

## Устойчивость упругих оболочек

### О НАЧАЛЬНОМ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И МИНИМАЛЬНОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ БАРЬЕРЕ

Г.А. МАНУЙЛОВ, *к.т.н., доцент*

М.М. БЕГИЧЕВ, *к.т.н.*

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ),  
127994, г. Москва, ул. Образцова, д 9, стр. 9; [poxonius@mail.ru](mailto:poxonius@mail.ru)

*В геометрически нелинейной постановке рассмотрены особенности формирования начального послекритического равновесия продольно сжатой упругой круговой цилиндрической оболочки. Определяется характер изменения энергетического барьера исходного равновесия в зависимости от величины сжимающей нагрузки.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** устойчивость, оболочка, бифуркация, энергетический барьер, максвеллова сила.

Потеря устойчивости круговой продольно сжатой цилиндрической оболочки – классическая задача теории упругой устойчивости. Прошло сто лет с момента появления первых теоретических решений С.П. Тимошенко и Р. Лоренца для критической силы. Однако до сих пор проектировщики не имеют достаточно обоснованной величины проектной сжимающей нагрузки. Надежды исследователей на возможность использования для этой цели нижней или верхней критических нагрузок не оправдались. В последнее время повысился интерес к определению минимального энергетического барьера (для исходного равновесия центрального сжатия) по отношению к некоторым внешним поперечным воздействиям и возмущениям. В настоящей работе рассмотрены особенности определения минимального энергетического барьера  $E_\delta$  в зависимости от величины сжимающей нагрузки  $P$ . Однако здесь неизбежно всплывает проблема определения начального послекритического равновесия (перед хлопком), а также некоторые особенности трансформации первых собственных форм потери устойчивости оболочки.

#### **1. Формирование начального послекритического равновесия.**

Задача устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки рассматривается в геометрически нелинейной постановке, в условиях кинематического нагружения. Вследствие развития осесимметричного краевого эффекта в приопорных зонах оболочки эта задача оказывается существенно нелинейной.

Данная особенность проявляется в двух моментах:

1) Вычисленная и экспериментальная максимальные нагрузки сжатия ( $P_{нел}^6$  – верхняя критическая нагрузка) для идеальной оболочки не достигают классического значения

$$P = 2\pi E \delta^2 / \sqrt{3(1 - \nu^2)}.$$

Здесь  $E$  – модуль упругости,  $\delta$  – толщина оболочки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Эта нагрузка, как правило, составляет  $(0,91-0,95)P_{кр.кл}$ , что подтверждено экспериментами и вычислениями Н. Ямаки [1], Р. Теннисон [2], Р. Тилеманна [3]. Вычисления авторов величины  $P_{нел}^6$  при помощи МКЭ подтверждают указанную особенность. На рис. 1 показана известная условная характеристика оболочки при кинематическом нагружении. Пунктирные линии – это линии возможных хлопков при нагрузках  $P_{нел}^6$ ,  $P_{кр.кл}$  при условиях сохранения осевых укорочений оболочки, достигнутых при максимальном сжатии.

2) В состоянии предкритического равновесия среди первых собственных форм нет осесимметричных. Поэтому ни в экспериментах, ни в расчетах с учетом геометрической нелинейности среди начальных послекритических равновесий отсутствуют осесимметричные формы. Объяснение этого факта – из-за развития осесимметричного краевого эффекта краевая задача устойчивости становится неоднородной по отношению к осесимметричным деформациям.

3)



Рис. 1. Характеристики оболочки при кинематическом сжатии:

а) общая условная характеристика; б) определение максвелловой силы; в) график изменения седловых равновесий оболочки с одиночной вмятиной

В отношении собственных значений для предкритического равновесия есть основания считать их попарно кратными. Дискретизация задачи расщепляет двукратные числа в попарно близкие, соответствующие двум одинаковым собственным формам, повернутым вокруг оси оболочки относительно друг друга на  $90^\circ$ .

Известно, что в случае простой критической нагрузки для послекритического равновесия справедливо асимптотическое разложение В. Койтера [4] и Б. Будянского [5]:

$$W_{\text{послекр.}} = W_{\text{предкр.}} + \varepsilon W_1^0 + \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon^3 W_3 + \dots, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр,  $W_1^0$  – первая "нулевая" собственная форма производной нелинейного оператора,  $W_2$  и  $W_3$  – последующие члены разложения, которые находятся из решения вспомогательных краевых задач [4]. При очень малых  $\varepsilon$  ( $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$ ) начальное послекритическое равновесие определяется первым членом разложения (1) [6, 7]:

$$W_{\text{нач. послекр.}} = W_{\text{предкр.}} + \varepsilon W_1^0. \quad (2)$$

В случае расчетов по МКЭ нулевой собственный вектор  $W_1^0$  есть собственный вектор матрицы Якоби (матрицы жесткости) в предкритическом равновесии, которому отвечает нулевое собственное значение  $\lambda_{\min}(P_{кр1})$ :

$$\lambda_{\min}(P_{кр1}) = 0, \quad J(P_{кр1})\vec{W}_1^0 \equiv 0.$$

Отметим, что соотношение (2) определяет начальное послекритическое равновесие как для точки бифуркации, так и для предельной точки. При вычислении на ЭВМ формула (2) реализуется в процессе итераций по Ньютону. Экспериментальное подтверждение соотношению (2) получило в работах Л.Р. Исправникова [8], Р. Теннисона [2], С. Кинемитсу и Р. Ноиджима [9]. Подробнее об этом в работах авторов [6, 10, 11].

