УСТОЙЧИВОСТЬ РЕБРИСТЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

В.М. ЖГУТОВ, *канд. техн. наук*
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж», Санкт-Петербург

Известно, что при решении задач устойчивости оболочек в физически линейной постановке анализ наступления пластических деформаций производится с помощью критерия Мизеса, исходя из определенного коэффициента запаса прочности. Известно также, что для получения истинной картины деформирования оболочки наряду с геометрической нелинейностью (проявляющейся при достаточно больших перемещениях) важно учитывать и физическую нелинейность, что связано с серьезными математическими трудностями.

Исследование устойчивости оболочек с учетом физической нелинейности проводилось В.А. Крысько [1], рассматривавшим пологие оболочки без ребер жесткости при шарнирно-подвижном закреплении их контура. При этом использовались уравнения равновесия в смешанной форме (т.е. упрощенная математическая модель технической теории оболочек) и решались задачи устойчивости в геометрически линейной постановке. В работе [1] на примере оболочек, выполненных из металла, показано, что учет физической нелинейности приводит к снижению критической нагрузки (в сравнении с критической нагрузкой, найденной при учете только геометрической нелинейности) на 60-70 %.

В настоящей работе устанавливается, что при совместном учете геометрической и физической нелинейностей процент снижения критической нагрузки еще более возрастает. Будем рассматривать пологие оболочки толщиной h, закрепленные по контуру определенным способом и находящиеся под действием поперечной нагрузки q. Срединную поверхность оболочки принимаем за отсчетную поверхность $z = 0$. Оси x и y криволинейной ортогональной системы координат направляем по линиям кривизны отсчетной поверхности, а ось z – по нормали к поверхности $z = 0$ в сторону ее вогнутости. Оболочка может быть подкреплена ребрами, расставленными (со стороны ее вогнутости) перекрестно вдоль координатных линий. Ребра задаем дискретно с помощью функции $H(x, y)$, характеризующей распределение ребер по оболочке и их высоту [2]. Будем учитывать геометрическую и физическую нелинейности, дискретное расположение ребер, их сдвиговую и крутильную жесткости, поперечные сдвиги.

С учетом геометрической нелинейности деформации в отсчетной поверхности оболочки принимают вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - K_x W + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2, \ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - K_y W + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial y},$$

где U, V и W – перемещения точек координатной поверхности вдоль осей x, y и z соответственно; $K_x = 1/R_1$ и $K_y = 1/R_2$ – главные кривизны (R_1, R_2 – главные радиусы кривизны) отсчетной поверхности в направлении осей x и y.

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = k\,f(z)\left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right), \ \gamma_{yz} = k\,f(z)\left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y}\right),$$

где ψ_x и ψ_y – углы поворота отрезка нормали к отсчетной поверхности оболочки в плоскостях $x \wedge z$ и $y \wedge z$ соответственно; $f(z)$ – функция, характеризующая закон распределения напряжений τ_{xz}, τ_{yz} вдоль оси z (z изменяется в пределах от $-h/2$ до $h/2 + H$); k – константа.

Будем полагать, что $f(z)$ имеет вид [2]:

$$f(z) = -\frac{6}{(h+H)^2}\left(z+\frac{h}{2}\right)\left(z-\frac{h}{2}-H\right).$$

Эта функция при $z = -h/2$ и $z = h/2 + H$ обращается в нуль и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h+H}\int\limits_{-h/2}^{h/2+H} f(z)dz = 1; \quad \frac{1}{h+H}\int\limits_{-h/2}^{h/2+H} f^2(z)dz = \frac{1}{k}, \quad \text{где } k = 5/6.$$

Перемещения в слое, отстоящем на расстоянии z от отсчетной поверхности, имеют вид $U^z = U + z\psi_x$, $V^z = V + z\psi_y$, $W^z = W$, откуда для деформаций в слое $z \neq 0$ ε_x^z, ε_y^z и γ_{xy}^z имеем $\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1$, $\varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2$, $\gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}$, где χ_1, χ_2 и χ_{12} – функции изменения кривизн и кручения, определяемые с помощью соотношений

$$\chi_1 = \frac{\partial\psi_x}{\partial x}, \; \chi_2 = \frac{\partial\psi_y}{\partial y}, \; 2\chi_{12} = \frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x}.$$

