

Теория упругости

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО АНИЗОТРОПНОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ТРЕНИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ

С.Г. КУДРЯВЦЕВ, канд. техн. наук, доцент

Ю.М. БУЛДАКОВА, зав. лабораторией

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет»

424000, Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, дом 3

KudryavcevSG@volgatech.net

Представлена методика определения перемещений и напряжений в двухслойном анизотропном основании при отсутствии трения между слоями под действием нормальной поверхностной нагрузки. Решение проводится на основе уравнений плоской задачи теории упругости. Представлены графики изменения напряжений в зависимости от характеристик материала слоев.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: перемещение, напряжение, полоса, упругая полуплоскость, анизотропия.

При возведении насыпей с последующим уплотнением слоев возникают отклонения в строении грунтовых массивов от модели изотропного тела. Поэтому задача об определении напряжений и перемещений под действием поверхностных нагрузок в двухслойном анизотропном упругом основании, когда верхний слой имеет конечную толщину, а нижний – бесконечно простирается по всем направлениям, представляет практический интерес. Для изотропного материала с разными характеристиками каждого слоя она рассматривалась во многих работах, например [1–3]. Теоретическое решение задачи о взаимодействии слоя и полупространства из трансверсально-изотропных материалов приведено в [4]. Вариант многослойного основания рассмотрен в [5].

Рассмотрим двухслойное основание (рис. 1), которое состоит из полосы постоянной высоты h и полуплоскости, под действием нормальной поверхностной нагрузки $q(x)$. Полагаем, что трение между слоями отсутствует. Материал слоев принимаем ортотропным, но с разными упругими характеристиками. Направления осей анизотропии в частном случае совпадают с координатными осями. Обозначим в полуплоскости перемещения, напряжения, коэффициенты, которые учитывают характеристики материала, чертой сверху.

Введем две системы координат с общим началом отсчета и осью абсцисс. Оси x и \bar{x} направим вдоль линии контакта полосы и основания. Ось y –

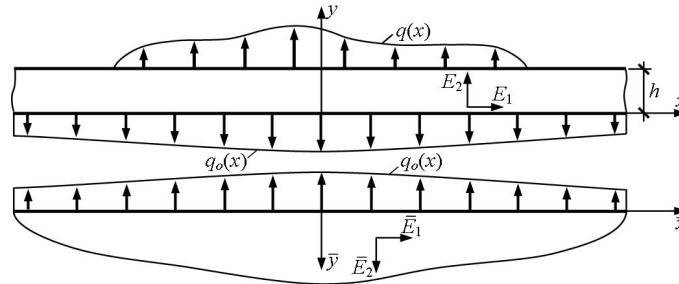


Рис. 1. Схема взаимодействия полосы и упругой полуплоскости

перпендикулярно линии контакта вверх, \bar{y} – вниз. Координатные оси x и \bar{x} совпадают, поэтому далее используем только координату x .

Для решения задачи выпишем из [6] уравнения для определения в произвольной точке полосы из ортотропного материала перемещений:

$$\begin{aligned} \mu u = & -(\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) \mu_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \nu_o + \\ & + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} q_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1^2 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2^2 \sin s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} \tau_o, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu v = & (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) \mu_o + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) \nu_o - \\ & - (s_1 \mu_2^2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1^2 \sin s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} q_o + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} \tau_o \end{aligned}$$

и напряжений

$$\begin{aligned} \mu \sigma_x = & (s_1^2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \cos s_2 y \partial) \partial \mu_o - (s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \partial \nu_o - \\ & - (s_1^2 \mu_2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \mu_1 \cos s_2 y \partial) q_o - (s_1 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \tau_o, \\ \mu \sigma_y = & -(\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \partial \mu_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \sin s_1 y \partial - s_1 \sin s_2 y \partial) \partial \nu_o + \\ & + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) q_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \tau_o, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu\tau_{xy} = (s_1 \sin s_1 y\partial - s_2 \sin s_2 y\partial)\partial u_o - (\cos s_1 y\partial - \cos s_2 y\partial)\partial v_o + \\ + (s_1 \mu_2 \sin s_1 y\partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y\partial)q_o - (\mu_1 \cos s_1 y\partial - \mu_2 \cos s_2 y\partial)\tau_o,$$

где u_o, v_o, q_o, τ_o – функции перемещений и поверхностных усилий на нижней плоскости полосы, которые зависят от переменной x . Производная по x обозначена через $\partial(\partial/\partial x)$. В уравнениях (1) и (2) введены обозначения:

$$s_{1,2}^2 = \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}} \pm \sqrt{\left(\frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}}\right)^2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}},$$

$$\mu_1 = \beta_{12} - \beta_{11}s_1^2, \mu_2 = \beta_{12} - \beta_{11}s_2^2, \mu = \mu_2 - \mu_1.$$

Для плоского напряженного состояния $\beta_{ij} = a_{ij}$, при плоской деформации $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}a_{j3}/a_{33}$, где a_{ij} – коэффициенты деформации, связанные с техническими постоянными соотношениями [7].