Собственные формы потери устойчивости, вычисленные для модельной оболочки №1 ( $L/R = 2$ ,  $R/\delta = 250$ ,  $E = 10^4$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $\delta = 1$  мм) при нулевой нагрузке сжатия  $P = 0$  и для предкритического равновесия  $P = 34000$  кг ( $P_{нел}^B = 34800$  кг) показаны на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

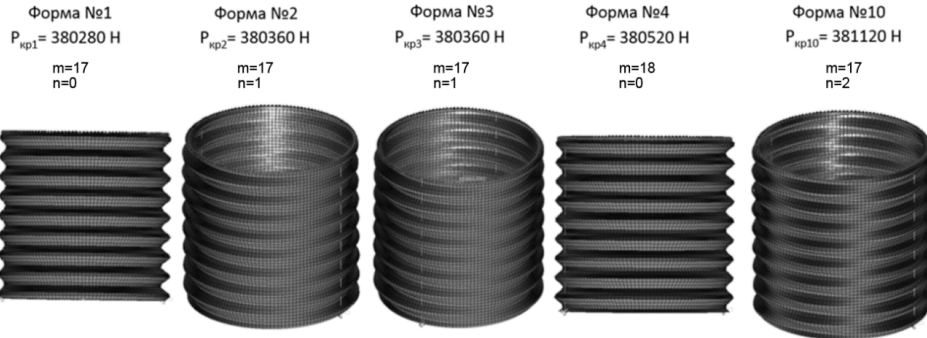


Рис. 2. Собственные формы потери устойчивости круговой продольно сжатой цилиндрической оболочки, вычисленные при нулевой нагрузке

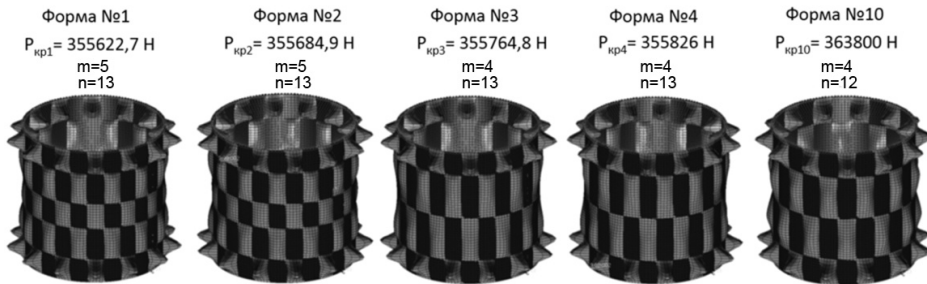


Рис. 3. Предкритические собственные формы потери устойчивости круговой продольно сжатой цилиндрической оболочки, 340 кН ( $P_{нел}^B = 34800$  кг)

Это формы 1, 2, 3, 4 и 10 в порядке возрастания собственных значений. Заметим, что предкритические собственные формы имеют значительно меньше продольных полуволн ( $m=5, 6 < m_0=17$ ) и гораздо большее число окружных волн ( $n=13, 12 > n_0=0, 1, 2$ ). Кроме того, среди предкритических собственных форм нет форм и ромбо-треугольными вмятинами. Это значит, что такие вмятины не образуются в начальном послекритическом равновесии (перед хлопком). В действительности ромбо-треугольные вмятины появляются на оболочке лишь после хлопка по нагрузке (кинематическое нагружение). Подробно образование ромбо-треугольных вмятин рассмотрено в [10, 11].

Наконец, как уже указывалось, одно из главных отличий – отсутствие осесимметричных собственных форм для предкритического равновесия. Так для модельной оболочки №2 ( $L/R=4$ ,  $P_{нел}^B=35600$  кг) осесимметричная собственная форма была «первой» вплоть до нагрузки 25000 кг, но уже при  $P=30000$  кг это формы не оказалось среди первых десяти собственных форм.

Исключение составляют задачи устойчивости для "длинных" оболочек (без торцевых опор), в которых не развивается приопорный краевой эффект, и, следовательно, существуют осесимметричные собственные формы потери устой-

чивости для предкритического равновесия. Все дело в том, что в нелинейной системе, какой является продольно сжатая закрепленная цилиндрическая оболочка, в процессе нагружения собственные формы потери устойчивости "конкурируют" между собой за право соответствовать наименьшему собственному значению матрицы Якоби. В предкритическом равновесии "побеждает" та форма, которая первой становится "нулевой". Именно эта форма и определяет согласно (2) форму начального послекритического равновесия.

Для точки бифуркации реализация соотношения (2) применительно к упомянутой модельной оболочке №1 показана на рис. 4.

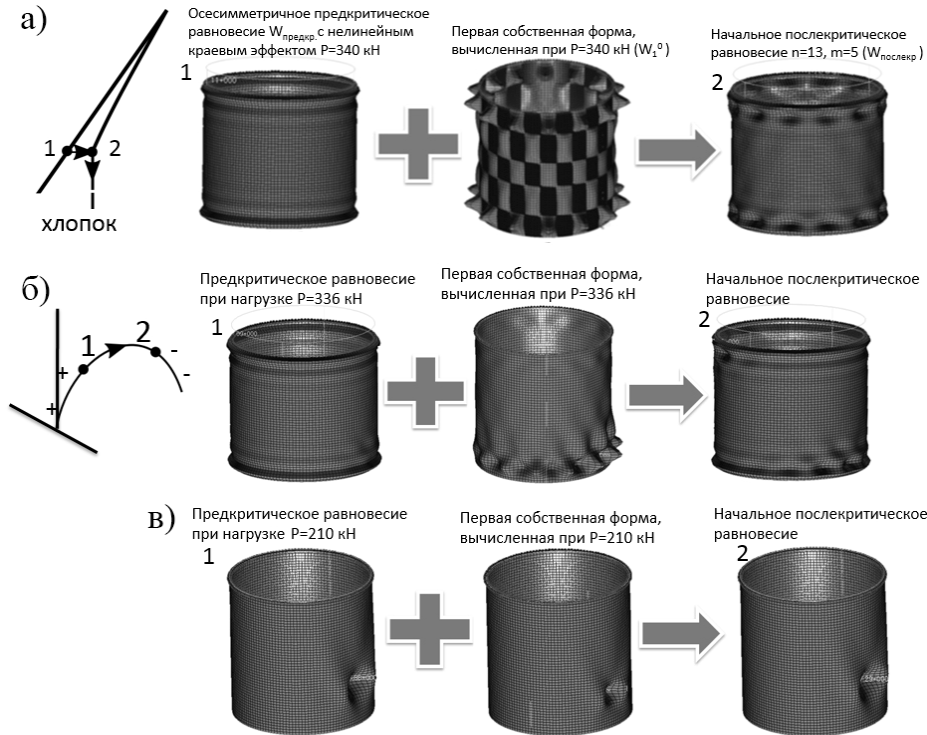


Рис.4. Формирование начального послекритического равновесия: а) после точки бифуркации; б), в) после прохождения предельной точки