В случае физически линейных задач модуль упругости данного материала $E = \text{const}$, что и обуславливает линейную зависимость между напряжениями и деформациями. Как показывает опыт, зависимости «напряжение σ – деформация ε» для многих материалов оболочек имеют ярко выраженный нелинейный характер, а модуль упругости материала следует считать, вообще говоря, переменной величиной. В этом случае на основании экспериментальной (для данного материала) кривой «$\sigma - \varepsilon$» находится аппроксимирующая её кривая $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, которая при сложном напряженном состоянии заменяется зависимостью $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, где σ_i и ε_i – интенсивности напряжений и деформаций.

Представим эту зависимость в виде [3] $\sigma_i = \varepsilon_i E[1-\omega(\varepsilon_i)]$, где $\omega(\varepsilon_i)$ – функция А.А.Ильюшина; E – начальный модуль упругости.

Для металлов функцию $\omega(\varepsilon_i)$ удобно принять в виде

$\omega(\varepsilon_i) = m(\varepsilon_i)^2$, где m – константа (в частности, $m = 10^5$).

В качестве модуля упругости принимаем величину σ_i/ε_i («секущий» модуль упругости):

$$E_c = E[1 - \omega(\varepsilon_i)].$$

Интенсивность деформации ε_i определяем с помощью выражения [4]

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_x^z)^2 + \varepsilon_x^z\varepsilon_y^z + (\varepsilon_y^z)^2 + \frac{1}{4}[(\gamma_{xy}^z)^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2]}.$$

Функционал полной энергии деформации оболочки запишем в виде

$$Э = Э_у - Э_п, \tag{1}$$

где функционал

$$Э_у = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \times \int\limits_0^a\int\limits_0^b\left[(h+\bar{F})L_1 + 2\bar{S}L_2 + \left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)L_3 - \frac{2(1-\mu^2)}{E}qW\right]dxdy \tag{2}$$

соответствует линейно упругой постановке задачи, а функционал

$$Э_п = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left[I_1 L_1 + 2 I_2 L_2 + I_3 L_3 \right] dx dy \quad (3)$$

описывает нелинейную упругость. В соотношениях (2) и (3):

$$L_1 = \varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2 + \mu_1 k\left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \mu_1 k\left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y}\right)^2;$$

$$L_2 = \varepsilon_x\chi_1 + \mu\varepsilon_x\chi_2 + \varepsilon_y\chi_2 + \mu\varepsilon_y\chi_1 + 2\mu_1\gamma_{xy}\chi_{12};$$

$$L_3 = \chi_1^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1\chi_{12}^2; \quad I_m = \int_{-h/2}^{(h/2)+H} \omega(\varepsilon_i) z^{m-1} dz \ \ (m = 1, 2, 3);$$

$\overline{F}, \overline{S}$ и $\overline{J}$ – жесткостные характеристики ребер (площадь поперечного или продольного сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и, соответственно, момент инерции этого сечения); $\mu_1 = 0{,}5(1-\mu)$, где μ – коэффициент Пуассона; a и b – размеры оболочки в плане. Перейдем к безразмерным параметрам (более удобным для представления и анализа решения), введенным в [2], в частности:

– безразмерным координатам $\xi = x/a$, $\eta = y/b$;

– безразмерным кривизнам $k_\xi = a^2 K_x / h$, $k_\eta = b^2 K_y / h$;

– безразмерным перемещениям $\overline{U} = aU/h^2$, $\overline{V} = bV/h^2$, $\overline{W} = W/h$;

– безразмерной нагрузке $\overline{P} = a^4 q / E h^4$.