Из работы [8] запишем уравнения для определения в полуплоскости из ортотропного материала перемещений

$$\bar{s}\bar{v} = \frac{1}{\partial} \left[\bar{s}_1 \bar{s}_2 (-\bar{\mu}_2 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} + \bar{\mu}_1 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) i q_o + (\bar{s}_1 \bar{\mu}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial} - \bar{s}_2 \bar{\mu}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial}) \tau_o \right], \\ \bar{s}\bar{u} = \frac{1}{\partial} \left[(\bar{s}_2 \bar{\mu}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} - \bar{s}_1 \bar{\mu}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) q_o + (\bar{\mu}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} - \bar{\mu}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) i \tau_o \right] \quad (3)$$

и напряжений

$$\bar{s}\bar{\sigma}_x = -\left[\bar{s}_1 \bar{s}_2 (\bar{s}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} - \bar{s}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) q_o + (\bar{s}_1^2 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} - \bar{s}_2^2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) i \tau_o \right], \\ \bar{s}\bar{\sigma}_y = \left[(\bar{s}_2 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} - \bar{s}_1 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) q_o + (e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} - e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) i \tau_o \right], \\ \bar{s}\bar{\tau}_{xy} = \left[\bar{s}_1 \bar{s}_2 (e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} - e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) i q_o - (\bar{s}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y}\partial} - \bar{s}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y}\partial}) \tau_o \right], \quad (4)$$

где $\bar{s} = \bar{s}_2 - \bar{s}_1$.

В (3) и (4) обозначения $\bar{s}_i (i = 1, 2)$, $\bar{\mu}_i (i = 1, 2)$ аналогичны ранее введенным коэффициентам s_i, μ_i ; q_o, τ_o – функции поверхностных усилий на границе полуплоскости. Уравнения (1)–(4) записаны для варианта $s_1 \neq s_2$ и $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$.

Обозначим контактное давление между слоями $q_o = q_o(x)$. При условии плотного контакта и отсутствии трения между слоями имеем

$$v_o(x, y = 0) = -\bar{v}_o(x, \bar{y} = 0), \tau_{xy}(x, y = 0) = \bar{\tau}_{xy}(x, \bar{y} = 0) = 0. \quad (5)$$

Нижний индекс "ноль" в обозначениях перемещений указывает, что они определены при $y = \bar{y} = 0$. На верхней плоскости полосы:

$$\sigma_y(x, y = h) = q(x), \tau_{xy}(x, y = h) = 0. \quad (6)$$

Полагая в (3) значение $\bar{y} = 0$, найдем

$$\partial \bar{u}_o = \frac{1}{\bar{s}} \bar{k} q_o, \partial \bar{v}_o = -\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} i q_o = -\partial v_o, \quad (7)$$

где $\bar{k} = \bar{s}_2 \bar{\mu}_1 - \bar{s}_1 \bar{\mu}_2 = \bar{s}(\bar{\beta}_{12} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\beta}_{11})$.

Подставим ∂v_o в уравнения (2) и, учитывая условия (6), получим систему двух уравнений относительно неизвестных функций $q_o, \partial u_o$, откуда

$$q_o = \frac{2\mu}{D} (s_1 \sin s_1 h\partial - s_2 \sin s_2 h\partial) q(x), \\ \partial u_o = \frac{2\mu}{D} \left[(s_1 \mu_2 \sin s_1 h\partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 h\partial) - i \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (\cos s_1 h\partial - \cos s_2 h\partial) \right] q(x), \quad (8)$$

где
$$\tilde{D} = \mu[(s_1 - s_2)\sin(s_1 + s_2)h\partial + (s_1 + s_2)\sin(s_1 - s_2)h\partial] +$$

$$+ i \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{s_1 s_2 \bar{s}} [4s_1 s_2 - (s_1 + s_2)^2 \cos(s_1 - s_2)h\partial + (s_1 - s_2)^2 \cos(s_1 + s_2)h\partial].$$

Используя (7) и (8), можно составить выражения $\partial \bar{u}_o$, $\partial \bar{v}_o$, ∂v_o .