Отметим, что для оболочек в точке бифуркации каждая "нулевая" собственная форма должна быть ортогональной к предкритическому равновесию:

$$(W_{предкр} \cdot W_i^0) = 0 \quad [12].$$

Кроме того важным является предложенный авторами энергетический критерий бифуркационной потери устойчивости [7, 13], который заключается в ортогональности вектора нагрузок  $P$  и «нулевого» собственного вектора  $\vec{W}_1^0$ :

$$(\vec{P} \cdot \vec{W}_1^0) = 0. \quad (3)$$

Иначе говоря, в точке бифуркации работа внешних сил на перемещениях, задаваемых «нулевой» собственной формой потери устойчивости должны равняться нулю. Это необходимый и достаточный признак бифуркации. Подробнее об этом см. [6, 7, 11, 13]. Если он не выполняется

$$(\vec{P} \cdot \vec{W}_1^0) \neq 0,$$

то потеря устойчивости исходного равновесия произойдет в предельной точке. Для этой критической точки соотношение (2) имеет свои особенности:

1) Если предельная точка близка к точке бифуркации, то соответствующая «предкритическая» собственная форма сохраняет "следы" бифуркационной собственной формы. Тогда начальное послекритическое равновесие в отдель-

ных деталях волнообразования «напоминает» начальное послебифуркационное равновесие (рис. 4, б,  $P = 0,965P_{нел}^e$ ).

2) Если же предельная точка развивается при нагрузке, сильно отличающейся от бифуркационной (или не связана вообще с точкой бифуркации), то тогда «нулевая» собственная форма практически повторяет форму предкритического равновесия. Соответственно, и начальное послекритическое равновесие будет пропорционально предкритическому равновесию (рис. 4, в,  $P = 0,63P_{нел}^e$ ).

Почти всегда начальное послекритическое равновесие заканчивается хлопком (исключение составляют очень короткие оболочки). Подробный анализ образования ромбо-треугольных вмятин в процессе хлопка, а также особенности развития послехлопкового равновесия рассмотрены в работах автором [10, 11].

## 2. Определение энергетического барьера

В последние 30 лет усилился интерес к энергетическому критерию Тзяня [14, 15] и определению наименьшего энергетического барьера для исходного равновесия осесимметричного сжатия цилиндрической оболочки.

Тзянь [ ] установил на основании работы К. Фридрихса [16], что для цилиндрической оболочки существует некоторая промежуточная нагрузка  $P = P_M < P_{кр.кл}$  (так называемая максвеллова сила или критериальная энергетическая сила по Тзяню), при которой полная энергия исходного равновесия будет равна энергии далекого устойчивого (послехлопкового) и сильно деформированного равновесия (точки 1 и 3 на рис. 1, в). Так будет, если равны между собой площади  $\omega_2 > 0$  и  $\omega_3 < 0$  под условной кривой равновесий и над ее устойчивой частью. Тзянь считал, что если нагрузка сжатия  $P$  больше максвелловой силы ( $P > P_M$ ), то за счет влияния неизбежных начальных несовершенств и неидеальности эксперимента оболочка из исходного равновесия обязательно "прощелкнет" в упомянутое далекое и сильно деформированное равновесие (точка 3' на рис. 1, в). Однако это оказалось ошибочным предположением, за что Тзянь извинился в статье в 1947 г. [17]. Для перескока необходимо предварительно вывести оболочку в некоторое седловое (неустойчивое) равновесие на энергетическом водоразделе при помощи внешнего возмущения. Рассмотрим серию кривых неустойчивых закритических равновесий, вычисленных Р.Джонсом [18] для весьма тонкостенной оболочки ( $R/\delta = 787$ , рис. 5). Здесь каждое число определяет количество поперечных волн  $n$ , соответствующего равновесия. Самые нижние кривые ( $n = 8, 9, 10$ ) совпали с результатами вычислений Алмроса и были весьма близки к экспериментальным кривым В. Тилемана [3].

Каждая из этих кривых при определенных значениях нагрузки сжатия называется «энергетически» ближайшей к исходному равновесию. Чтобы перевести сжатую оболочку в любое из упомянутых «ближайших» седловых равновесий, необходимо дополнительно укоротить ее за счет развития изгибных деформаций (соответствующих данной форме при неизменной нагрузке  $P$ ). Энергетический барьер  $E_\delta$  определяется дополнительной частью полной энергии, равной потенциальной энергии деформаций изгиба минус возможная работа  $T_P$  нагрузки сжатия  $P$  на дополнительном укорочении оболочки:

$$E_\delta = \Pi_{\text{изг}} - T_P$$

Долгое время этот энергетический барьер считался минимальным для исходного равновесия. Однако за последние 40 лет с помощью экспериментальных и теоретических исследований было показано, что при нагрузках выше максвелловой силы ( $P > P_M$ ) величина минимального энергетического барьера равновесия центрального сжатия цилиндрической оболочки резко снижается (М. Эсслингер, Б. Гейер [19] - эксперимент, Дж. Хант и его сотрудники [20-24] - численные результаты, Дж.М.Т. Томпсон [25] и др.).