Получим функционал (1) в виде

$$\overline{Э} = \overline{Э}_у - \overline{Э}_п. \quad (4)$$

Для отыскания стационарного значения функционала (4) применяем метод Ритца при разложении искомых функций $\overline{U}(\xi,\eta)$, $\overline{V}(\xi,\eta)$, $\overline{W}(\xi,\eta)$, $\overline{\psi}_x(\xi,\eta)$, $\overline{\psi}_y(\xi,\eta)$ в виде

$$\overline{U} = \sum_{I=1}^{N} U(I) X1(I) Y1(I); \quad \overline{V} = \sum_{I=1}^{N} V(I) X2(I) Y2(I); \quad \overline{W} = \sum_{I=1}^{N} W(I) X3(I) Y3(I); \quad (5)$$

$$\overline{\Psi}_x = \sum_{I=1}^{N} PS(I) X4(I) Y4(I); \quad \overline{\Psi}_y = \sum_{I=1}^{N} PN(I) X5(I) Y5(I).$$

Здесь $U(I)$, $V(I)$, $W(I)$, $PS(I)$, $PN(I)$ – неизвестные числовые параметры; $X1(I) - X5(I)$ – известные (аппроксимирующие) функции безразмерной координаты ξ, удовлетворяющие заданным краевым условиям при $\xi = 0$, $\xi = 1$; $Y1(I) - Y5(I)$ – известные (аппроксимирующие) функции безразмерной координаты η, отвечающие заданным краевым условиям при $\eta = 0$, $\eta = 1$.

В результате применения метода Ритца к функционалу (4) при разложении (5) получим систему нелинейных алгебраических уравнений, которую кратко запишем в виде [5 – 8]

$$F_л(X) - cp \cdot \overline{P} = -F_н(X) + F_п(X), \quad (6)$$

где $X = [U(I),\ V(I),\ W(I),\ PS(I),\ PN(I)]^т$ – вектор неизвестных параметров; $cp \cdot \overline{P}$ – нагрузочный член (cp – коэффициент); $F_л(X)$, $F_н(X)$ – линейная и нелинейная (геометрически) части системы, соответствующие вместе с нагрузочным членом функционалу $\overline{Э}_у$; $F_п(X)$ – часть системы, описывающая физическую нелинейность (отвечающая функционалу $\overline{Э}_п$).

Для решения уравнений (6) применяем метод итераций [5 – 8].

При рассмотрении физически линейной задачи система уравнений (6) будет иметь вид

$$F_{\text{л}}(X) - cp \cdot \overline{P} = -F_{\text{н}}(X). \qquad (7)$$

Последовательно увеличивая нагрузку $\overline{P}$ методом итераций находим решение системы (7) при $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, …, $\overline{P}_{\text{к}}$:

$$F_{\text{л}}(X_i) - cp \cdot \overline{P} = -F_{\text{н}}(X_{i-1}).$$

После этого строим кривую «нагрузка $\overline{P}$ – прогиб $\overline{W}$» в какой-либо характерной точке оболочки (например, в центре оболочки). Нагрузку, соответствующую максимальному значению $\overline{P}$ на кривой «$\overline{P} - \overline{W}$», принимаем за критическую нагрузку $\overline{P}_{\text{кр}}$. Указанным способом исследуем устойчивость оболочки в физически линейной постановке (при учете геометрической нелинейности).

Исследуя устойчивость оболочки при совместном учете геометрической и физической нелинейностей, методом итераций находим решение нелинейной системы (6)

$$F_{\text{л}}(X_i) - cp \cdot \overline{P} = -F_{\text{н}}(X_{i-1}) + F_{\text{п}}(X_{i-1}).$$

За начальное приближение (при каждом значении нагрузки $\overline{P}$) в этом случае берем решение физически линейной задачи (при том же значении нагрузки).

Поскольку по мере роста напряжений модуль упругости материала уменьшается, деформации растут; стало быть, критические нагрузки, найденные в линейно упругой постановке задачи, будут уменьшаться.

Вычислительный эксперимент выполнен для некоторых вариантов пологих оболочек положительной гауссовой кривизны, представленных в табл.1.

Таблица 1. Параметры проанализированных оболочек

Вариант оболочки	Параметры оболочки			Возможные реальные размеры, м		
	$a = b$	$R_1 = R_2$	$k_\xi = k_\eta$	$a = b$	$R_1 = R_2$	h
I	$60h$	$225h$	16	18	67,5	0,3
II	$100h$	$251h$	40	18	45,3	0,18
III	$200h$	$503h$	79,5	18	45,3	0,09
IV	$600h$	$1510h$	238	18	45,3	0,03

Для каждого варианта были рассмотрены гладкие оболочки (не имеющие ребер) и ребристые оболочки, подкрепленные регулярным набором из 6-ти либо 18-ти ребер.