Полагаем, что существует интегральное преобразование Фурье от функции $q(x)$. Функцию $q(x)$ разделим на симметричную $q_s(x)$ и кососимметричную $q_a(x)$ составляющие [9]. Тогда

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [q_s(\tilde{\lambda}) + iq_a(\tilde{\lambda})] e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \quad (9)$$

где
$$q_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_s(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx, \quad q_a(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_a(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx,$$

$\tilde{\lambda}$ – любое положительное вещественное число.

Подставим (9) в выражения q_o , ∂u_o и ∂v_o , которые внесем в (1) и (2). Учитывая, что перемещения и напряжения – действительные величины, получим уравнения для вычисления перемещений и напряжений в точке полосы.

При определении функций перемещений и напряжений в полуплоскости найдем функции q_o , $\partial \bar{u}_o$, $\partial \bar{v}_o$, используя (7)–(9), которые подставим в (3) и (4).

Порядок расчета покажем на примере. Пусть в сечении $x = 0$ перпендикулярно верхней плоскости полосы приложена сила интенсивностью $(-F)$. Сила равномерно распределена вдоль оси перпендикулярной плоскости рисунка 1. При симметричной нагрузке $q_a(x) = 0$. Трансформанта Фурье

$$q_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(-F) \cos \tilde{\lambda}x dx = -\frac{F}{\sqrt{2\pi}}, \quad (10)$$

$\delta(x)$ – дельта функция Дирака.

Учитывая (7)–(10), найдем:

$$\partial u_o = -\frac{\mu F}{\pi h} \int_0^{\infty} A_1(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \quad \partial v_o = -\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu} \mu F}{\bar{s} \pi h} \int_0^{\infty} A_2(\lambda) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \quad (11)$$

$$q_o = -\frac{\mu F}{\pi h} \int_0^{\infty} A_2(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda,$$

где $\lambda = \tilde{\lambda} h$, $\tilde{x} = x/h$, $A_1(\lambda) = (s_1 \mu_2 s h s_1 \lambda - s_2 \mu_1 s h s_2 \lambda) + \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (c h s_1 \lambda - c h s_2 \lambda)$,

$$A_2(\lambda) = s_1 s h s_1 \lambda - s_2 s h s_2 \lambda, \quad D = \frac{1}{2} \left\{ \mu [(s_1 - s_2) s h (s_1 + s_2) \lambda + (s_1 + s_2) s h (s_1 - s_2) \lambda] - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{s_1 s_2 \bar{s}} [4s_1 s_2 - (s_1 + s_2)^2 c h (s_1 - s_2) \lambda + (s_1 - s_2)^2 c h (s_1 + s_2) \lambda] \right\}.$$

Подставим (11) в (1) и (2). После преобразований получим уравнения для определения в произвольной точке полосы перемещений

$$\tilde{u} = \int_0^{\infty} \left\{ (\mu_1 c h s_1 \lambda \tilde{y} - \mu_2 c h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{s_1 s_2 \bar{s}} (s_2 \mu_1 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_1 \mu_2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \mu_1 \mu_2 (c h s_1 \lambda \tilde{y} - c h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{\mu D} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v} = & -\int_0^{\infty} \left\{ (s_1 \mu_2 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 \mu_1 s h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (\mu_2 c h s_1 \lambda \tilde{y} - \mu_1 c h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (s_1 \mu_2^2 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 \mu_1^2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{\mu D} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \text{и напряжений} \\ \tilde{\sigma}_x = & -\int_0^{\infty} \left\{ (s_1^2 c h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2^2 c h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (s_1 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (s_1^2 \mu_2 c h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2^2 \mu_1 c h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\sigma}_y = & \int_0^{\infty} \left\{ (c h s_1 \lambda \tilde{y} - c h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{s_1 s_2 \bar{s}} (s_1 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\mu_2 c h s_1 \lambda \tilde{y} - \mu_1 c h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\tau}_{xy} = & -\int_0^{\infty} \left\{ (s_1 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (c h s_1 \lambda \tilde{y} - c h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (s_1 \mu_2 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 \mu_1 s h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tilde{u} = \frac{u\pi}{\mu F}$, $\tilde{v} = \frac{v\pi}{\mu F}$, $\tilde{\sigma}_x = \frac{\sigma_x \pi h}{F}$, $\tilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y \pi h}{F}$, $\tilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} \pi h}{F}$, $\tilde{y} = \frac{y}{h}$.

