

Расчет строительных конструкций

ДЕФОРМАЦИИ МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА, ВЫЗВАННЫЕ СМЕЩЕНИЕМ ОСНОВАНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Р.Г. ЯКУПОВ, д-р техн. наук, профессор

Д.М. ЗАРИПОВ, канд. ф-м.н.

Институт механики Уфимского научного центра РАН

Геофизические исследования в области структурной геологии показывают, что тектоническая активность и развитие структурных форм продолжается и в современный период [1-3]. Тектонические движения имеют различную пространственную ориентацию, происходят с преобладающей вертикальной или горизонтальной компонентой, причем смещения происходят либо плавно, либо импульсивно или же временно прекращаются. В результате изменяется рельеф местности. Сказанное подтверждается визуальными наблюдениями и другими материалами: районы выхода на дневную поверхность фронтальных частей нарушений земной коры подвержены оврагообразованию, развитию карста и суффозии, усилению оползневых явлений, деформации асфальтового покрытия автодорог и т.д. Ниже рассматриваем деформации и напряженное состояние магистрального трубопровода после его прокладки в результате сдвигов его основания на отдельных участках.

1. Трубопровод расположен перпендикулярно к линии сдвига.

Блоки 1 и 2 (см. на рис.1), смещаются один относительно другого в горизонтальной плоскости в направлении, показанном стрелками. След плоскости, в которой происходит сдвиг, отмечен на рисунке зигзагообразной линией. Трубопровод расположен перпендикулярно к линии сдвига, деформированное положение его показано жирной линией.

Поместим начало координат xOy в точке O недеформированного положения трубопровода, направив ось x влево вдоль его оси, ось y – вниз,

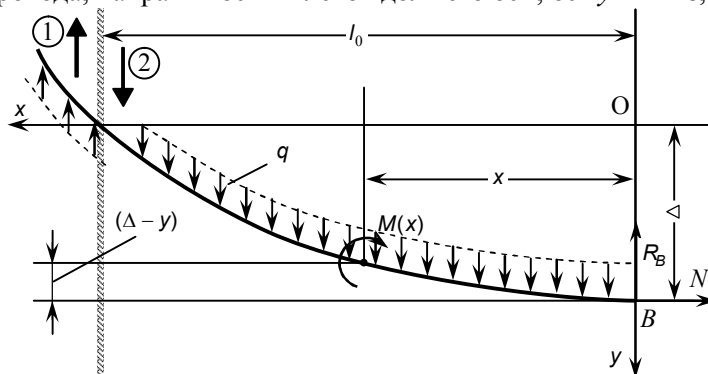


Рис. 1

как показано на рисунке. В точке B на расстоянии l_0 от линии сдвига трубопровод отрывается от грунта. В области $x < 0$ трубопровод остается параллельным оси x и совершает совместное движение с грунтом. Слева от линии сдвига упругая линия кососимметрична по отношению к оси x и точку, аналогичную точке B , обозначим B_1 . Длина l_0 определяется в процессе решения. В точках B и B_1 возникает сосредоточенная сила R_B [4].

В трубопроводе находится жидкость под давлением p . Под действием давления жидкости и в результате разности температур ΔT в момент строительства и в рассматриваемый момент времени в нем возникает продольная сила

$$N = \pi R^2 \rho \pm 2\pi R h \alpha^* (\Delta T) E,$$

где R и h – радиус срединной поверхности и толщина стенки трубы, α^* и E – коэффициент температурного расширения и модуль упругости материала трубы. Смещение точки B обозначим через Δ .

Диаграмма сопротивления грунта поперечным смещениям трубы в горизонтальной плоскости совпадает с диаграммой деформирования упругоидеальнопластического тела [5]. При малых перемещениях трубы сопротивление грунта пропорционально перемещению

$$q_1 = \alpha y, \quad (1)$$

где $\alpha = 0.12 E_{\text{гр}} \sqrt{D/l_*} / (1 - \mu_{\text{гр}}^2)$, $E_{\text{гр}}$, $\mu_{\text{гр}}$ – модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта, D – диаметр трубы, l_* – единичная длина, y – смещение трубы (прогиб). Соотношение (1) справедливо в диапазоне перемещений от 1 до 6 см. При больших смещениях трубы сопротивление грунта постоянно, не зависит от перемещения и равно

$$q_2 = R_{\text{гр}} D, \quad (2)$$

Здесь $R_{\text{гр}}$ – условная несущая способность грунта [5].

