Геометрические исследования срединных поверхностей тонких оболочек

ГЕОМЕТРИЯ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ НОРМАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*
А.А. ШМЕЛЕВА*, аспирант*
Российский университет дружбы народов
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
i.v.ivn@mail.ru

Современное градостроительство требует создания новых форм конструкций при строительстве общественных зданий, выставочных павильонов, спортивных и промышленных сооружений. В работе рассматривается возможность создания новых форм пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей. Наряду с линейчатыми оболочками, оболочки в форме циклических поверхностей на основе окружностей – наиболее удобная форма для возведения на строительной площадке или формовке деталей для последующей сборки. В то же время нормальные циклические поверхности позволяют создавать разнообразные формы пространственных конструкций в комбинации с цилиндрическими и другими классами поверхностей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нормальные циклические поверхности, направляющая кривая, нормальная плоскость кривой, криволинейная ортогональная система координат, формообразование циклических поверхностей, комбинированные тонкостенные конструкции.

Нормальные циклические поверхности образуются движением окружности постоянного или переменного радиуса в нормальной плоскости направляющей кривой - линии центров образующих окружностей [1-3].

Векторное уравнение поверхности получим в виде

$$\boldsymbol{\rho}(u,\upsilon)=\boldsymbol{r}(u)+R(u)\boldsymbol{e}(u,\omega), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\rho}(u,\upsilon)$ - радиус вектор поверхности; $\boldsymbol{r}(u)$ - радиус вектор линии центров образующих окружностей; $R(u)$ - радиус образующих окружностей; $\boldsymbol{e}(u,\omega)=\nu\cos\omega+\beta\sin\omega$ - уравнение окружности единичного радиуса в нормальной плоскости линии центров; ν, β - векторы нормали и бинормали линии центров; $\omega=\upsilon+\theta(u)$; v - полярный угол в плоскости образующей окружности; $\theta(u)$ определяет положение начала отсчета полярного угла v образующей окружности относительно нормали направляющей кривой; k, χ - кривизна и кручение линии центров; $s'=|\boldsymbol{r}'|$.

Функция $\theta(u)$ позволяет выбрать наиболее удобную координатную систему, в частности, ортогональную поверхностную систему координат.

Коэффициенты квадратичных форм поверхности определяются по формулам [2-3]:

$$E=R'^2+s'^2(1-Rk\cos\omega)^2;\quad G=R^2;\quad F=R(\boldsymbol{e}'_u\boldsymbol{e}'_v);$$

$$L=\frac{1}{\sigma}\left\{R'\left[s''-\left(2ks'\cdot R'+(ks')'R\right)\cos\omega\right]-R'k\chi s'^2R\sin\omega-\right.$$
$$\left.-s'(1-Rk\cos\omega)\left[s'^2(1-Rk\cos\omega)k\cos\omega+R''\right]\right\};$$

$$M=\frac{R\,R'k\,s'\sin\omega}{\sigma};\qquad N=\frac{R\,s'}{\sigma}\left(1-R\,k\cos\omega\right);$$

$$\sigma=\sqrt{R'^2+s'^2\left(1-R\,k\cos\omega\right)^2}\,. \tag{2}$$

Положив коэффициент первойй квадратичной формы $F = 0$, получаем ортогональную поверхностную систему координат [2-3]:

$$F=0\ \rightarrow\ \theta(u)=-\int\chi\,s'\,du+\theta_0\,. \tag{3}$$

Таким образом, чтобы при пространственной линии центров образующих окружностей поверхностная система координат была ортогональной, начальный вектор (вектор отсчета полярной координаты v образующих окружностей) должен поворачиваться относительно вектора нормали линии центров на угол $\theta(u)$. Для плоской линии центров θ_0 = const.

При переходе к ортогональной поверхностной системе координат коэффициент второй квадратичной формы $M \neq 0$, следовательно, в общем случае, нормальные циклические поверхности не являются каналовыми – образующие окружности не линии главных кривизн. Как показано в работах [2-4], только два подкласса нормальных циклических поверхностей относятся к классу каналовых: поверхности вращения - линия центров прямая линия, трубчатые поверхности - нормальные циклические поверхности с постоянным радиусом образующих окружностей [5]. В статье [6] было рассмотрено формообразование тонкостенных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей с линией центров - окружностью. В работе приведено более 40 рисунков разнообразных форм поверхностей, что показывает широкие возможности создания новых форм пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей. Ниже рассмотрены примеры образования тонкостенных конструкций с использованием различных линий центров образующих окружностей.