Используя (3), (4), (7), (11), запишем функции для определения в полуплоскости перемещений

$$\begin{aligned} \tilde{u} = & -\frac{1}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (\bar{s}_2 \bar{\mu}_1 e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - \bar{s}_1 \bar{\mu}_2 e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \tilde{v} = & -\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (\bar{\mu}_2 e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - \bar{\mu}_1 e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \quad (14)$$

и напряжений

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x = & \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (\bar{s}_1 e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - \bar{s}_2 e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\sigma}_y = & -\frac{\bar{\mu}}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (\bar{s}_2 e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - \bar{s}_1 e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\tau}_{xy} = & -\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tilde{u} = \frac{\bar{u}\pi}{\mu F}$, $\tilde{v} = \frac{\bar{v}\pi}{\mu F}$, $\tilde{\sigma}_x = \frac{\bar{\sigma}_x \pi h}{F}$, $\tilde{\sigma}_y = \frac{\bar{\sigma}_y \pi h}{F}$, $\tilde{\tau}_{xy} = \frac{\bar{\tau}_{xy} \pi h}{F}$, $\tilde{y} = \frac{\bar{y}}{h}$.

Интегралы для параметров перемещений \tilde{u} , \tilde{v} при значениях $\tilde{y} = \bar{y} = 0$ расходящиеся. При их вычислении используем прием, предложенный в [9].

Варьируя в (12)–(15) значениями коэффициентов s_i , \bar{s}_i , μ_i , $\bar{\mu}_i$, можно провести анализ напряженного и деформированного состояния двухслойного основания при отсутствии трения между слоями в зависимости от упругих характеристик материалов полосы и полуплоскости.

Полагая в (13) $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$, найдем функции напряжений в полосе из ортотропного материала, лежащей без трения на жестком основании. Например,

$$\tilde{\sigma}_y = \int_0^{\infty} [(chs_1\lambda\tilde{y} - chs_2\lambda\tilde{y})B_1(\lambda) - (\mu_2chs_1\lambda\tilde{y} - \mu_1chs_2\lambda\tilde{y})B_2(\lambda)] \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D^*} d\lambda, \quad (16)$$

где $B_1(\lambda) = s_1\mu_2shs_1\lambda - s_2\mu_1shs_2\lambda$, $B_2(\lambda) = s_1shs_1\lambda - s_2shs_2\lambda$,

$$D^* = \frac{\mu}{2} [(s_1 - s_2)sh(s_1 + s_2)\lambda + (s_1 + s_2)sh(s_1 - s_2)\lambda].$$

Функции перемещений в полосе выведем аналогично из уравнений (12).

Переход к варианту, когда материал полосы изотропный, покажем на примере параметра напряжения $\tilde{\sigma}_y$. Слагаемые, входящие под знак интеграла в (16), раскладываем в ряды. Рассмотрим первое слагаемое. Каждый сомножитель отдельно раскладываем в ряд. Тогда

$$\begin{aligned} chs_1\lambda\tilde{y} - chs_2\lambda\tilde{y} &= \\ &= (s_1^2 - s_2^2) \left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}(s_1^2 + s_2^2)(\lambda\tilde{y})^2 + \frac{1}{6!}(s_1^4 + s_1^2s_2^2 + s_2^4)(\lambda\tilde{y})^4 + \dots \right], \\ B_1(\lambda) &= (s_1^2 - s_2^2) \left\{ \beta_{12}\lambda + \frac{\lambda^3}{3!} [\beta_{12}(s_1^2 + s_2^2) - \beta_{11}s_1^2s_2^2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^5}{5!} [\beta_{12}(s_1^4 + s_1^2s_2^2 + s_2^4) - \beta_{11}s_1^2s_2^2(s_1^2 + s_2^2)] + \dots \right\}, \\ D^* &= \beta_{11}(s_1^2 - s_2^2)^2 \left[\lambda + \frac{\lambda^3}{3!}(s_1^2 + s_2^2) + \frac{\lambda^5}{5!}(s_1^4 + 6s_1^2s_2^2 + s_2^4) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Сократим числитель и знаменатель на $(s_1^2 - s_2^2)^2$. Для плоского напряженного состояния $\beta_{11} = 1/E$, $\beta_{12} = -\nu/E$. Подставим значения технических постоянных в (17) и, учитывая, что для изотропного материала $s_1 = s_2 = 1$, ряды свернем. Выполнив преобразования со вторым слагаемым, получим

$$\tilde{\sigma}_y = 2 \int_0^{\infty} [\lambda\tilde{y}sh\lambda\tilde{y} - ch\lambda\tilde{y}(sh\lambda + \lambda ch\lambda)] \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D^{**}} d\lambda, \quad (18)$$

где $D^{**} = 2\lambda + sh2\lambda$.

