Проблемы теории упругости

ТРЕЩИНА В СЕЧЕНИИ ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ

Ш.Г. ГАСАНОВ, *канд. техн. наук, доцент*
Бакинский филиал Московского государственного открытого университета

Исследуется плоская задача с продольной трещиной, возникающей в сечении дорожного покрытия, сцепленного с упругим основанием из другого материала, когда к поверхности покрытия приложена нормальная нагрузка (давление колеса).

В настоящее время важной общегосударственной задачей является увеличение объема строительства автомобильных дорог при одновременном повышении качества, надежности и долговечности строительства, снижении расхода дефицитных материалов. В связи с этим на первый план выдвигаются проблемы научно обоснованных комплексных методов расчета строительных конструкций на прочность и долговечность, позволяющих на основе полного учета реального состояния материала осуществлять оптимальное проектирование строительных конструкций, обладающих повышенной прочностью, надежностью и долговечностью. Все это в полной мере относится к дорожным покрытиям. Разработка расчетных моделей для исследования повреждения твердого дорожного покрытия представляет собой актуальную проблему. Для обеспечения надежной и безаварийной работы автомобильного транспорта важное значение играет своевременное обнаружение различных повреждений дорожного покрытия. Значительный интерес в связи с этим представляют дефекты типа трещин. Важной проблемой для повышения долговечности дорожного покрытия является установление норм допустимой дефектности, выбор способов и периодичности контроля пути.

При оценке долговечности дорожного покрытия необходимо исходить из возможности наличия в сечении дорожного покрытия наиболее опасных невыявленных дефектов. В связи с этим разработка расчетных моделей для исследования повреждений дорожного покрытия представляет собой актуальную проблему. Примем следующие упрощающие предположения относительно работы дорожного покрытия:

1) дорожное покрытие является неразрезной полосой бесконечной длины неизменного поперечного сечения, лежащей на сплошном упругом основании;

2) вертикальные силы приложены в плоскости симметрии дорожного покрытия, а боковые и продольные силы не влияют на изгибающий момент и на напряженно-деформированное состояние, вызванное процессом контактирования колеса с дорожным покрытием.

На основании этих принятых предположений для расчета напряженно-деформированного состояния пары дорожное покрытие – упругое основание приходим к следующей задаче теории упругости.

В декартовых координатах x, y рассмотрим пару «дорожное покрытие – упругое основание». Дорожное покрытие представляет собой полосу толщиной h с упругими характеристиками G_1 (модуль сдвига) и μ_1 (коэффициент Пуассона), сцепленную с полуплоскостью (упругое основание) с характеристиками G_2 и μ_2.

Пусть в точке $x=0$, $y=h$ (рис. 1) к поверхности покрытия приложена нормальная нагрузка в виде сосредоточенной силы P_k (давление колеса). Остальная поверхность покрытия принята не нагруженной. Пусть в сечении покрытия имеется прямолинейная трещина длиной $2l$, расположенная на отрезке $|x_1| \le l$, $y = h/2$. В центре трещины разместим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$, ось x_1 совпадает с линией трещины и параллельна с осью x. Берега

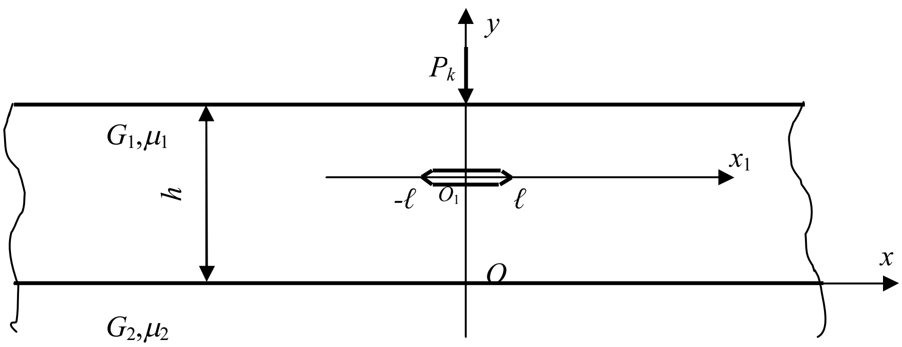


Рис. 1 Расчетная схема задачи

трещины приняты свободны от внешних нагрузок.