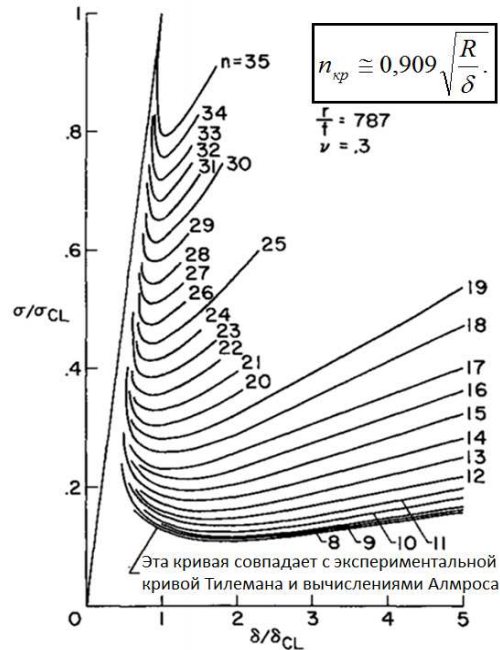


Рис. 5. Кривые неустойчивых закритических равновесий оболочки В. Тилемана согласно работе Р. Джонса

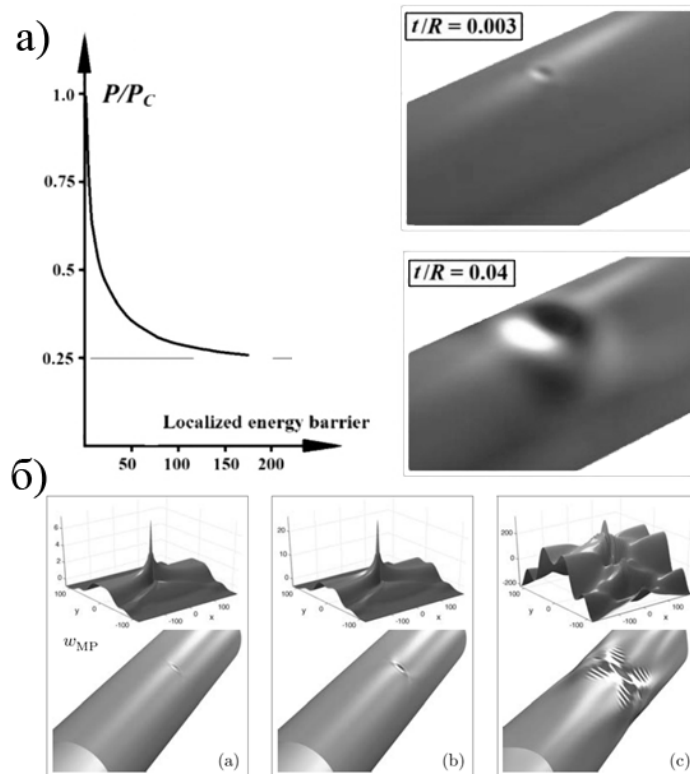


Рис. 6. Результаты Ю. Хорака и соавторов: а) вмятина седлового равновесия и кривая изменения энергетического барьера; б) последовательность перехода оболочки в далекое сильнодеформированное равновесие

В 2006 г. Ю. Хорак и его соавторы [26] строго доказали существование дополнительных седловых равновесий в виде одиночной вмятины на поверхности оболочки при нагрузках выше максвелловой силы (рис. 6). Эти равновесия ока-

зываются энергетически ближе к исходному равновесию, чем описанные выше неустойчивые "периодические" равновесия (рис. 1, в). Кроме того, в работе [26] описан численный алгоритм типа спуска с использованием конечных разностей для определения местоположения указанной седловой одиночной вмятины. Как только оболочка попадает в такое неустойчивое равновесие, она немедленно прохлопывает в далекое и сильно деформированное состояние, означающее ее фактическое разрушение (рис. 1, г нижняя кривая).

Но получить описанную одиночную вмятину можно лишь при помощи внешнего воздействия в виде "поперечного сосредоточенного вдавливания" в наиболее "слабой" точке поверхности оболочки. При одинаковых торцевых граничных условиях, наиболее слабые (в смысле изгибной жесткости) точки образуют "среднюю линию" по высоте цилиндрической оболочки. Для модельной оболочки №2 ( $L/R=4$ ,  $R/\delta=250$ ,  $E=10^4$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\nu=0,3$ ,  $\delta=1$  мм) с шарнирно закрепленными торцевыми сечениями приложение сосредоточенной силы  $Q$  в одной из указанных точек (при нагрузке сжатия  $P=16000$  кг) приводит к постепенному развитию вмятины по глубине и расширению ее по поверхности оболочки. При достижении критических размеров вмятины  $\Delta_{кр}$  (или критического значения силы  $Q_{кр}(\Delta_{кр})$ ) произойдет местная потеря устойчивости оболочки в предельной точке и оболочка перейдет в седловое равновесие на энергетическом водоразделе. Здесь собственная форма наименьшей жесткости (рис. 7, а) повторяет форму вмятины в предкритическом равновесии. Поэтому начальное послекритическое равновесие (т.е. указанное седловое равновесие) образуется так, как это показано на рис. 4, в, форма вмятины (рис. 8, а) фактически повторяет форму предкритической вмятины, полученной Ю. Хорак и его соавторами (рис. 6, б). Отметим, что две следующие собственные формы (рис. 7, б, в) определяют возможность бифуркационной потери устойчивости, поскольку формы кососимметричные и перемещение под силой  $Q$  равно нулю. Следовательно выполняется энергетический признак бифуркации (3). Четвертая собственная форма (рис. 7, г) вновь соответствует потере устойчивости в предельной точке.