Функции перемещений и двух других напряжений несложно записать, используя предложенный подход. Из формулы (18) следует, что в полосе из изотропного материала при плоском напряженном состоянии и отсутствии трения между слоями напряжения не зависят от коэффициента Пуассона.

В таблице 1 для полосы из изотропного материала, лежащей на жестком основании, приведены значения $\tilde{\sigma}_y$ в сечении $\tilde{x} = 0$ в зависимости от величины параметра \tilde{y} и характера взаимодействия полосы и основания. Данные второй строки соответствуют варианту, когда полоса жестко скреплена с основанием [6], данные третьей – вычислены по формуле (18). Наибольшее отличие в значениях наблюдается в области контакта полосы с жестким основанием.

Таблица 1. Значения параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ для изотропной полосы, лежащей на жестком основании, в зависимости от \tilde{y}

\tilde{y}	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
жесткое соединение	6,761	5,161	4,233	3,643	3,247	2,967	2,752	2,558
без трения	6,752	5,153	4,229	3,654	3,286	3,056	2,929	2,889

Функции напряжений в полуплоскости из ортотропного материала выведем из уравнений (15). Запишем, например, напряжение $\bar{\sigma}_x$ через размерные величины и полагаем $h \rightarrow 0$. После преобразований, используя [10], найдем

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 F}{\pi \bar{s}} \int_0^\infty (\bar{s}_1 e^{-\bar{s}_1 \tilde{\lambda} \tilde{y}} - \bar{s}_2 e^{-\bar{s}_2 \tilde{\lambda} \tilde{y}}) \cos \tilde{\lambda} x d\tilde{\lambda} = -\frac{F}{\pi} \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 (\bar{s}_1 + \bar{s}_2) x^2 \tilde{y}}{(\bar{s}_1^2 \tilde{y}^2 + x^2)(\bar{s}_2^2 \tilde{y}^2 + x^2)}. \quad (19)$$

Формула (19) совпадает с приведенной в [7]. Принимая в (19) $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 1$, имеем выражение напряжения $\bar{\sigma}_x$ в полуплоскости из изотропного материала [9]. Формулы для напряжений $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}$ получим аналогично.

Функции перемещений в полуплоскости из ортотропного материала найдем из уравнений (14), в которых полагаем $h \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{F}{\pi \bar{s}} \int_0^\infty (\bar{s}_2 \mu_1 e^{-\bar{s}_1 \tilde{\lambda} \tilde{y}} - \bar{s}_1 \mu_2 e^{-\bar{s}_2 \tilde{\lambda} \tilde{y}}) \sin \tilde{\lambda} x \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}}, \\ \bar{v} &= \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 F}{\pi \bar{s}} \int_0^\infty (\mu_2 e^{-\bar{s}_1 \tilde{\lambda} \tilde{y}} - \mu_1 e^{-\bar{s}_2 \tilde{\lambda} \tilde{y}}) \cos \tilde{\lambda} x \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Интеграл для вычисления \bar{v} при значении $\tilde{y} = 0$ расходящийся.

После интегрирования уравнений (20), используя [10], получим формулы, которые приведены в [8].

Функции перемещений, напряжений в полосе и основании при других сочетаниях между упругими характеристиками материала слоев: материал полосы изотропный, основания анизотропный; материал полосы анизотропный, основания изотропный; материал каждого слоя изотропный, но с разными упругими характеристиками; найдем, используя уравнения (12)–(15) и зависимости между коэффициентами деформации и техническими постоянными [7].

Численные расчеты проведены для основания, слои которого состоят из разных изотропных материалов, в условиях плоского напряженного состояния. Коэффициент Пуассона материала слоев $\nu = 0,25$. Коэффициент $\alpha = E/\bar{E}$, где E – модуль упругости материала полосы, \bar{E} – полуплоскости.