Принимаем, что отношение $\Delta/l_0 \ll 1$ и нагрузка на единицу длины проекции искривленного трубопровода на его первоначальное направление также равна q . Рассекаем трубопровод в точках B и B_1 , прикладываем силы R_B . Из уравнения равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки A находим

$$R_B = \frac{q l_0}{2} \mp \frac{N \Delta}{l_0}. \quad (3)$$

Здесь и ниже в выражениях, имеющих слагаемые с двойным знаком, верхний знак берем, если сила N растягивающая (положительная), нижний знак – если сила N сжимающая (отрицательная). Изгибающий момент в сечении на произвольном расстоянии x равен

$$M(x) = R_B x - \frac{q x^2}{2} \pm N(\Delta - y). \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии трубопровода имеет вид

$$y'' = \frac{1}{EJ} \left[\frac{q x^2}{2} - \frac{q l_0 x}{2} \pm N \Delta \left(\frac{x}{l_0} - 1 \right) \pm N y \right]. \quad (5)$$

где штрих означает производную по x . Пусть смещения трубы малы и реакция грунта определяется выражением (1). Подставляя в (5) вместо q выражение (1), получим дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$y'' + (-k_0 x^2 + k_0 l_0 x \mp k^2) y = \pm k^2 \Delta [x/l_0 - 1], \quad (6)$$

где $k_0 = \alpha/(2EJ)$, $k^2 = N/(EJ)$. Однородное уравнение (6) совпадает с уравнением 2.55 (стр.379) в [6], если в последнем принять $a = b = 0$. Следуя [6], принимаем $y = u(x) e^{s x^2}$, где s – корень уравнения $4s^2 - k_0 = 0$ и равен $s \pm \sqrt{k_0}/2$, однородное уравнение (6) приводим к виду

$$u'' + 2\sqrt{k_0} x u' + (k_0 l_0 x + \sqrt{k_0} \mp k^2) u = 0. \quad (7)$$

Здесь использовано положительное значение s . Заменой

$$u(x) = \eta(\xi) \exp\left(-\frac{\sqrt{k_0}}{2} l_0 x\right), \quad \xi = \sqrt{2\sqrt{k_0}} \left(x - \frac{l_0}{2}\right)$$

уравнение (7) сводится к уравнению

$$\eta'' + \xi\eta' + b\eta = 0, \quad (8)$$

где $b = \frac{\sqrt{k_0}}{4} l_0^2 + \frac{\sqrt{k_0} \mp k^2}{2\sqrt{k_0}}$, $\frac{\xi^2}{2} = \sqrt{k_0} \left(x - \frac{l_0}{2}\right)^2$. Уравнение (8) совпадает с 2.273 (10) в

$$[6] \text{ и имеет решение } \eta = \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \eta\left(\frac{b}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{\xi^2}{2}\right). \quad (9)$$

Используем обозначение $\bar{k} = \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$, $m = \frac{1}{4}$ и выражение (9) записываем так

$$\eta = \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \eta\left(\bar{k}, m; \frac{\xi^2}{2}\right),$$

где $\eta(\bar{k}, m; \xi^2/2)$ – функции Уиттекера; в [7] они обозначены через $M_{\bar{k}, m}(\xi)$ и $M_{\bar{k}, -m}(\xi)$ и представляют собой линейно-независимые частные решения однородного уравнения Уиттекера. Общим решением (8) будет

$$\eta = C_1 M_{\bar{k}, m}(\xi) + C_2 M_{\bar{k}, -m}(\xi), \quad (10)$$

где $M_{\bar{k}, m}(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{\xi}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + m - \bar{k}, 2m + 1, \xi\right)$,

${}_1F_1(a, b, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)x^n}{b(b+1)\dots(b+n-1)n!}$ – ряд Похгаммера; в [8] его называют вырожденной гипергеометрической функцией и обозначают $\Phi(a, c, x)$, где $a = 1/2 + m - \bar{k}$, $b = 2m + 1$. Для функции $\Phi(a, c, x)$ справедливо правило дифференцирования

$$\frac{d^n \Phi}{dx^n} = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(a)} \Phi(a+n, c+n, x); \quad \frac{d\Phi}{dx} = \frac{a}{c} \Phi(a+1, c+1, x).$$