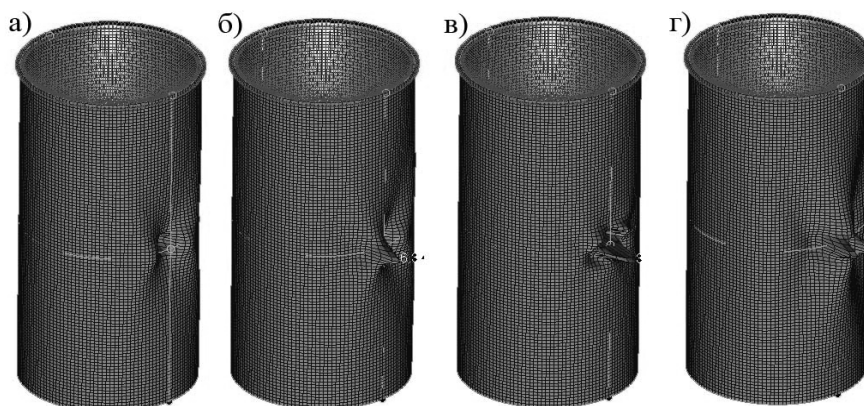


Рис. 7. Собственные формы потери устойчивости оболочки при поперечном вдавливании ( $P=16000$  кг): а) и г) в предельных точках; б) и в) в точках бифуркации

Что касается энергетического барьера, то еще в 1970 г. В.Г. Паламарчук [27] высказал утверждение, согласно которому при поперечном воздействии на сжатую цилиндрическую оболочку развитие ее деформаций идет по пути преодоления минимального энергетического барьера. Для определения этого барьера удобно воздействовать на оболочку сосредоточенным кинематическим вдавливанием  $\Delta$ . Тогда реактивная сила  $Q(\Delta)$  будет сначала возрастать, достигнет максимума, а затем уменьшаться (рис. 8, а, б).

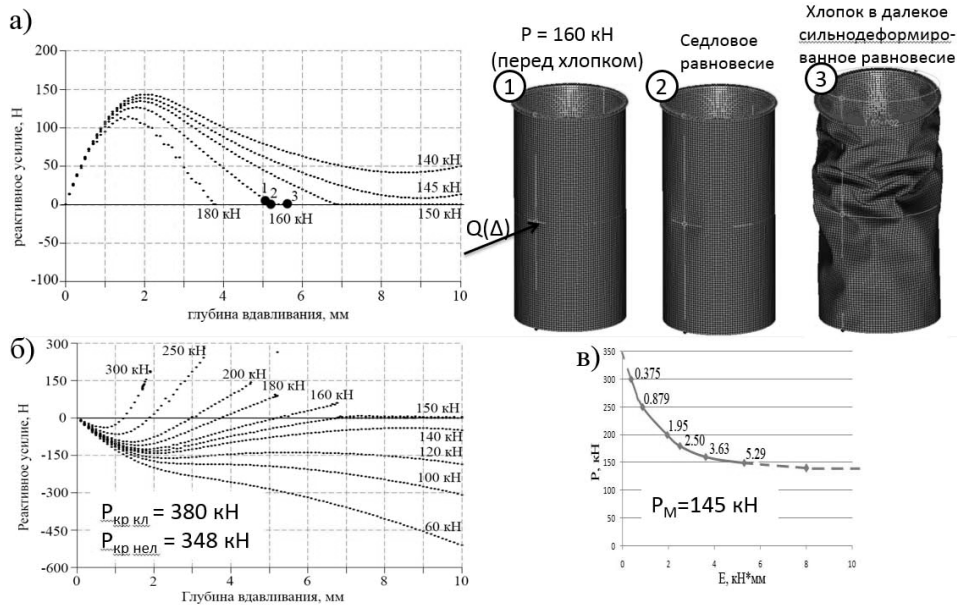


Рис. 8. Определение максвелловой силы и энергетического барьера модельной оболочки: а) определение максвелловой силы, седловое равновесие на водоразделе и послехлопковое; б) графики изменения реактивной силы при различных нагрузках сжатия; в) кривая изменения энергетического барьера

В момент, когда эта сила станет равной нулю, глубина вмятины окажется критической ( $\Delta = \Delta_{кр}$ ), оболочка потеряет устойчивость в предельной точке и перейдет в неустойчивое послекритическое равновесие с вмятиной (т.е. в седловое равновесие на водоразделе). Далее при одностороннем поперечном вдавливании (сила  $Q(\Delta)$  только сжимающая) произойдет хлопок в далекое сильно деформированное устойчивое равновесие (рис. 8, а). Величина энергетического барьера  $E_\delta$  определяется как площадь под кривой реактивной силы  $Q(\Delta)$ :

$$E_\delta = \int_0^{\Delta_{кр}} Q(\Delta) d\Delta.$$

Для рассматриваемой модельной оболочки №2 на графиках изменения реактивной силы  $Q(\Delta)$  (рис. 8, б) показан процесс поиска максвелловой силы  $P_M$ . Пока сжимающая нагрузка  $P$  меньше  $P_M$ , кривые  $Q(\Delta)$  не пересекают нулевую ось  $Q=0$ , а величина  $E_\delta$ , вообще говоря, неограниченная (или очень большая). Как только кривая  $Q(\Delta)$  коснется нулевой оси при  $\Delta = \Delta_{кр}$  площадь под кривой  $Q(\Delta)$  становится конечной. Это позволяет определить величину наименьшего энергетического барьера исходного равновесия по отношению к описанному кинематическому вдавливанию. Для рассматриваемой оболочки касание этой кривой впервые произошло при нагрузке  $P \approx 14600$  кг. Следовательно эта нагрузка и есть максвеллова сила.

Выполнив построение кривых  $Q(\Delta)$  при других нагрузках, больших максвелловой силы (рис. 8, б) и определив площадь под каждой кривой на отрезках между двумя нулевыми значениями реактивной силы, получим значения минимальных энергетических барьеров  $E_\delta(P)$  в зависимости от величины нагрузки  $P$ . С увеличением нагрузки сжатия энергетический барьер достаточно круто падает (рис. 8, в). Характер этого графика совпадает с кривой изменения барьера  $E_\delta(P)$ , полученной в работе [26] рис. 6, а

Аналогичным образом было вычислено значение максвелловой силы для реальной дюралюминиевой оболочки (рис. 9, а). Здесь максвеллова сила  $P_M$  ока-



залошь равной  $\sim 115$  кг при  $P_{\text{нел}}^B = 370$  кг. При нагрузке  $P = 130$  кг  $> P_M$  оболочка была выведена кинематическим вдавливанием на энергетический водораздел (седловое равновесие, глубина вмятины  $\approx 1$  мм, рис. 9, в), а затем она прохлопнула в далекое устойчивое и сильно деформированное равновесие с глубиной более обширной вмятины  $\Delta \approx 13$  мм (рис. 9, б.).