На рис. 2–4 показаны графики распределения параметра напряжения $\tilde{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y$) при отсутствии трения между полосой и основанием в зависимости от коэффициента α , значений \tilde{x}, \tilde{y} (\tilde{y}). В таблицах приведены данные для $\tilde{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y$) в сечении $\tilde{x} = 0$. Значение $\alpha = 0$ соответствует случаю, когда полоса

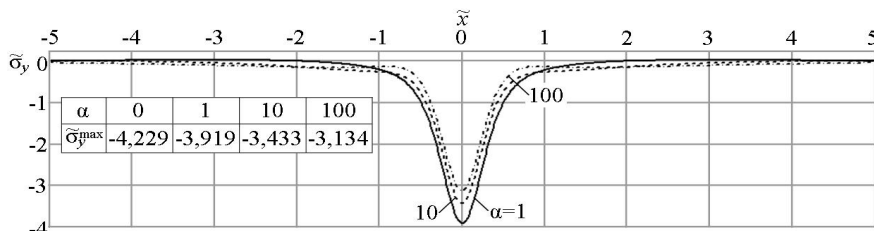


Рис. 2. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ вдоль горизонтальной оси ($\tilde{y} = 0,5$)

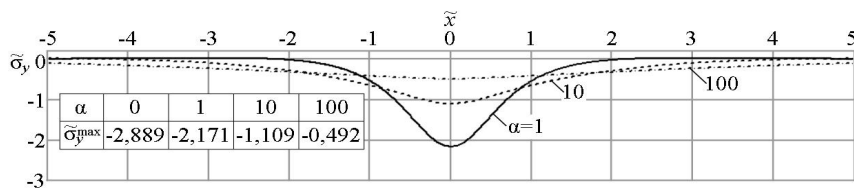


Рис. 3. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ на линии контакта полосы и основания

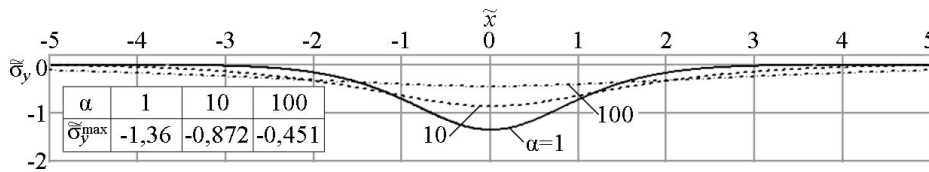


Рис.4. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ вдоль горизонтальной оси ($\tilde{y} = 1,0$)

лежит без трения на жестком основании. Из сравнения кривых видно, что с увеличением модуля упругости материала верхнего слоя значения параметра $\tilde{\sigma}_y$ ($\tilde{\sigma}_y$) уменьшаются, а область его распространения в направлении горизонтальной оси увеличивается. Максимальное отличие в значениях имеет место в области контакта полосы и основания.

На рис. 5 в увеличенном масштабе показаны эпюры изменения $\tilde{\sigma}_y$ в полосе при $\tilde{y} = 0,5$ в зависимости от коэффициента α . Точками обозначены значения \tilde{x} , в которых происходит смена знака у параметра $\tilde{\sigma}_y$.

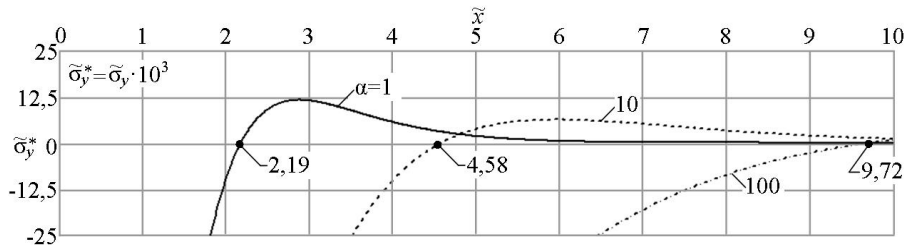


Рис.5. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y$ вдоль горизонтальной оси ($\tilde{y} = 0,5$)

В таблице 2 приведены данные расчета $\tilde{\sigma}_y$ ($\tilde{\sigma}_y$) в сечении $\tilde{x} = 0$ для двухслойного основания при разных значениях коэффициента α , параметров \tilde{y} (\tilde{y}) и характера взаимодействия между слоями. Данные для варианта жесткого соединения между слоями вычислены с использованием уравнений [8].