После перехода к исходной функции y общее решение однородного уравнения (6) запишется в виде

$$y(\xi) = C_1(-y_1) + C_2(-y_2), \quad (11)$$

где $y_1 = \xi^m e^{-\frac{\xi}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + m - \bar{k}, 2m + 1, \frac{\xi^2}{2}\right)$, $y_2 = \xi^{-m} e^{-\frac{\xi}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - m - \bar{k}, -2m + 1, \frac{\xi^2}{2}\right)$.

Производные функции y_1 и y_2 по ξ имеют вид

$$\begin{aligned} y_1' &= \left(m\xi^{m-1} - \frac{\xi^m}{2}\right) e^{-\frac{\xi}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + m - \bar{k}, 2m + 1, \frac{\xi^2}{2}\right) + \\ &+ \frac{(2m+1-2\bar{k})\xi}{2(2m+1)} \xi^m e^{-\frac{\xi}{2}} {}_1F_1\left(\frac{3}{2} + m - \bar{k}, 2m + 2, \frac{\xi^2}{2}\right); \\ y_2' &= -\frac{\xi^{-m} e^{-\frac{\xi}{2}} (1+2m\xi^{-1})}{2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - m - \bar{k}, -2m + 1, \frac{\xi^2}{2}\right) + \\ &+ \frac{\xi^{-m} e^{-\frac{\xi}{2}} (1-2m-2\bar{k})\xi}{2(1-2m)} {}_1F_1\left(\frac{3}{2} - m - \bar{k}, -2m + 2, \frac{\xi^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Зависимость ξ от x приведена в уравнении (8).

Частное решение V неоднородного уравнения (6) находим методом неопределенных коэффициентов в форме $V = C_1(\xi)y_1(\xi) + C_2(\xi)y_2(\xi)$, где

$$C_1(\xi) = \int \frac{f(\xi)d\xi}{y_1(\xi)\ln \frac{y_2(\xi)}{y_1(\xi)}}; C_2(\xi) = \int \frac{f(\xi)d\xi}{y_2(\xi)\ln \frac{y_2(\xi)}{y_1(\xi)}}; f(\xi) = \frac{k^2\Delta}{l_0} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2\sqrt{k_0}}} - \frac{l_0}{2} \right).$$

Постоянные интегрирования в (11) определяем с помощью граничных условий

$$y = \Delta, y' = 0 \text{ при } x = 0, \xi = -\xi_0; \xi_0 = \frac{\sqrt{2\sqrt{k_0}}l_0}{2}. \quad (12)$$

Имеем

$$y(\xi) = \Delta \frac{y_1(\xi)y_2'(-\xi_0) - y_1'(-\xi_0)y_2(\xi)}{y_1(-\xi_0)y_2'(-\xi_0) - y_1'(-\xi_0)y_2(-\xi_0)} \mp \bar{C}_1(\xi)y_1(\xi) \pm \bar{C}_2y_2(\xi), \quad (13)$$

где

$$\bar{C}_1(\xi) = \int_{-\xi_0}^{\xi} \frac{f(\xi)d\xi}{y_1(\xi)\ln \frac{y_2(\xi)}{y_1(\xi)}}; \bar{C}_2(\xi) = \int_{-\xi_0}^{\xi} \frac{f(\xi)d\xi}{y_2(\xi)\ln \frac{y_2(\xi)}{y_1(\xi)}}.$$

Длину l_0 находим из (13), используя условие $y = 0$ при $x = l_0$ ($\xi = \xi_0$).

Выражение для изгибающего момента имеет вид

$$M(x) = \frac{q_1x}{2}(l_0 - x) \mp N \left[y - \Delta \left(1 - \frac{x}{l_0} \right) \right].$$

Координату опасного сечения x_* находим из условия $Q(x) = 0$ по формуле

$$x_* = \frac{l_0}{2} \mp \frac{N\Delta}{q_1l_0}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что при $N = 0$ наибольший изгибающий момент возникает в сечении $x_* = l_0/2$. Более точное значение x_* следует из условия $dM/dx = 0$.