На рис. 1 приведены формы нормальных циклических поверхностей с различными плоскими линиями центров образующих окружностей, радиус которых изменяется по линейному закону. Линии центров:

а) *парабола*; *б*) *гипербола*; *в*) *эллипс*; *г*) *эвольвента круга*; *д*) *синусоида*; *е*) *циклоида*; *ж*) *кардиоида*; *з*) *спираль Архимеда*.

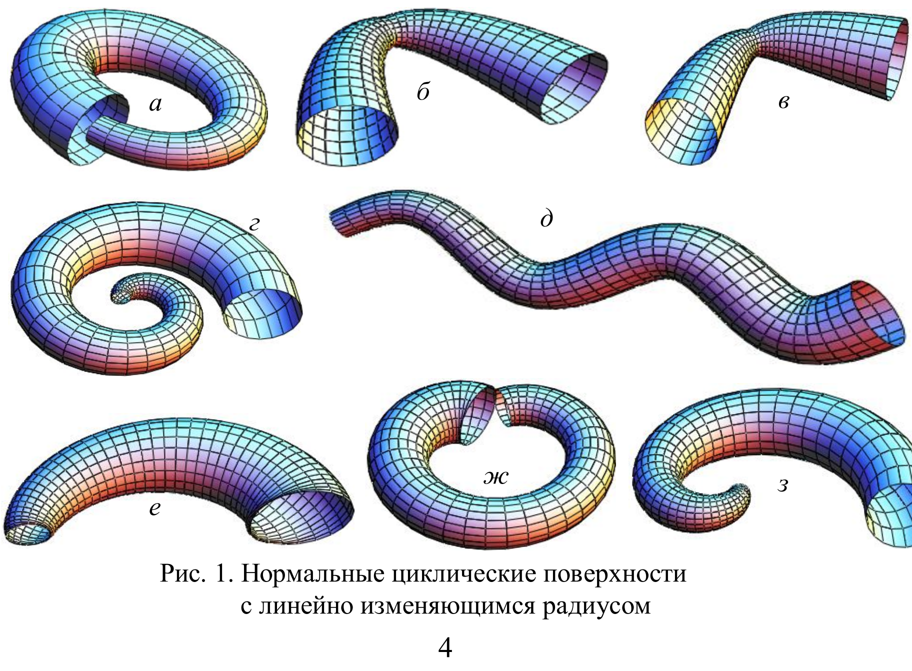

Рис. 1. Нормальные циклические поверхности
с линейно изменяющимся радиусом

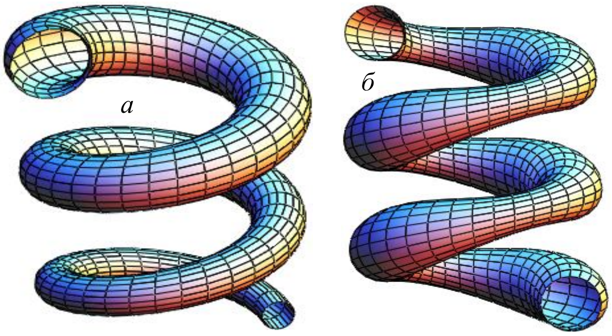

Рис. 2. Нормальные циклические поверхности с винтовой кривой линии центров

На рис. 2 приведены нормальные циклические поверхности с винтовой линией центров образующих окружностей. Радиус образующих окружностей изменяется: *а* – по линейному закону; *б* – по синусоидальному закону.

На рис. 3 приведены формы нормальных циклических поверхностей с эллипсоидальной направляющей кривой: $x = a\cos u$; $y = b\sin u$ и радиусом образующей окружности, меняющимся по косинусоидальному закону - $R = c + d\cos pu$, параметр p определяет число амплитуд косинуса при полном обходе эллипса (a = 3; b = 2; c = 0,75; d = 0,25; $0 \le v \le \pi$).