Считалось, что ребра расставлены вдоль координатных линий x и y соответственно по 3 ребра либо по 9 ребер в каждом из указанных направлений. Высота ребер принималась $3h$. Ширина ребер полагалась равной $2h$, $3{,}3h$, $6{,}6h$ и $20h$ соответственно для вариантов оболочек I, II, III и IV.

Кроме того, при проведении расчетов предполагалось, что:

– поперечная нагрузка q равномерно распределена, $q = const$ ($q > 0$);

– контур оболочки закреплен шарнирно-неподвижно;

– число членов разложения (5) $N = 9$.

В табл. 2 приведены для рассматриваемых вариантов гладких и ребристых оболочек расчетные значения безразмерных критических нагрузок $\overline{P}_{\text{кр}}$, найденные при решении физически линейной задачи (при учете только геометрической нелинейности).

Таблица 2. Расчетные значения безразмерной критической нагрузки $\overline{P}_{кр}$

Вариант оболочки	Значения безразмерной критической нагрузки $\overline{P}_{кр}$ при числе ребер		
	0	6 (3 + 3)	18 (9 + 9)
I	190	–	–
II	1140	2800	3610
III	5130	13770	20220
IV	71380	141480	212420

При совместном учете геометрической и физической нелинейностей критические нагрузки $\overline{P}^{п}_{кр}$ весьма значительно уменьшаются (в сравнении с $\overline{P}_{кр}$).

В табл.3 для различных вариантов гладких оболочек представлены расчетные значения безразмерных критических нагрузок $\overline{P}_{кр}$ и $\overline{P}^{п}_{кр}$, а также снижений (безразмерных) критических нагрузок, вычисляемых по формуле

$$\frac{\overline{P}_{кр} - \overline{P}^{п}_{кр}}{\overline{P}_{кр}} 100\,\%.$$

Таблица 3. Расчетные значения безразмерных критических нагрузок $\overline{P}_{кр}$ *и* $\overline{P}^{п}_{кр}$*, а также снижений критических нагрузок*

Вариант гладкой оболочки	$\overline{P}_{кр}$	$\overline{P}^{п}_{кр}$	Снижение критической нагрузки, %
I	190	32	83
II	1140	250	78
III	5130	1800	65
IV	71380	40430	43

Для ребристых оболочек варианта III процент снижения критической нагрузки составляет 67 % при 6-ти ребрах подкрепления и 70 % при 18-ти ребрах. Таким образом, учет физической нелинейности (совместно с учетом геометрической нелинейности) приводит к весьма значительному снижению критической нагрузки. Мы видим, что процент снижения критической нагрузки растет с увеличением толщины оболочки, а также числа ребер, подкрепляющих оболочку. Полученные результаты дают возможность аргументировано задавать коэффициенты запаса прочности при решении задач устойчивости оболочек в физически линейной постановке.

Литература

1. *Крысько В.А.* Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. – 216 с.

2. *Карпов В.В., Игнатьев О.В., Сальников А.Ю.* Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. – М.: АСВ; СПб: СПбГАСУ, 2002.– 420 с.

3. *Безруков Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. – 448 с.

4. *Вольмир А.С.* Гибкие пластины и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.

5. *Жгутов В.М.* Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента// Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сб. докладов VII Межд. конф. по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. – СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008. – С.110-131.

6. *Жгутов В.М.* Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007. – № 4. – С.20-23.

7. *Жгутов В.М.* Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала// «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Тр. конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 380 с. – С. 341-346.

8. *Жгутов В.М.*, *Мухин Д.Е., Панин А.Н.* Прочность и устойчивость пологих ребристых оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности// Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2008.– № 2.– С. 41–44.

STEADINESS OF DEPRESSED RIBBED SHELLS TAKING INTO ACCOUNT THE GEOMETRICAL AND PHYSICAL NONLINEARITIES

Zhgoutov V.M.