Метод динамического расчета конструкций защитных сооружений на основе решения уравнения движения

В.Н. ШУЛЬГИН[*], *канд. техн. наук.*
В.И. ЛАРИОНОВ[**], *д-р техн. наук.*
[*]*Академия Государственной противопожарной службы, Москва*
[**] *Центр исследований экстремальных ситуаций, Москва*

В этом методе конструкцию сводят к системе с одной степенью свободы путем приведения дифференциального уравнения движения элемента 4-го порядка в частных производных к решению дифференциальных уравнений 2-го порядка. Решение уравнения движения балки представляем в виде произведения двух деформаций

$$y(x,t) = pF(x)T(t), \tag{1}$$

где $F(x)$ – функция, равная перемещениям балки от действия статической нагрузки, $T(t)$ – функция, описывающая перемещение конструкций во времени; p–

наибольшее значение динамической нагрузки. Одна из этих функций $F(x)$ зависит лишь от координаты x, тогда как другая $T(t)$ является лишь функцией времени t. Функцию $T(t)$ обычно называют функцией динамичности. Таким образом, динамическую нагрузку представляем в следующем виде

$$P(x,t) = pf_1(x)f(t), \tag{2}$$

где $f_1(x)$ и $f(t)$ – функции, характеризующие изменение нагрузки по пролету и времени. Далее умножив $L(x,t)$ на функцию $F(x)$ и проинтегрировав по пролету, согласно методу Бубнова-Галеркина

$$\int_0^l L(x,t) \cdot F(x)dx = 0, \tag{3}$$

получим дифференциальное уравнение для функции $T(t)$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = \omega^2 f(t), \tag{4}$$

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{B}{m}},$$

где ω – круговая частота колебаний балки; B – жесткость балки; m – масса, приходящаяся на единицу длины балки; l – расчетный пролет балки.

Жесткость балки определяется по формуле

$$B = 0{,}85E_sA_s(h_0 - x)(h_0 - 0{,}5x), \tag{5}$$

где E_s – модуль упругости арматуры; A_s – площадь арматуры в растянутой зоне; x – высота сжатой зоны бетона; h_0 – толщина балки без учета защитного слоя бетона в растянутой зоне.

Низшие частоты собственных колебаний балок определяются по формулам

- для шарнирно-опертых балок:

$$\omega = \frac{9{,}876}{l^2}\sqrt{\frac{B}{m}}; \tag{6}$$

- для балок с жестко защемленными концами:

$$\omega = \frac{22{,}37}{l^2}\sqrt{\frac{B}{m}}; \tag{7}$$

где $m = q_{cT}/g$ – сумма погонных постоянных и временно длительно действующих нагрузок; $g = 9{,}8$ м/с^2.

Уравнение (4) представляет неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Найдем решение уравнения для нагрузки вида $p(t)=P(1- t/\tau_{эф})$. Общее решение уравнения будет иметь вид

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0; \qquad T(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t, \tag{8}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Частное решение функции $T(t)$ имеет вид

$$T(t) = 1 - t/\tau_{эф}. \tag{9}$$

Общее решение неоднородного дифференцированного уравнения характеризуется формулой

$$T(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + 1 - t/\tau_{эф}. \tag{10}$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий $T(0) = 0$; $\dot{T}(0) = 0$.

Имеем $T(0) = C_1 + 1$, то есть $C_1 = -1$; $\dot{T}(0) = \omega C_2 - 1/\tau_{эф} = 0$; $C_2 = 1/(\omega\tau_{эф})$. Таким образом,

$$T(t) = 1 - t/\tau_{эф} - \cos t + \sin\omega t/(\omega\tau_{эф}). \tag{11}$$

Функцию $F(x)$ определяют из решения уравнения изгиба балки для условий статики

$$B\partial^4 y/\partial x^4 = f_1(x). \tag{12}$$

При условии, что $f_1(x) = 1$, функция $F(x)$ имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{12B}\left(\frac{x^4}{2}-lx^3+\frac{l^3x}{2}\right). \qquad (13)$$

В этом случае прогиб в середине пролета $l/2$ от единичной статической нагрузки составит

$$F\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{5}{384}\cdot\frac{l^4}{B} \qquad (14)$$

Подставляя уравнение (14) в (5), получим $y\left(\frac{l}{2},t\right)=\frac{5}{384}\cdot\frac{pl^4}{B}\cdot T(t).$ (15)

Подставляя в уравнение (15) функцию $T(t)$ (11), получим прогиб для середины пролета шарнирно опертой балки

$$y(t)=\frac{5}{344}\cdot\frac{Pl^4}{B}\left(1-\frac{t}{\tau_{эф}}-\cos\omega t+\sin\omega t/(\omega\tau_{эф})\right)\cdot \qquad (16)$$

При расчете защемленной на опорах балки прогиб посредине пролета будет равен

$$y=\frac{Pl^4}{384B}(1-\frac{t}{\tau_{эф}}\cos\omega t+\sin\omega t/(\omega\tau_{эф})), \qquad (17)$$

где ω – частота собственных колебаний балки, защемленной на опорах, определяется по формуле (7).

Максимальное перемещение система достигает в момент времени $t_{макс}$, при котором $\dot{T}(t)=0$. Максимальное значение функции динамичности для внезапно приложенной нагрузки, изменяющейся по треугольному закону, определяется по формуле (11) при значении $t = t_{макс}$. Подставляя в левую часть уравнения предельное значение упругого прогиба, можно получить значение динамической нагрузки P, при которой максимальный прогиб элемента достигает предельного упругого прогиба.

Предельное значение упругого прогиба можно определить из соотношений

$$y_0=\frac{5pl^4}{384B}T(t_{макс})=\frac{5l^2}{48B}\cdot\frac{Pl^2}{8}T(t_{макс})=\frac{5l^2}{48B}M_0=\frac{M_0l^2}{9,6B}. \qquad (18)$$

Для защемленной на опорах балки значение упругого прогиба равно

$$y_0=\frac{pl^4}{384B}T(t_{max})=\frac{l^2}{32B}\frac{pl^2}{12}T(t_{max})=\frac{M_0l^2}{32B}\cdot \qquad (19)$$

Существуют и другие методы приведения балки к системе с одной степенью свободы. Так, в вариационном методе расчета исходят не из дифференциальных уравнений движения конструкции, а непосредственно из вариационных принципов, выражающих общие законы механики. Согласно этим принципам, система движется в промежутке времени от t_1 до t_2 таким образом, что интеграл $У=\int_{t_1}^{t_2}(T-U+W)dt$ принимает стационарное значение, где T – кинетическая энергия системы; U – потенциальная энергия; W – потенциал внешней нагрузки.

Литература

1. *Шульгин В.Н.* Теоретические основы инженерной защиты населения: Монография. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2007. – 556с.

2. *Шульгин В.Н., Ларионов В.И.* Инженерная защита населения. Особенности расчета защитных сооружений. Учебное пособие. – Новогорск: Академия АГЗ МЧС России, 2000. – 225с.

METHOD OF DYNAMIC CALCULATION OF PROTECTIVE STRUCTURES ON THE BASIS OF THE SOLUTION OF AN EQUATION

OF TRAFFIC

V.N. Shulgin, V.I. Larionov