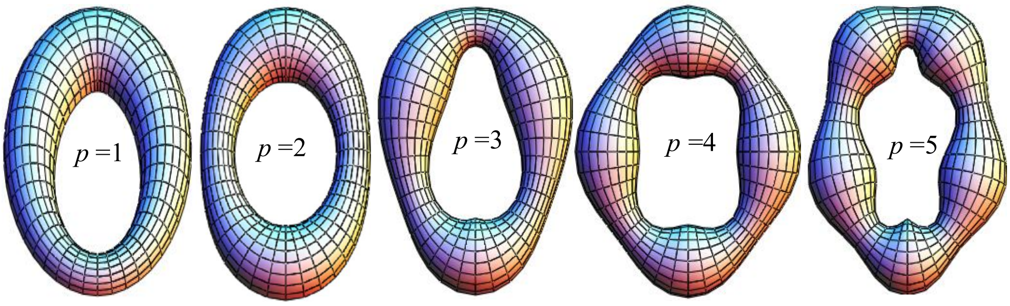

Рис. 3. Формы эллипсо-косинусоидальных нормальных циклических поверхностей

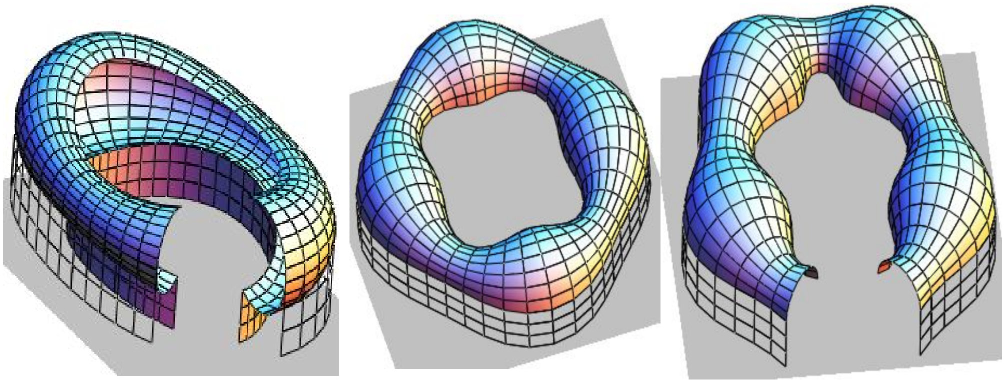

Рис. 4. Комбинированные пространственные конструкции с эллипсо-косинусоидальными поверхностями

На рис.4 и рис. 5 представлены комбинированные конструкции с использованием нормальных эллипсо-косинусоидальных поверхностей с цилиндрическими опорами в форме координатных линий поверхности и конструкции из отсеков эллипсо-косинусоидальных поверхностей.

На рис. 6 представлены нормальные циклические поверхности с линией центров – эвольвентой круга и линейной функцией изменения радиуса образующей окружности: $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$; $R = c + du$. Рис. 6,*а* – торговый центр; рис. 6,*б* – лабиринт; рис. 6,*в* – поверхность «спящий удав».

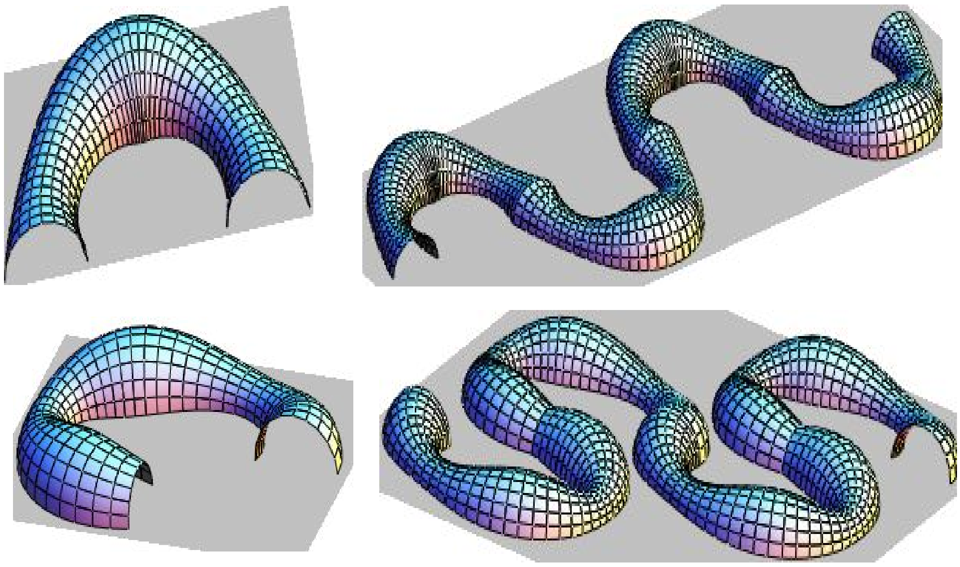

Рис. 5. Комбинированные пространственные конструкции из отсеков эллипсо-косинусоидальных поверхностей