Граничные условия задачи запишем в следующей форме:

$$
\begin{array}{lll}
\text{при } y=h: & \sigma_y^{(1)} = -P_k\delta(x); \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0, & \\
\text{при } y=0: & u^{(1)} + i\upsilon^{(1)} = u^{(2)} + i\upsilon^{(2)}; & (1)\\
 & \sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)} = \sigma_y^{(2)} + i\tau_{xy}^{(2)}; & \\
\text{при } y_1=0: & \sigma_{y_1}^{(1)} = 0; \quad \tau_{x_1y_1}^{(1)} = 0 \quad (|x_1| \le \ell). &
\end{array}
$$

Здесь верхний индекс (1) соответствует покрытию, верхний индекс (2) - полуплоскости; $\delta(x)$ – импульсная функция Дирака; i – мнимая единица.

Считается, что при $y \to -\infty$ перемещения и напряжения исчезают, и на границе раздела сред (покрытие и основание) имеет место равенство напряжений и перемещений (условия полного сцепления).

Используем принцип суперпозиции. Тогда напряженное и деформированное состояние двухслойного тела с трещиной можно представить в виде суммы двух состояний. Первое состояние будет определяться из решения следующей краевой задачи для двухслойного тела при отсутствии трещины:

$$
\begin{array}{lll}
\text{при } y=h: & \sigma_y^{(1)} = -P_k\delta(x); \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0, & \\
\text{при } y=0: & u^{(1)} + i\upsilon^{(1)} = u^{(2)} + i\upsilon^{(2)}; & (2)\\
 & \sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)} = \sigma_y^{(2)} + i\tau_{xy}^{(2)}. &
\end{array}
$$

Второе состояние определяется из решения краевой задачи для полосы с трещиной, на берегах которой действуют усилия, определяемые первым состоянием. Краевые условия второй задачи имеют вид:

$$
\begin{array}{lll}
\text{при } y_1=0: & \tau_{x_1y_1} = -p_1(x_1); \quad \sigma_{y_1} = -p(x_1) \quad (|x_1| \le \ell), & \\
\text{при } y=h: & \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0 \quad (|x| < \infty), & (3)
\end{array}
$$

при $y=0$: $\sigma_y=0$; $\tau_{xy}=0$.

Здесь $p(x_1)$ и $p_1(x_1)$ – нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошной полосе по оси x_1 от приложения заданных нагрузок, снимающих напряжения на границе полосы.

Решение первой задачи. Для решения граничной задачи (2) используем функции Папковича-Нейбера $F_n^m(x,y)$ $(n,m=1,2)$: по две для полосы (верхний индекс 1) и полуплоскости (верхний индекс 2). Как известно [1], перемещения и напряжения выражаются через эти функции по следующим формулам

$$u^{(m)}=-\frac{\partial F_1^{(m)}}{\partial x}-y\frac{\partial F_2^{(m)}}{\partial y};\quad \upsilon^{(m)}=(3-4\mu_m)F_2^{(m)}-\frac{\partial F_1^{(m)}}{\partial y}-y\frac{\partial F_2^{(m)}}{\partial y},$$

$$\frac{\sigma_y^{(m)}}{2G_m}=2(1-\mu_m)\frac{\partial F_2^{(m)}}{\partial y}-\frac{\partial^2 F_1^{(m)}}{\partial y^2}-y\frac{\partial^2 F_2^{(m)}}{\partial y^2},\tag{4}$$

$$\frac{\tau_{xy}^{(m)}}{2G_m}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\mu_m)F_2^{(m)}-\frac{\partial F_1^{(m)}}{\partial y}-y\frac{\partial F_2^{(m)}}{\partial y}\right].$$

Учитывая симметрию задачи по x, используем cos-преобразование Фурье и примем

$$F_1^{(1)}=\int_0^\infty\left[Ash\alpha y+Bch\alpha y\right]\cos\alpha x d\alpha,\quad F_2^{(1)}=\int_0^\infty\left[Csh\alpha y+Dch\alpha y\right]\alpha\cos\alpha x d\alpha,$$

$$F_1^{(2)}=\int_0^\infty Ee^{\alpha y}\cos\alpha x d\alpha,\quad F_2^{(2)}=\int_0^\infty Fe^{\alpha y}\alpha\cos\alpha x d\alpha.\tag{5}$$