Таблица 2. Значения параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ ($\tilde{\sigma}_y^{\max}$) в зависимости от α , \tilde{y} (\tilde{y}), характера взаимодействия между слоями

		коэффициент α							
		жесткое соединение				без трения			
		0	1	10	100	0	1	10	100
\tilde{y}	0,5	4,233	4,000	3,525	3,166	4,229	3,919	3,433	3,134
	0,25	3,096	2,667	1,864	1,276	3,156	2,595	1,741	1,229
	0,0	2,558	2,000	1,144	0,524	2,889	2,171	1,109	0,492
\tilde{y}	1,0	–	1,000	0,694	0,411	–	1,36	0,872	0,451
	2,0	–	0,667	0,508	0,343	–	0,875	0,665	0,399

Характер изменения параметра напряжения $\tilde{\tau}_{xy}$ ($\tilde{\tau}_{xy}$) от значений α , \tilde{y} (\tilde{y}) при отсутствии трения между слоями показан на рис.6-7. При анализе графиков на рис.7 необходимо учитывать направление оси \tilde{y} . В таблицах приведены максимальные значения $\tilde{\tau}_{xy}$ ($\tilde{\tau}_{xy}$) и положение сечений, параметр \tilde{x} , в котором они возникают. На рис.6 точками указаны сечения, в которых $\tilde{\tau}_{xy}$ меняет знак.

Характер изменения параметра напряжения $\tilde{\sigma}_x$ в полосе на линии контакта слоев показан на рис.8. Из анализа кривых видно, что значения $\tilde{\sigma}_x$ в сечении

$\tilde{x} = 0$ возрастают с увеличением коэффициента α . Точками обозначены сечения, в которых происходит смена знака у параметра $\tilde{\sigma}_x$. Известно [11], что при отсутствии касательных усилий на границе полуплоскости нормальные напряжения $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\sigma}_y$ на границе равны. Поэтому графики изменения параметра $\tilde{\sigma}_x$ в основании при $\tilde{y} = 0$ совпадают с графиками на рис. 3.

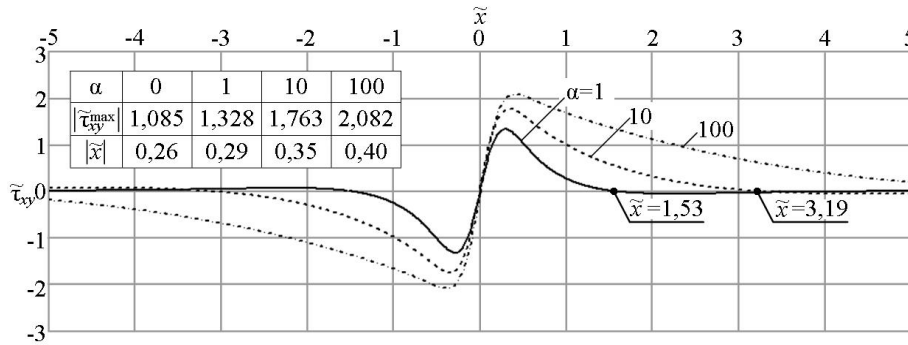


Рис. 6. Изменение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ вдоль горизонтальной оси ($\tilde{y} = 0,5$)

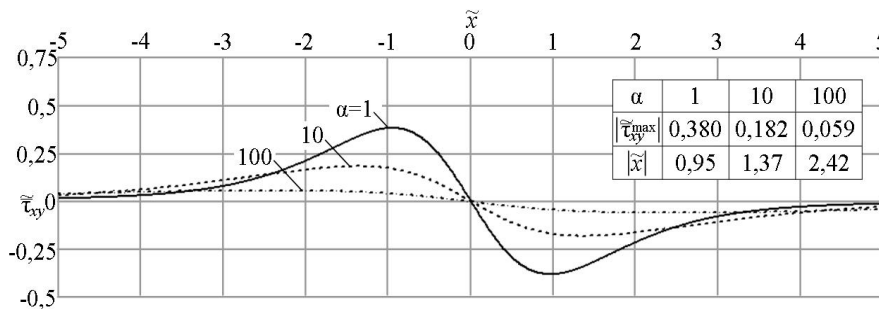


Рис. 7. Изменение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ вдоль горизонтальной оси ($\tilde{y} = 1,0$)

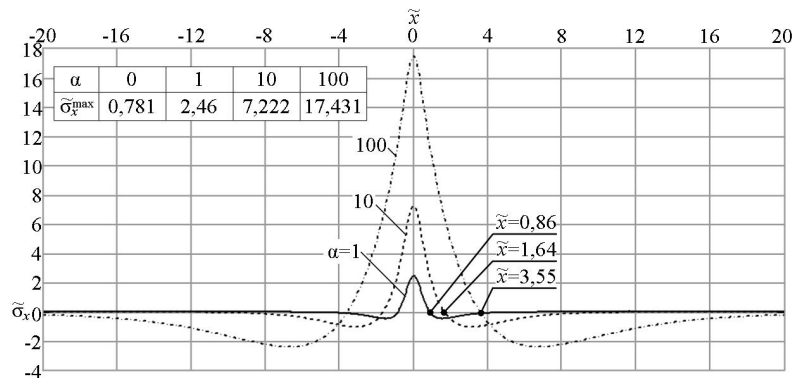


Рис.8. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_x$ в полосе на линии контакта слоев