Пусть перемещение трубопровода больше предельного значения. Сопротивление грунта определяем по формуле (2). Тогда дифференциальное уравнение упругой линии (5) принимает вид

$$y'' \mp k^2y = k_1x(x - l_0) \pm k^2\Delta \left(\frac{x}{l_0} - 1 \right), \quad (15)$$

где $k_1 = q_2/(2EJ)$. В случае $N > 0$ решение уравнения (15), удовлетворяющее граничным условиям (12), запишется так

$$y = \Delta - \frac{q_2x^2}{2N} + \frac{q_2}{k^2N}(\operatorname{ch}kx - 1) - \frac{q_2}{k} \left(\frac{l_0}{2N} - \frac{\Delta}{q_2l_0} \right) (\operatorname{sh}kx - kx), \quad (16)$$

изгибающий момент равен $M(x) = \frac{q_2}{k^2}(1 - \operatorname{ch}kx) + \frac{1}{k} \left(\frac{q_2l_0}{2} - \frac{N\Delta}{l_0} \right) \operatorname{sh}kx$.

При $N < 0$ имеем $y = \Delta + \frac{q_2x^2}{2N} + \frac{q_2}{k^2N}(\cos kx - 1) + \frac{q_2}{k} \left(\frac{l_0}{2N} + \frac{\Delta}{q_2l_0} \right) (\sin kx - kx), (17)$

$$M(x) = \frac{q_2}{k^2}(\cos kx - 1) + \frac{1}{k} \left(\frac{q_2l_0}{2} + \frac{N\Delta}{l_0} \right) \sin kx.$$

Если $N = 0$, то $y = \Delta + \frac{q_2x^3}{12EJ} \left(\frac{x}{2} - l_0 \right); M_{\max} = \frac{q_1l_0^2}{8}; l_0 = \sqrt[4]{\frac{24EJ\Delta}{q_2}}$.

Координату опасного сечения находим из условия $dM/dx = 0$ по формуле

$$\operatorname{tg} kx_* = k \left(\frac{l_0}{2} \mp \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right). \quad (18)$$

Если $kx_* \ll 1$, то, пользуясь известным разложением в ряд $\operatorname{tg} z = z + z^3/3 + \dots$ и оставляя в разложении первое слагаемое, для x_* получим более простую формулу:

$$x_* = \frac{l_0}{2} \mp \frac{N\Delta}{q_2 l_0}.$$

Используя условие $y = 0$ при $x = l_0$, находим уравнение для определения l_0 :

$$N > 0: \quad 1 - \operatorname{ch} kl_0 + k \left(\frac{l_0}{2} - \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) \operatorname{sh} kl_0 = 0;$$

$$N < 0: \quad 1 - \cos kl_0 - k \left(\frac{l_0}{2} + \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) \sin kl_0 = 0.$$

2. Трубопровод расположен под углом θ к линии сдвига. На рис. 2 показано деформированное положение трубопровода, направления смещения блоков, приведены геометрические и силовые параметры задачи. Проводим нормальное сечение трубопровода на расстоянии l_1 слева и справа от линии сдвига. Из уравнения равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки O_1

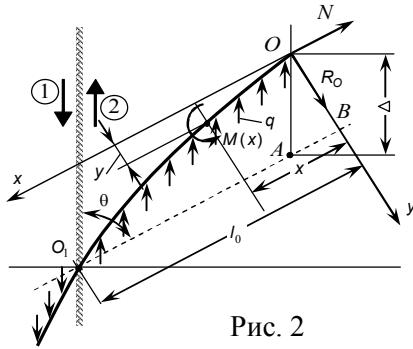


Рис. 2

определяем $R_O = \left(\frac{q_2 l_0}{2} \mp \frac{N\Delta}{l_0} \right) \sin \theta$.