С помощью соотношений (4) и (5) находим напряжения и перемещения $\sigma_y^{(m)}$, $\tau_{xy}^{(m)}$, $u^{(m)}$, $\upsilon^{(m)}$. Затем удовлетворяя ими граничным условиям (2) получим систему шести линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных функций *A, B, C, D, E, F* параметра α:

$$2(1-\mu_1)(Cch\alpha h+Dsh\alpha h)-Ash\alpha h-Bch\alpha h-\alpha h(Csh\alpha h+Dch\alpha h)=-\frac{P}{2\pi G_1\alpha^2},$$

$$(1-2\mu_1)(Csh\alpha h+Dch\alpha h)-Ach\alpha h-Bsh\alpha h-\alpha h(Cch\alpha h+Dsh\alpha h)=0,$$

$$B=E,\qquad (3-4\mu_1)D-A=(3-4\mu_2)F-E,$$

$$G_1[2(1-\mu_1)C-B]=G_2[2(1-\mu_2)F-E],\ G_1[(1-2\mu_1)D-A]=G_2[(1-2\mu_2)F-E].\tag{6}$$

Решая систему (6) методом последовательного исключения, находим функции *A, B, C, D, E, F*. Ввиду некоторой громоздкости они не приводятся в явном виде. По формулам (4) при $y=h/2$, $|x|\le\ell$ находятся величины $p(x)$ и $p_1(x)$.

Следуя [2] для задачи, описывающей второе напряженное состояние, получим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1}\frac{g'(\eta)d\eta}{\eta-\xi}+\int_{-1}^{1}\left[g'(\eta)R(\eta,\xi)+\overline{g'(\eta)}S(\eta,\xi)\right]d\eta=\pi p_0(\xi),\tag{7}$$

$$p_0(\xi)=p(\xi)+ip_1(\xi),\quad |\xi|<1,\quad \frac{i(1+\kappa_0)g'(x)}{2G_1}=\frac{\partial}{\partial x}\left[u^+-u^-+i(\upsilon^+-\upsilon^-)\right].$$

Здесь κ_0 - постоянная Мусхелишвили для материала полосы.

$$R(\eta,\xi)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{1}{sh2\tau+2\tau}+\frac{1}{sh2\tau-2\tau}\right)H_1(\xi,\eta,\tau,0)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{sh2\tau+2\tau}-\frac{1}{sh2\tau-2\tau}\right)G_1^*(\xi,\eta,\tau,0)\right]d\tau\,, \qquad (8)$$

$$S(\eta,\xi)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{1}{sh2\tau+2\tau}-\frac{1}{sh2\tau-2\tau}\right)H_2(\xi,\eta,\tau,0)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{sh2\tau+2\tau}+\frac{1}{sh2\tau-2\tau}\right)G_2^*(\xi,\eta,\tau,0)\right]d\tau$$

где $\quad H_1(\xi,\eta,\tau,0)=H_2(\xi,\eta,\tau,0)=(\lambda/2)\cdot\left(-1-2\tau^2+e^{-2\tau}\right)\sin[\lambda\tau(\eta-\xi)];$

$$G_1^*(\xi,\eta,\tau,0)=G_2^*(\xi,\eta,\tau,0)=-\lambda\tau\sin[\lambda\tau(\eta-\xi)]; \qquad \lambda=\ell/h\,.$$

Ядра $R(\eta,\xi)$ и $S(\eta,\xi)$ действительны, интегральное уравнение (7), как и следовало ожидать, распадается на два действительных уравнения. В случае симметричной задачи (трещина нормального разрыва), когда на берегах трещины действуют только нормальные усилия $p(x)$, находим

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\eta-\xi}+\lambda\int_0^\infty\frac{\left(-1-2\tau-2\tau^2+e^{-2\tau}\right)}{sh2\tau+2\tau}\sin\lambda\tau(\eta-\xi)d\eta\right]\upsilon'(\eta)\,d\eta=\pi\,p(\xi)\,,\ |\xi|<1\,. \quad (9)$$

Если воспользоваться значением интеграла $\int_0^\infty \sin\tau x\,dx=\frac{1}{x}$, принимаемом в обобщенном смысле Абеля, интегральное уравнение можно записать в виде [2]

$$\int_{-1}^{1}\upsilon'(\eta)K_1(\eta-\xi)d\eta=\pi\,p(\xi)\,,\ \ |\xi|<1\,,\ \ K_1(\eta)=2\lambda\int_0^\infty\frac{sh^2\tau-\tau^2}{sh2\tau+2\tau}\sin\lambda\tau\eta\,d\eta\,, \qquad (10)$$