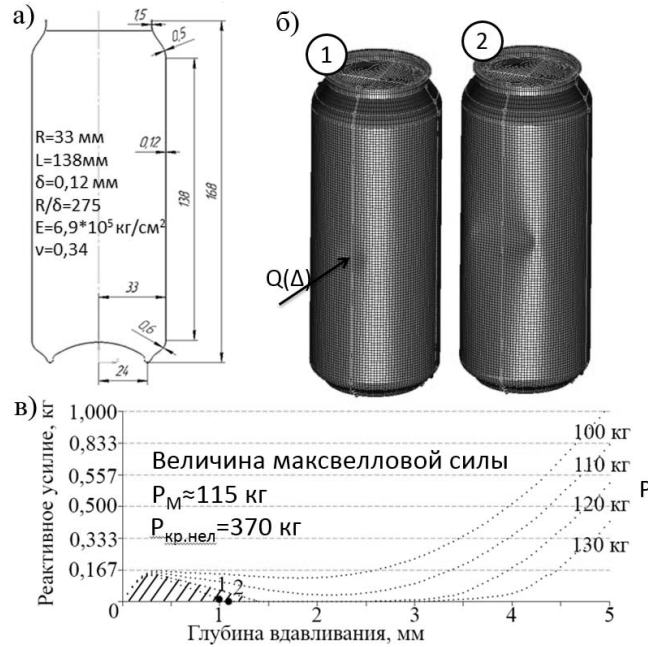


Рис. 9. Максвеллова сила и послехлопковое равновесие алюминиевой оболочки: а) геометрия оболочки; б) седловое и послехлопковое равновесия; в) поиск максвелловой силы.

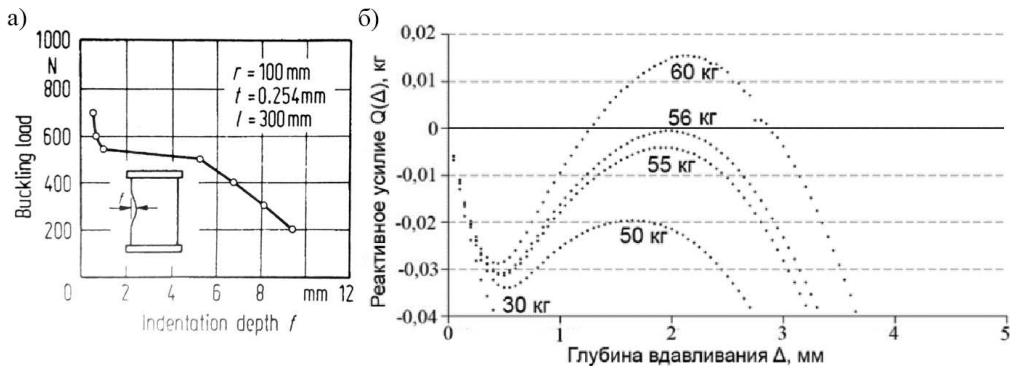


Рис. 10. Исследование майларовой оболочки М. Эсслингер и Б. Гейером: а) кривая изменения глубины критического поперечного вдавливания; б) определение максвелловой силы

Далее были численно подтверждены экспериментальные результаты кинематического вдавливания при разных нагрузках сжатия майларовой оболочки с заделанными торцевыми сечениями, полученные М. Эсслингер и Б. Гейером [19]. Здесь обращает на себя внимание факт резкого уменьшения глубины критического вдавливания в очень узком диапазоне сжимающих нагрузок (между  $P \approx 50$  кг и  $P \approx 52$  кг, рис. 10, а). Следовательно в указанном диапазоне сжатия так же резко уменьшился энергетический барьер исходного равновесия за счет появления новых седловых решений (при  $P > P_M$ ). Численные расчеты авторов данной работы показали, что максвеллова сила для рассматриваемой оболочки рав-

на  $\approx 56$  кг. Соответствующие кривые развития реактивного усилия вдавливания  $Q(\Delta)$  при нагрузках сжатия  $P = 30, 50, 55, 56$  и  $60$  кг (рис. 10, б) показывают, что при нагрузках, меньших  $56$  кг, усилие вдавливания  $Q$  сохраняет свой знак, а при  $P = 56$  кг значение  $Q(\Delta_{кр}) = 0$  при критической глубине вдавливания  $\Delta_{кр} \approx 8\delta$ , ( $\delta = 0,254$  мм - толщина оболочки).

В заключение приведем основные результаты, полученные в этой работе:

1) Впервые детально рассмотрен процесс формирования начального после критического равновесия продольно сжатой цилиндрической оболочки (как для идеальной оболочки, теряющей устойчивость в точке бифуркации, так и для оболочки с начальными несовершенствами (предельная точка)).

2) При анализе собственных форм потери устойчивости показано, что вследствие развития нелинейного осесимметричного краевого эффекта, среди указанных форм предкритического равновесия закрепленной оболочки нет и не может быть осесимметричных собственных форм. Поэтому начальное после критического равновесие такой оболочки не может быть осесимметричным, что подтверждено экспериментами и вычислениями.

3) Рассмотрены вычислительные особенности определения максвелловой силы и минимального энергетического барьера. Дано сравнение численных результатов авторов с экспериментальными результатами и теоретическими представлениями других исследователей.