Внутренний момент на произвольном расстоянии x равен

$$M(x) = -\frac{q_2 x^2}{2} \sin \theta - R_O x \pm Ny.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии трубопровода имеет вид

$$EJy'' = -\frac{q_2 x^2}{2} \sin \theta + R_O x \pm Ny. \quad (19)$$

Здесь штрих означает дифференцирование

по x . Используем обозначения

$$k^2 = \frac{N}{EJ}; \quad k_1 = \frac{q_2 \sin \theta}{2EJ}; \quad k_2 = \frac{R_O}{EJ}$$

и уравнение (19) приводим к виду $y'' \mp k^2 y = k_2 x - k_1 x^2$. (20)

Пусть сила N растягивающая. Тогда решение уравнения (20), удовлетворяющее условию $y = y' = 0$ при $x = 0$ записываем так

$$y(x) = \frac{q_2 \sin \theta}{N} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{k^2} (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{1}{k} \left(\frac{l_0}{2} - \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) (\operatorname{sh} kx - kx) \right] \quad (21)$$

Изгибающий момент определяется по формуле

$$M(x) = q_2 \sin \theta \left[\frac{1}{k} \left(\frac{l_0}{2} - \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) \operatorname{sh} kx - \frac{1}{k^2} (\operatorname{ch} kx - 1) \right]. \quad (22)$$

Координату опасного сечения x_* по-прежнему определяем по формуле

$$\operatorname{tg} kx_* = k \left(\frac{l_0}{2} - \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right),$$

Используя условие $y = \Delta \sin \theta$ при $x = l_0$ из выражения (21) находим уравнение для определения l_0 :

$$1 - \operatorname{ch} kl_0 + k \left(\frac{l_0}{2} - \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) \operatorname{sh} kl_0 = 0.$$

В случае $N < 0$ выражения для прогиба, изгибающего момента и уравнение для определения x_* и l_0 имеют вид

$$y = \frac{q_2 \sin \theta}{N} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{k^2} (\cos kx - 1) + \frac{1}{k} \left(\frac{l_0}{2} + \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) (\sin kx - kx) \right];$$

$$M(x) = -q_2 \sin \theta \left[x^2 - \frac{1}{k^2} (\cos kx - 1) + \frac{1}{k} \left(\frac{l_0}{2} + \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) (\sin kx - 2kx) \right];$$

$$2kx_* + \sin kx_* + k \left(\frac{l_0}{2} + \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) (\cos kx_* + 2) = 0;$$

$$\frac{2N\Delta}{q_2} + \frac{1}{k^2} (\cos kl_0 - 1) - \frac{1}{k} \left(\frac{l_0}{2} + \frac{N\Delta}{q_2 l_0} \right) \sin kl_0.$$

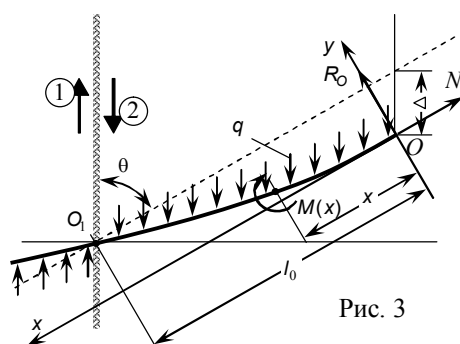
Если $N = 0$, то $y = \frac{q_2 x^3 \sin \theta}{12EJ} \left(l_0 - \frac{x}{2} \right)$; $M(x) = \frac{qx \sin \theta}{2} (l_0 - x)$; (24)

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении $x_* = l_0/2$, где l_0 определяется из выражения $l_0 = \sqrt[4]{24EJ\Delta/q_2}$. На рис.3 приведена расчетная схема для движения блоков в направлении, противоположном рассмотренному выше. Здесь справедливы формулы (21)–(24).

3. Определение предельного значения смещения Δ_* .

Элемент трубы находится в плоском напряженном состоянии, на гранях элемента возникают напряжения $\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{\pi Dh} + \frac{M(x_*)}{\pi R^2 h}$, $\sigma_\varphi = \frac{pR}{h}$.

Для определения $\Delta_{пр}$ используем энергетическую теорию прочности и за-



пишем $\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2$,

где $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_\varphi$, σ_T - предел текучести материала трубы. Если $\Delta T = 0$, то $\sigma_N = pR/2h$ и из условия прочности находим предельное значение изгибающего момента

$$M_{пр} = \pi R^2 h \sqrt{\sigma_T^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{pR}{h} \right)^2}.$$

4. Численный пример.