которое преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма

$$\Phi(\xi)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\xi\frac{p(\eta)d\eta}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}+\int_0^1F(\eta,\xi)\Phi(\eta)d\eta\,, \qquad 0\le\eta<1\,, \qquad (11)$$

где $\quad F(\eta,\xi)=\lambda^2\eta\int_0^\infty\frac{1+2\tau+2\tau^2-e^{-2\tau}}{sh2\tau+2\tau}J_0(\lambda\eta\tau)J_0(\lambda\xi\tau)\tau\,d\tau\,,$

$$\upsilon(x)=\begin{cases}0, & x>\ell\\ \displaystyle\int_x^\ell\frac{u\Phi(u)du}{\sqrt{u^2-x^2}}, & 0\le x<\ell\end{cases}$$

$J_0(u)$ – функция Бесселя первого порядка.

При действии только касательных усилий на берегах трещины (трещина поперечного сдвига) интегральное уравнение преобразуется к виду

$$\int_{-1}^{1}u'(\eta)K_2(\eta-\xi)d\eta=\pi\,p_1(\xi)\,, \qquad |\xi|<1 \qquad (12)$$

где $K_2(\eta)=\lambda\int_0^\infty L(\tau)\sin\lambda\tau\eta\,d\eta\,;\qquad L(\tau)=2\frac{sh^2\tau-\tau^2}{sh2\tau-2\tau}$

Коэффициенты интенсивности напряжений находим по формулам

$$K_I^{\pm} - iK_{II}^{\pm} = \mp \lim_{x \to \pm \ell} \left[\sqrt{\frac{\pi\left(\ell^2 - x^2\right)}{\ell}} g'(x) \right].$$

Решения интегральных уравнений сводились к решению системы неоднородных алгебраических уравнений $M \times M$. Проведенный численный анализ показывает, что для получения устойчивого значения искомых функций необходимо взять $M \geq 20$.

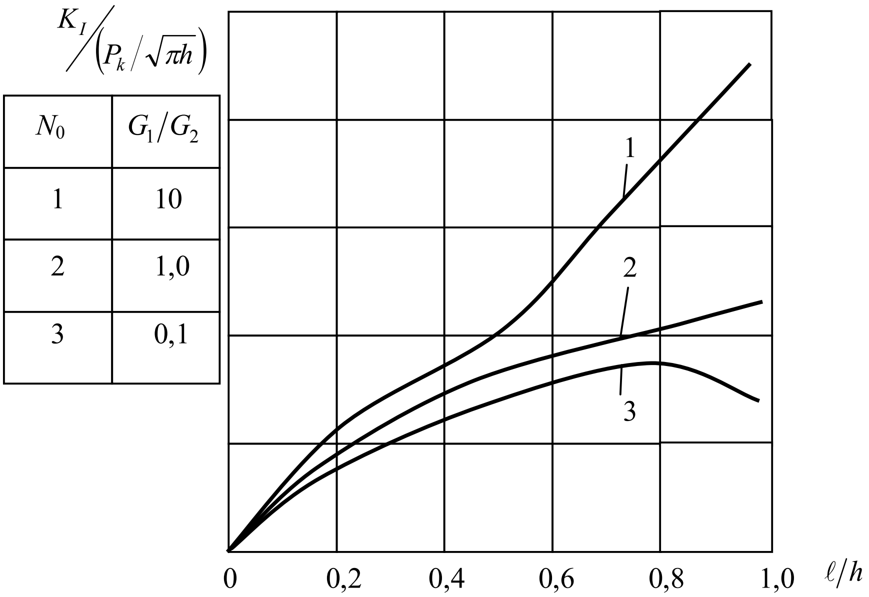
Функции $K_1(\eta, \xi)$ и $K_2(\eta, \xi)$ вычислялись так. Вместо $\int\limits_0^{\infty}$ взято было $\int\limits_0^{A}$.

