = const$ и согласно (27)

$$\tilde{E}^{un}(v, t) = 3 \int_0^{\varepsilon_f(v, t)} b(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon / \varepsilon_f^3(v, t). \quad (28)$$

В целях упрощения выкладок дальнейшие рассуждения проведем для случая $b(z) = const$.

Если напряжения $\sigma(\varepsilon, t, t_0)$ заданы выражениями (6) и (7), то в силу (28)

$$\tilde{E}^{un}(v, t) = 3 \left\{ \left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_f} \right)^3 \left[2(1 - e^{-\varepsilon/\varepsilon_R}) - 2 \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_R} - \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_R} \right)^2 \right] \right\} E_{\phi}^{ep}(v, t), \quad (29)$$

$$\tilde{E}^{un}(v, t) = \left(a_1 + \frac{3}{2} a_0 \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_f} + \frac{3}{4} a_2 \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_R} + \dots \right) E_{\phi}^{ep}(v, t). \quad (30)$$

С помощью модуля $\tilde{E}^{un}(v, t)$ напряжениям $\sigma(z, v, t)$ сопоставляются условные напряжения $\tilde{\sigma}(z, v, t) = \tilde{E}^{un}(v, t) \varepsilon(z, v, t)$, распределенные по высоте элемента линейно при $\varepsilon(z, v, t) = (z/x) \varepsilon_\phi(v, t)$. В физическом аспекте этой трансформации отвечает сопоставление бетонному элементу некоторого условного элемента (с теми же геометрическими характеристиками и с модулем деформаций

$\tilde{E}^{un}(v, t)$), обладающим линейным по высоте распределением напряжением. Существенно, что при этом суммарные по всей сжатой зоне моменты M и \tilde{M} , порождаемые соответственно напряжениями $\sigma(z, v, t)$ и $\tilde{\sigma}(z, v, t)$ одинаковы.

$$\text{В самом деле} \quad M = \int_0^x \sigma(\varepsilon) z dz = \frac{x^2}{\varepsilon_f} \int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon, \quad (31)$$

$$M = \int_0^x \tilde{E}^{un}(v, t) \left(\frac{z}{x} \right) \varepsilon_\phi(v, t) \cdot z dz = \frac{\tilde{E}^{un}(v, t) \cdot x^2 \cdot \varepsilon_f}{3} \quad (32)$$

$$\text{и согласно (28) имеем} \quad \tilde{M} = M. \quad (33)$$

Предполагая, что линейное распределение напряжений получено с помощью некоторого интегрального модуля деформаций $\hat{E}^{un}(v, t)$, оставляющего момент M инвариантным, в силу (31) и (32) получим

$$\hat{E}(v, t) = \tilde{E}^{un}(v, t). \quad (34)$$

Итак, математический подход нахождения $\tilde{E}^{un}(v, t)$ минимизацией $\tilde{\alpha}[\tilde{E}^{un}(v, t)]$ эквивалентен физическому подходу его определения из условия инвариантности M . Это обстоятельство приводит к новому способу нахождения интегрального модуля деформаций с помощью равенств (31), (32) и (33).

Следует отметить, что инвариантность M при сопоставлении

$$\sigma(z, v, t) \rightarrow \tilde{\sigma}(z, v, t) = \tilde{E}^{un}(v, t) \varepsilon(z, t) \quad (35)$$

следует из линейного по высоте сжатой зоны сечения элемента распределения напряжений $\tilde{\sigma}(z, v, t)$.

Линеаризация (35) обеспечивает не только сохранение момента M , но и, что не менее важно, сохранение деформаций $\varepsilon(z, v, t)$ и, следовательно, прогибов $u(v, t)$. Одинаковость деформаций и прогибов в сечениях при равных моментах M и \tilde{M} возможна лишь при равных жесткостях бетонного элемента и сопоставляемого ему условного элемента $D(v, t) = \tilde{D}(v, t)$.

Согласно (36) жесткость сжатой зоны сечения $D_c(v, t)$ находится с помощью формулы $D_c(v, t) = \tilde{E}^{un}(v, t) \cdot J_c$, где J_c – момент инерции этой зоны.

При необходимости учета жесткости растянутой зоны аналогично $\tilde{E}^{un}(v, t)$ определяется интегральный модуль деформаций $\tilde{E}_p^{un}(v, t)$ и жесткость

$$D_p(v, t) = \tilde{E}_p^{un}(v, t) \cdot J_p, \text{ где } J_p \text{ – момент инерции этой зоны.}$$

Л и т е р а т у р а

1. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. – М., Стройиздат, 1982.
2. Бамбура А.Н. Диаграмма напряжения – деформаций для бетона при центральном сжатии// Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона: Сборник. – Ростов: РИСИ, 1980. – С. 19–22.
3. Бондаренко С.В., Тутберидзе О.Б. Инженерные расчеты ползучести строительных конструкций. – Тбилиси: Изд-во «Ганатлеба», 1988.
4. Бондаренко В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. – Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1968.