В стальной трубе радиусом срединной поверхности $R = 0,51\text{м}$, толщиной стенки $h = 0,011\text{м}$ содержится жидкость под давлением $p = 50\text{атм}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{МПа}$, $\sigma_T = 300\text{МПа}$, $\Delta T = 0$. Труба находится в песчаном грунте с параметрами $E_{тр} = 30\text{МПа}$, $\mu_{тр} = 0,25$, $R_{тр} = 0,4\text{МПа}$ [5].

По результатам расчетов построены графики. На рис. 4 приведена кривая зависимости величины деформированного участка трубопровода l_0 от смещения Δ . На величину l_0 не влияет угол θ , а также давление жидкости и соответственно растягивающая сила N .

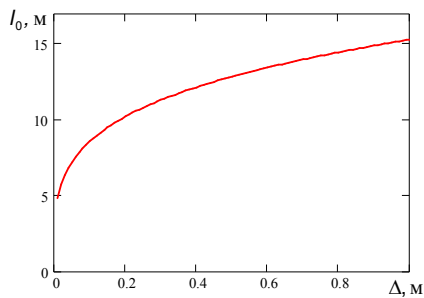


Рис. 4

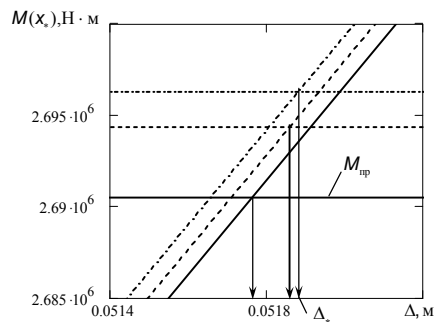


Рис. 5

На рис. 5 показаны графики изменения изгибающего момента в опасном сечении $M(x_*)$ в зависимости от Δ при $\theta = 0$ разных значениях смещения. Горизонтальные линии представляют предельный момент $M_{пр}$. Сплошные линии соответствуют давлению $p = 50$ атм, штриховые и штрихпунктирные линии –

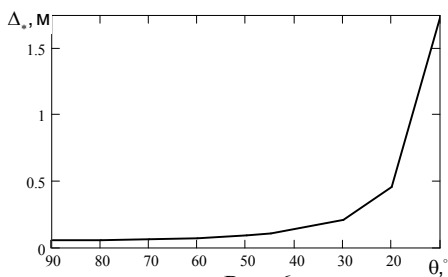


Рис. 6

давлению $p = 30$ и $p = 10$ атм. В диапазоне $0 < \theta \leq \pi/2$ влияние на Δ_* давления жидкости в трубопроводе и соответственно растягивающей силы N не превышает 1%. На рис. 6 дан график зависимости предельного смещения Δ_* от углового положения трубопровода θ . Из графика следует, что с увеличением

θ , величина предельного смещения Δ_* уменьшается и наоборот. Как видно из графика в диапазоне изменения $60^\circ < \theta < 90^\circ$ величина Δ_* изменяется незначительно.

Л и т е р а т у р а

1. Казанцев Ю.В., Казанцева Т.Т. Структурная геология юго-востока Восточно-Европейской платформы. – Уфа: Гилем, 2001. – 232 с.
2. Современная тектоническая активность древних дислокаций земной коры / Ю.В. Казанцев, Т.Т. Казанцева // Уралэкология. Природные ресурсы – 2005: Сб. тр. Всеросс. научн.-техн. конференции – Уфа-Москва, 2005. – С. 126-127.
3. Современная геодинамика как фактор восполнения запасов углеводородного сырья / Ю.В. Казанцев, М.А. Камалетдинов // Уралэкология. Природные ресурсы – 2005: Сб. тр. Всеросс. научн.-техн. конференции – Уфа-Москва, 2005. – С. 128.
4. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Гостехиздат, 1953. – 238 с.
5. Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. – М.: Недра, 1982. – 342 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
7. Бейтмэн Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции и функции Лежандра. – М.: Наука, 1965.
8. Янке Е., Эмде Ф., Лецк Ф. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). – М.: Наука, 1968.

DEFORMATIONS OF THE MAIN PIPELINE CAUSED BY THE DISPLACEMENTS OF THE GROUND IN A HORIZONTAL PLANE

Yakupov R.G., Zaripov D.M.