Анализ показывает, что подынтегральные функции экспоненциально убывают при $\tau \to \infty$. Для того, чтобы исследовать как влияет значение A на значение искомых функций, были взяты следующие значения A = 10, 20, 30, 100. При этом найдено, что если A = 100, то значения функций $K_1(\eta,\xi)$ и $K_2(\eta,\xi)$ при фиксированном значении $\eta, \xi \in [-1, 1]$ с точностью 10^{-4} равно значению функции $K_1(\eta,\xi)$ и $K_2(\eta,\xi)$, соответственно, при A = 10.

Для численного расчета принято A = 10.

Анализ результатов вычислений для трещины нормального разрыва (рис. 2) позволяет сделать следующие выводы:

а) если $G_1/G_2 > 1$, то при постоянной внешней нагрузке P_k и при фиксированных значениях других параметров задачи с увеличением длины трещины коэффициент интенсивности напряжений K_I увеличивается;



N_0	G_1/G_2
1	10
2	1,0
3	0,1

Рис. 2. Зависимости коэффициента интенсивности напряжения K_I от длины трещины

б) если $G_1/G_2 < 1$, то при постоянной внешней нагрузке и при фиксированных значениях других параметров задачи, безразмерный коэффициент интенсивности напряжений $K_I \big/ \left(P/\sqrt{\pi h}\right)$ с увеличением длины трещины сначала увеличивается, а затем, начиная с некоторого значения l/h, медленно уменьшается.

Приравнивая K_I на трещиностойкость K_{Ic} покрытия, содержащего в сечении трещину, находим критическую нагрузку или критическую длину трещины, приводящих разрушению дорожного покрытия.

Для облегчения расчетов при вычислении коэффициентов интенсивности напряжений поступали следующим образом. Находили максимальные значения усилий $p(x)$ и $p_1(x)$: $\sigma_0 = \max p(x)$; $\tau_0 = \max p_1(x)$, $|x| \le \ell$.

Тогда для коэффициентов интенсивности напряжений можно использовать следующие известные формулы

$$K_I = 2\sigma_0\sqrt{\pi\ell}\sqrt{\frac{3}{\pi\lambda}}th\sqrt{\frac{\pi\lambda}{3}}f_1(\lambda); \qquad (13)$$

$$f_1(\lambda) = f(\lambda) + (0{,}6733 + \lambda)^{-1}\left(0{,}2409 + 0{,}4052\lambda + 0{,}162\lambda^2 + 0{,}3601\lambda^3\right)e^{-\lambda};$$

$$f(\lambda) = (0{,}6733 + \lambda)^{-1}\left(0{,}0957 + 0{,}4533\lambda + 0{,}6733\lambda^2 + \lambda^2/3\right);$$

$K_{II} = \dfrac{2\tau_0}{\sqrt{\pi}}K(th\pi\lambda)\sqrt{\dfrac{\ell th\pi\lambda}{\pi\lambda}}$, где $K(a)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Другой способ учета усилий $p(x)$ и $p_1(x)$ заключается в том, что вместо истинного их распределения: учитываем их результирующую силу, приложенную в ее середине, т.е.

$$P = \int_{-\ell}^{\ell} p(x)\,dx; \quad Q = \int_{-\ell}^{\ell} p_1(x)\,dx.$$

Тогда для коэффициентов интенсивности напряжений, имеем

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi\ell}}\left(1 + 2{,}2838\lambda^2 - 0{,}7854\lambda^4\right) + \mathrm{O}\left(\lambda^6\right); \qquad (14)$$

$$K_{II} = \frac{Q}{\sqrt{\pi\ell}}\left(1 + 1{,}3338\lambda^2 - 1{,}0440\lambda^4\right) + \mathrm{O}\left(\lambda^6\right)$$

При больших значениях λ: $K_I = P\lambda\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\ell}}$; $K_{II} = Q\sqrt{\dfrac{\lambda}{\ell}cth\pi\lambda}$.

С помощью формул (13), (14) для коэффициентов интенсивности напряжений и критерия хрупкого разрушения Ирвина [3] можно исследовать предельное состояние дорожного покрытия, имеющего в сечении продольную трещину.

Литература

1. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 367 с.

2. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976. – 443 с.

3. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения.– М.: Наука, 1974.– 640 с.

CRACK IN SECTION OF THE ROADWAY COVERING

Sh.G. Gasanov

The plane problem in the longitudinal crack arising in section of a roadway covering, linked with the elastic basis from other material when normal loading (pressure of a wheel) is enclosed to a surface of a covering is investigated.