#### Л и т е р а т у р а

1. Yamaki, N. Elastic stability of circular cylindrical shells // Applied Mathematics and Mechanics. – 1984. – Vol. 27. – Amsterdam, Netherlands. – 500 p.
2. Tennyson R.C. A Note on the Classical Buckling Load of Circular Cylindrical Shells Under Axial Compression // AIAA Journal, 1963, Vol. 1 (№9), pp. 2194–2196
3. Thielemann W.F. On the postbuckling behavior // NASA Techn. Note, 1962, №D-1510, pp. 203-216.
4. Koiter W.T. On the Stability of Elastic Equilibrium // NASA Technical Translation F-10, 833, Clearinghouse, US Dept. of Commerce/Nat. Bur. of Standards N67–25033, 1967.
5. Budiansky B. Dynamic buckling of elastic structures: criteria and estimates // Dynamic stability of structures, edited by G. Hermann, Pergamon, Oxford, 1967. – Pp. 83–106
6. Мануйлов Г.А., Бегичев М.М. О механизме потери устойчивости круговой продольно сжатой цилиндрической оболочки // Труды семинара «Современные проблемы механики, энергоэффективность сооружений и ресурсосберегающие технологии». – Москва: РУДН, 15 – 17 сентября 2015 г. – М.: Изд-во РУДН, 2015. – С. 82-92
7. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. О критических и послекритических равновесиях в задачах устойчивости упругих систем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №5. – С.47-54
8. Исправников Л.Р. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии, кручении и поперечном давлении // Труды Краснознаменной ордена Ленина Военно-воздушной инженерной академии им. профессора Н.Е. Жуковского; Выпуск 535. Под. Ред. А.С. Вольмира. – М.: Академия, 1955. – 38с.
9. Kanemitsu S, Nojima N. Axial compression test of thin circular cylinders. A. Length effect. B. Visual study of buckling // Master's thesis, California Institute of Technology. 1939.
10. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. О явлении потери устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки. Часть 1: О послекритическом равновесии оболочки // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2016. – Vol. 12(3). – Pp. 58-72.
11. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. Энергетическая оценка максимальной продольно сжимающей силы в задаче устойчивости круговой цилиндрической оболочки // Актуальные проблемы численного моделирования зданий, сооружений и комплексов. Том 2. К 25-летию НИЦ СтаДиО: Монография / Под общей редакцией А.М. Белостоцкого и П.А. Акимова. – М.: Изд-во АСВ, 2016. С.533-547.

12. *Potier-Ferry M.* Perturbed Bifurcation Theory // *Journal of Differential Equations.* – 1979. – 33. – Pp. 112-146.
13. *Мануйлов Г.А., Жуков К.А., Косицын С.Б.* Метод «неособенных продолжений» в задачах устойчивости нелинейно деформируемых упругих систем // *Строительная механика и расчет сооружений.* – 1989. – №5. – С. 68-72
14. *Karman T.V., Tsien H.S.* The buckling of thin cylindrical shells under axial compression // *J. Aero. Sci.* – 1941. – Vol. 8. – Pp. 303–312.
15. *Tsien H.S.* Theory for the buckling of thin shells // *J. Aero. Sci.*, 9, 1942. P 373-384.
16. *Friedrichs K.O.* On the minimum buckling load for spherical shells // *Theodore von Kármán Anniversary Volume, California Institute of Technology, 1941.* – Pp. 258–272.
17. *Tsien H.S.* Lower Buckling Load in the Nonlinear Buckling Theory for Thin Shells // *Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 5 (2), July 1947,* pp. 236-237.
18. *Jones R.M.* Toward a New Snap-Through Buckling Criterion for Axially Compressed Circular Cylindrical Shells // *AIAA Journal.* – 1963. – Vol. 4, No. 9. – Pp.1526-1530.
19. *Esslinger M., Geier B.* Calculated postbuckling loads as lower limits for the buckling loads of thin-walled circular cylinders // *Buckling of structures - Proceedings of the Symposium, Cambridge, Mass, 1974,* pp. 274-290.
20. *Hunt G.W., Lord G.J., Champneys A.R.* Homoclinic and heteroclinic orbits underlying the post-buckling of axially-compressed cylindrical shells // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 170. –1999. – Pp. 239–251.
21. *Hunt, G.W., LucenaNeto E.* Maxwell critical loads for axially loaded cylindrical shells // *ASME J. Appl. Mech.* – 1993. - 60(3). – Pp. 702-706.
22. *Hunt G.W.* Reflections and symmetries in space and time // *IMA Journal of Applied Mathematics.* – 2011. – 76. – Pp. 2–26.
23. *Hunt G.W. Lord G.J., Peltier M.A.* Cylindrical shell buckling: a characterization of localization and periodicity // *Discrete & Continuous Dynamical Systems, Series B, 3.* – 2003. – Pp. 505–518.
24. *Budd C.J., Hunt, G.W., Kuske R.* Asymptotic of cellular buckling close to the Maxwell load // *Proc. R. Soc. A, 457.* – 2001. – Pp. 2935–2964.
25. *Thompson J.M.T., Van der Heijden G.H.M.* Quantified “shock-sensitivity” above the Maxwell load // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* – 2014. – 24 (3). – 14 p.
26. *Horak J., Lord G.J., Peletier M.A.* Cylinder buckling: the mountain pass as an organizing centre // *SIAM J. Appl. Math.* – 2006. – 66. – Pp. 1793–1824.
27. *Паламарчук В.Г.* Процесс выпучивания круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии // *Труды седьмой Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин.* – М.: Наука, 1970. – С. 460-464.