Формулы (12)–(15) после преобразований можно использовать и для определения перемещений и напряжений в двухслойном основании под действием распределенной поверхностной нормальной нагрузки. Для этого в (12)–(15) полагаем $F = 1$ и заменяем переменную \tilde{x} на $\tilde{x} - \tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi}$ – безразмерная координата точки приложения силы. В результате получим функции влияния, которые позволят записать перемещения, напряжения в полосе и полуплоскости при нагружении двухслойного основания распределенной нормальной нагрузкой интенсивностью $q(\tilde{\xi})$ на участке конечной длины.

Л и т е р а т у р а

1. Шехтер, О.Я. Расчет бесконечной фундаментальной плиты, лежащей на упругом основании конечной и бесконечной мощности и нагруженной сосредоточенной силой/ О.Я. Шехтер // Сборник трудов научно-исследовательского сектора треста глубинных работ. – М.: Госстройиздат, 1939. – С.133-139.
2. Раппопорт, Р.М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства/ Р. М. Раппопорт// Труды Ленинградского политехнического института. – Л., 1948, – №5. – С.3-18.
3. Коган, Б.И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б.И. Коган // Труды ХАДИ. – Харьков, 1953, – вып.14. – С.33-46.
4. Fabrikant, V.I. Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation / V.I. Fabrikant // Journal of Engineering Mathematics. – 2011. – vol. 70, issue 4, P.363-388.
5. Fabrikant, V.I Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation / V.I. Fabrikant // Journal of Engineering Mathematics. – 2013 – vol. 81, issue 1, P.93-126.
6. Кудрявцев, С.Г. Взаимодействие анизотропной полосы и жесткого основания / С.Г. Кудрявцев, Ю.М. Булдакова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – №4. – С.29-35.
7. Лехницкий, С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1957. – 464 с.
8. Кудрявцев, С.Г. Напряженное и деформированное состояние двухслойного анизотропного основания / С.Г. Кудрявцев, Ю.М. Булдакова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №5. – С.9-20.
9. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
10. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука. 1978. – 228 с.
11. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

References

1. Shekhter, O.Ja. (1939). Calculation of infinite foundation slab, lying on the elasticity based on finite and infinite power and loaded with a concentrated force, *Proceedings of the Scientific-Research Sector of the Trust Underlying Work*, M.: Gosstroizdat, p.133-139
2. Rappoport, R.M. (1948). The problem for the Boussinesq layered elastic half-space, *Proceedings of the Leningrad Polytechnic Institute*, L., №5.,p. 3-18.
3. Kogan, B.I. (1953). Stress and deformed multilayer coatings, *Proceedings HADI*, Kharkiv, Iss. 14, p. 33-46.
4. Fabrikant, V.I. (2011). Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 70, Iss. 4, p. 363-388.
5. Fabrikant, V.I (2013). Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol.81, Iss. 1, p. 93-126.
6. Kudryavtsev, S.G., Buldakova, Y.M. (2012). Interaction anisotropic layer and rigid base, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, p.29-35.
7. Lehnitsky, S.G. (1957). *Anisotropic Plate*, M.: The GITTL, 464 p.
8. Kudryavtsev, S.G., Buldakova, Y.M. (2015). Stress and deformed state of the two-layer anisotropic base, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, №5, p. 9-20.
9. Nowacki, V. (1975). *Theory of Elasticity*, M.: Mir, 872 p.
10. Dwight, G.B. (1978). *Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas*, M.: Nauka, 228 p.
11. Lurie, A.I. (1970). *Theory of Elasticity*, M.: Nauka, 940 p.

STRESS AND DEFORMED STATE OF TWO-LAYERED ANISOTROPIC FOUNDATION IN THE ABSENCE OF FRICTION BETWEEN THE LAYERS

KUDRYAVTSEV S.G., BULDAKOVA J.M.

The technique of determining displacements and stresses in anisotropic two-layer basis, in the absence of friction between the layers, under the influence of normal surface load is given. The solution is based on the equations of the plane problem of elasticity theory. The diagrams of change of stresses plotted on the characteristics of the material layers are presented.

KEYWORDS: displacement, stress, band, elastic half-plane, anisotropy.