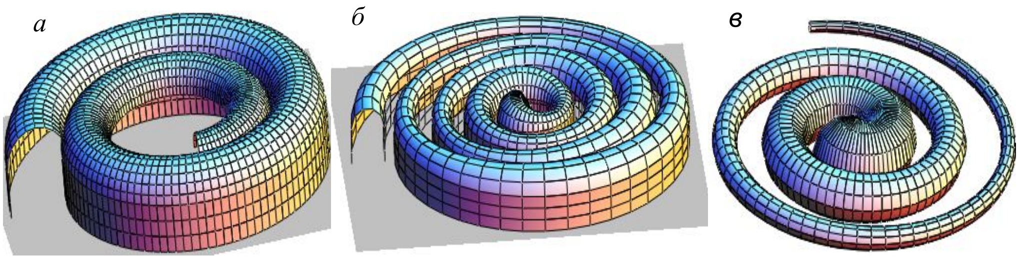

Рис. 6. Эвольвентные нормальные циклические конструкции

На рис. 5 приведены конструкции с направляющей кардиоидой:

$$x = a(2\cos u - \cos 2u)\,; \quad y = a(2\sin u - \sin 2u)\,, \quad 0.3\pi \le u \le 1{,}7\pi\ .$$

На рис 7, *а, б* радиус образующей окружности изменяется по линейному закону - $R = c + du$. При радиусе образующей окружности, превышающем радиус кривизны направляющей кривой, происходит закручивание внутренней части циклической поверхности и возможно пресечение отсеков поверхности (рис. 7,*б*). На рис. 7,*в* функция радиуса образующей окружности косинусоида - $R = c + d\cos pu$.

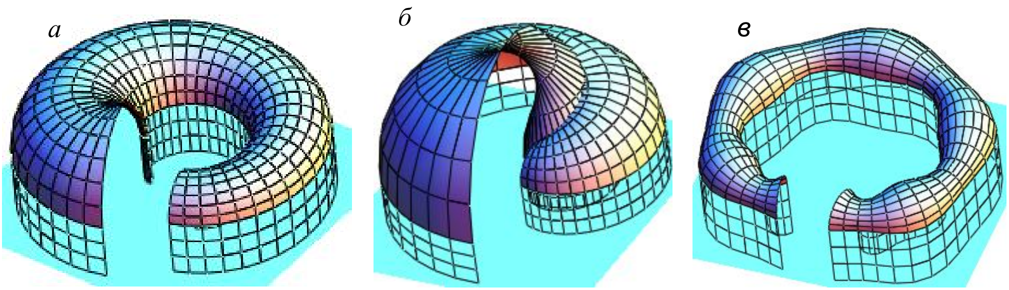

Рис. 7. Кардиоидные нормальные циклические конструкции

На рис. 8 приведены формы тонкостенных пространственных конструкций в форме нормальных циклических поверхностей с направляющей циклоидой:

$$x = a(u - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

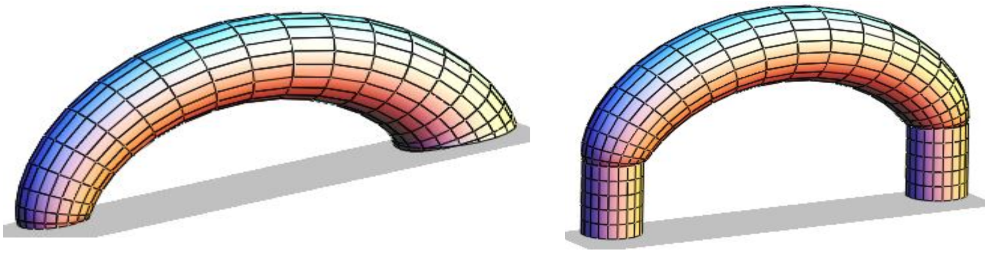

Рис. 8. Конструкции в форме нормальных поверхностей с направляющей циклоидой

На рис. 9 показаны комбинированные конструкции из отсеков нормальной циклической поверхности с линией центров – цепной линией $y = a\mathrm{ch}(x/a)$ и с радиусом образующей окружности, изменяющимся по линейному закону:

$$R = c + d|u|;\ -10 \le u \le 10;\ a = 5.$$

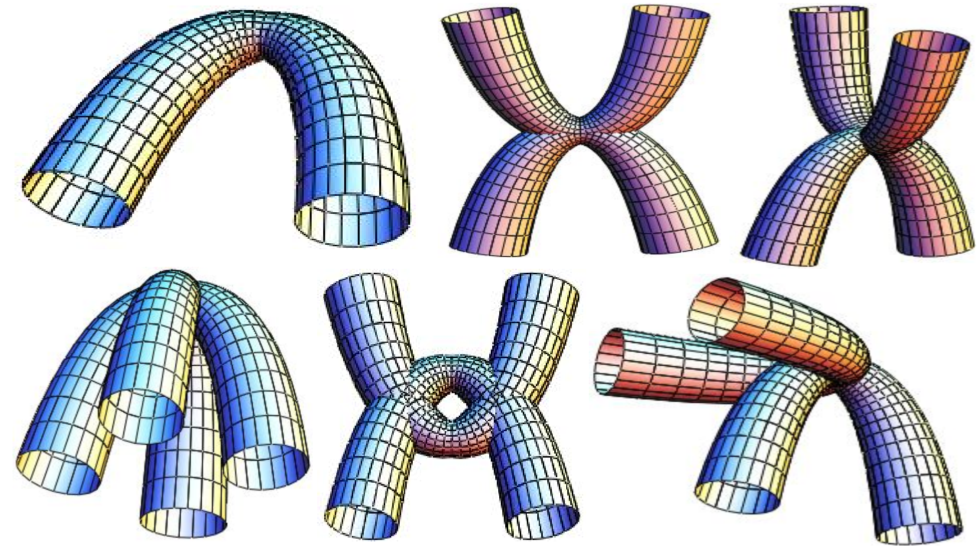

Рис. 9. Комбинированные конструкции из отсеков нормальных циклических поверхностей с линией центров – цепной линией

Приведенные примеры показывают большие возможности создания тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей.

Литература

1. *Krivoshapko S.N,. Ivanov V.N.* Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. - 752 p.

2. *Иванов В.Н., Романова В.А.*, Конструкционные формы тонкостенных конструкций: Монография. - М.: Изд-во АСВ, 2016. - 412 с.

3. *Krivoshapko S.N., Christian A. Bock Hyeng*. Geometrical research of rare types of cyclic surfaces// International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. – 2012. – Vol. 12. – Iss. 3. – P. 346-359.

4. *Иванов В.Н.* Некоторые вопросы теории поверхностей с семейством плоских координатных линий//Расчет оболочек строительных конструкций. - М.: УДН, 1977. - С. 37-48.

5. *Иванов В.Н.* Геометрия и конструирование трубчатых оболочек// Вестник Российского университета дружбы народов/ Серия: «Инженерные исследования». –2005. – № 1 (11). – С. 109-114.

6. *Иванов В.Н.* Об одном подклассе нормальных циклических поверхностей// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов, вып. 13. - М.: Изд-во АСВ, 2004. - С. 20-27.

References

1. *Krivoshapko*, *S.N., Ivanov, V.N.* (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces,* Springer International Publishing Switzerland, 752 p.

2. *Ivanov, V.N., Romanova, V.A.* (2016). *Construction Forms of the Space Structures*: Monograph, Moscow: Izd-vo ASV, 412 p.

3. *Krivoshapko*, *S.N., Hyeng, Ch. A. Bock* (2012). Geometrical research of rare types of cyclic surfaces, International *Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, Vol. 12, Iss. 3, p. 346-359.

4. *Ivanov, V.N.* (1977). Some questions of the theory of the surfaces with the system of plane coordinate lines, *Analysis of the Building Shell Structures*, Moscow: UDN, p. 47-48.

5. *Ivanov, V.N.* (2005). Geometry and construction of the tube shells, *Vestnik of the RUDN University*, Ser. “Engineering investigations”, № 1 (11), p. 109-11.

6. *Ivanov, V.N.* (2004). On one class of the normal cyclic surfaces, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*: Mezvusovskiy sbornik nauchnyh trudov, vyp. 13, Moscow: Izd-vo ASV, p. 20-27.

GEOMETRY AND FORMATION OF THE THIN-WALLED SPACE SHELL STRUCTURES ON THE BASE OF NORMAL CYCLIC SURFACES

V.N. Ivanov, A.A. Shmeleva
RUDN University, Moscow, Russia

The new forms of building structures are widely used for modern social buildings, exhibition pavilions, sport and industrial erections. The possibility to create new forms of thin space shell structures on the base of normal cyclic surfaces is considering in the paper. The thin-walled shells formed by the system of the circles as well as by the system of right lines are the mostly comfortable for the erection on the building sites or for formation of the details of the structures. The normal cyclic surfaces are allowed to construct many different forms of the space structures. It is possible to create new space structures on the base of cyclic surface with combination of cylindrical or other surfaces.

Key words: normal cyclic surfaces, directrix curve, normal plane of the curve, orthogonal coordinate system of the surface, formation of the cyclic surfaces, combined thin space shell structures.