#### References

1. *Yamaki, N.* (1984). Elastic stability of circular cylindrical shells, *Applied Mathematics and Mechanics*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, Vol. 27, 500 p.
2. *Tennyson, R.C.* (1963). A Note on the Classical Buckling Load of Circular Cylindrical Shells Under Axial Compression, *AIAA Journal*, Vol. 1 (№9), 2194–2196
3. *Thielemann, W.F.* (1962). On the postbuckling behavior, *NASA Techn. Note*, №D-1510, pp. 203-216.
4. *Koiter, W.T.* (1967). On the Stability of Elastic Equilibrium, *NASA Technical Translation F-10*, 833, Clearinghouse, US Dept. of Commerce, Nat. Bur. of Standards, N67–25033.
5. *Budiansky, B.* (1967). Dynamic buckling of elastic structures: criteria and estimates, *Dynamic stability of structures*, edited by G. Hermann, Pergamon, Oxford, pp. 83–106.
6. *Мануйлов, Г.А., Бегичев, М.М.* (2015). О механизме потери устойчивости круговой продольно-сжатой цилиндрической оболочки, *Труды семинара «Современные проблемы механики, энергоэффективности сооружений и ресурсоберегающих технологий»*, Москва, RUDN, Sept. 15 – 17, 2015, М.: Изд-во RUDN, 2015, pp. 82-92
7. *Мануйлов, Г.А., Косицын, С.Б., Бегичев, М.М.* (2015). О критических и послекритических равновесиях в задачах устойчивости упругих систем, *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, №5, pp. 47-54
8. *Исправников, Л.Р.* (1955). Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии, кручении и поперечном давлении, *Труды Краснознаменной ордена Ленина*

Voenno-vozdushnoj inzhenernoj akademii im. Prof. N.E. Zhukovskogo; Vyp. 535, pod. red. A.S. Vol'mira, M.: Akademiya, 38 p.

9. Kanemitsu, S., Nojima, N. (1939). Axial compression test of thin circular cylinders. A. Length effect. B. Visual study of buckling, Master's thesis, California Institute of Technology, 60 p.

10. Manujlov, G.A., Kositsyn, S.B., Begichev, M.M. (2016). O javlenii poteri ustojchivosti prodol'no szhatoj krugovoj cilindricheskoj obolochki. Chast' 1: O poslekriticheskom ravnovesii obolochki, *International J. for Computational Civil and Structural Engineering*, Vol. 12(3), pp. 58-72.

11. Manujlov, G.A., Kositsyn, S.B., Begichev, M.M. (2016). Jenergeticheskaja ocenka maksimal'noj prodol'no szhimajushhej sily v zadache ustojchivosti krugovoj cilindricheskoj, *Aktual'nye problemy chislennogo modelirovaniya zdaniy, sooruzhenij i kompleksov*, Tom 2, K 25-letiju Nauchno-issledovatel'skogo centra StaDiO: Monografija, Pod obshej redakciej A.M. Belostockogo i P.A. Akimova, M.: Izd-vo ASV, pp.533-547.

12. Potier-Ferry, M. (1979). Perturbed Bifurcation Theory, *Journal of Differential Equations*, 33, p. 112-146.

13. Manujlov, G.A., Zhukov, K.A., Kositsyn, S.B. (1989). Metod «neosobennyh prodolzhenij» v zadachah ustojchivosti nelinejno deformiruemyh uprugih system, *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij*, №5, pp. 68-72

14. Karman, T.V., Tsien, H.S. (1941). The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, *J. Aero. Sci.*, Vol. 8, 303–312.

15. Tsien, H.S. (1942). Theory for the buckling of thin shells, *J. Aero. Sci.*, 9, pp. 373-384.

16. Friedrichs, K.O. (1941). On the minimum buckling load for spherical shells, *Theodore von Kármán Anniversary Volume*, California Institute of Technology, Pasadena, Calif., pp. 258–272.

17. Tsien, H.S. (1947). Lower Buckling Load in the Nonlinear Buckling Theory for Thin Shells, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 5, No 2, July 1947, pp. 236-237.

18. Jones, R.M. (1963). Toward a New Snap-Through Buckling Criterion for Axially Compressed Circular Cylindrical Shells, *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 9, pp. 1526-1530.

19. Esslinger, M., Geier, B. (1974). Calculated postbuckling loads as lower limits for the buckling loads of thin-walled circular cylinders, *Buckling of structures: Proceedings of the Symposium*, Cambridge, Mass, pp. 274-290.

20. Hunt, G.W., Lord, G.J., Champneys, A.R. (1999). Homoclinic and heteroclinic orbits underlying the post-buckling of axially-compressed cylindrical shells, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 170, pp. 239–251.

21. Hunt, G.W., LucenaNeto, E. (1993). Maxwell critical loads for axially loaded cylindrical shells, *ASME, J. Appl. Mech.*, 60(3), pp. 702-706.

22. Hunt, G.W. (2011). Reflections and symmetries in space and time, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 76, pp. 2–26.

23. Hunt, G.W., Lord, G.J., Peltier, M.A. (2003). Cylindrical shell buckling: a characterization of localization and periodicity, *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, Series B, 3, pp. 505–518.

24. Budd, C.J., Hunt, G.W., Kuske, R. (2001). Asymptotics of cellular buckling close to the Maxwell load, *Proc. R. Soc. A*, 457, pp. 2935–2964.

25. Thompson, J.M.T., Van der Heijden, G.H.M. (2014). Quantified “shock-sensitivity” above the Maxwell load, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 24 (3), 14 p.

26. Horak, J., Lord, G.J., Peletier, M.A. (2006). Cylinder buckling: the mountain pass as an organizing centre, *SIAM J. Appl. Math.*, 66, pp. 1793–1824.

27. Palamarchuk, V.G. (1970). Process vypuchivaniya krugovoj cilindricheskoj obolochki pri osevom szhatii, *Trudy Sed'moj Vsesojuznoj Konferencii po Teorii Obolochek i Plastin*, M.: Nauka, pp. 460-464.

## ON INITIAL POSTBUCKLING EQUILIBRIUM AND MINIMUM ENERGY BARRIER OF AXIALLY COMPRESSED CYLINDRICAL SHELL

Manuylov G.A., Begichev M.M.

Moskovskiy Gosudarstvennyj Universitet Putey Soobscheniy (MIIT), Moscow

The features of formation of the initial postbuckling equilibrium of axially compressed elastic circular cylindrical shell are studied in geometrically nonlinear formulation. The character of energy barrier change with the variation of axial load is computed.

KEYWORDS: stability, shell, bifurcation, energy barrier, Maxwell load.