ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ГИБКОЙ СВЯЗИ И ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А. БАРАЕВ, *канд. техн. наук, доцент*
Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, Москва

Исследуются дифференциальные уравнения пространственного движения вязко нелинейно-упругой гибкой связи и свойства волн, возникающих при динамическом воздействии в вязко нелинейно-упругой гибкой связи (ВГС). Доказано, что в вязкой ГС при динамическом воздействия возникают одна продольная волна и две поперечной волны. Основное внимание уделяется исследованию свойств возникающих волн. Определены скорости распространения этих волн.

Введение

В зависимости от материала вязкой гибкой связи (ВГС) ее движения описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго и более высших порядков. Учет сложных законов динамического деформирования реальных материалов и наличие геометрических связей приводят к повышению трансцендентности и нелинейности дифференциальных уравнений, описывающих движение ВГС. В связи с этим в каждом конкретном случае требуются исследовать дифференциальные уравнения движения ВГС и находить методы их решения.

1. Преобразование дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения движения ВГС можно представит в виде [1]:

$$\rho_0\,\ddot{x}=\left[\sigma^*\varsigma\,(1+x')\right]'+P_1^*(s,t),\quad \rho_0\,\ddot{y}=\left[\sigma^*\,\varsigma\,y'\right]'+P_2^*(s,t),\tag{1.1}$$

$$\rho_0\,\ddot{z}=\left[\sigma^*\,\varsigma\,z'\right]'+P_3^*(s,t),\tag{1.2}$$

$$\cos\alpha=(1+x')\varsigma,\quad \cos\beta=y'\varsigma,\quad (1+\varepsilon)\cos\gamma=z'\varsigma.\tag{1.3}$$

Пусть, закон деформирования материала имеет вид:

$$\sigma^*=\sigma^*\left(\varepsilon,\,\dot{\varepsilon}\ \right),\tag{1.4}$$

где t – время; s – лагранжева координата; $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$ – координаты рассматриваемой точки нити в декартовой системе (x,y,z); $\sigma^*=\sigma^*(s,t)$ – натяжение; $\varepsilon(s,t)$ – относительная деформация; $P_1^*(s,t)$, $P_2^*(s,t)$, $P_3^*(s,t)$ – составляющие массовой силы $\vec{P}=\vec{P}(s,t)$ на оси x, y, z соответственно; $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$, $\gamma(s,t)$ – углы, образованные между касательной к ВГС в данной точке и осями координат *x, y, z*; ρ_0 – плотность недеформированной ВГС.

Введем обозначения: $\sigma(s,t)=\sigma^*(s,t)/\rho_0$; $P_i(s,t)=P_i^*(s,t)/\rho_0$.

Дифференциальные уравнения движения (1.1) и (1.2) с учетом (1.3), (1.4) и $\sigma'=\sigma_E\varepsilon'+c^2\dot{\varepsilon}'$ приведем к виду:

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=\varsigma\left\{(1+x')\varepsilon'\,\sigma_E+(1+x')\dot{\varepsilon}'\ c^2+\sigma x''\right\}-\sigma\varsigma^2(1+x')\varepsilon'+P_1(s,t),\\ \ddot{y}&=\varsigma\left\{y'\varepsilon'\sigma_E+y'\dot{\varepsilon}'\ c^2+\sigma y''\right\}-\sigma\varsigma^2y'\varepsilon'+P_2(s,t),\\ \ddot{z}&=\varsigma\left\{z'\varepsilon'\sigma_E+z'\dot{\varepsilon}'\ c^2+\sigma z''\right\}-\sigma\varsigma^2z'\varepsilon'+P_3(s,t),\end{aligned}\tag{1.5}$$

где $\sigma_E=\partial\sigma/\partial\varepsilon$, $c^2=\partial\sigma/\partial\varepsilon_t\,.\,\varsigma=1/(1+\varepsilon)$.

Учитывая, что $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)' = (1+x')x'' + y'y'' + z'z''$, исключим производную ε' и произведем группировку подобных слагаемых в уравнении (1.5):

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \xi_{11}x'' + \xi_{12}y'' + \xi_{13}z'' + c^2(1+x')\dot{\varepsilon}' \quad \varsigma + P_1(s,t),\\
\ddot{y} &= \xi_{21}x'' + \xi_{22}y'' + \xi_{23}z'' + c^2\, y'\dot{\varepsilon}' \quad \varsigma + P_2(s,t),\\
\ddot{z} &= \xi_{31}x'' + \xi_{32}y'' + \xi_{33}z'' + c^2\, z'\dot{\varepsilon}' \quad \varsigma + P_3(s,t),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\xi_{11} = \xi_{151}(1+x')^2 + \chi_{151}$, $\xi_{12} = \xi_{21} = \xi_{151}\,(1+x')y'$, $\xi_{22} = \xi_{151}\,(y')^2 + \chi_{151}$,

$$\xi_{13} = \varepsilon_{31} = \xi_{151}(1+x')z', \quad \xi_{23} = \xi_{32} = \xi_{151}y'z', \qquad \xi_{33} = \xi_{151}\,(z')^2 + \chi_{151},$$

$$\xi_{151} = \{(1+\varepsilon)\sigma_E - \sigma\}\varsigma^3 \;, \qquad \chi_{151} = \sigma\ \varsigma\,.$$

Система уравнении (1.6) нелинейная, ее решаем методом характеристик[2]. Пусть, кривая $w(s,t) = 0$ является характеристической кривой. Для этой характеристики система уравнений имеет вид:

$$\ddot{x} = k^2x'' + c^2\varsigma\ (1+x')\dot{\varepsilon}' + f_1(s,t) + P_1(s,t), \quad \ddot{y} = k^2y'' + c^2\,\varsigma\, y'\dot{\varepsilon}' + f_2(s,t) + P_2(s,t),$$

$$\ddot{z} = k^2z'' + c^2\,\varsigma\ z'\dot{\varepsilon}' + f_3(s,t) + P_3(s,t), \tag{1.7}$$

где $f_i(s,t)$ – неизвестные пока функции, $j = 1, 2, 3$; $k = d_Ts$ – угловой коэффициент касательной к характеристической кривой $w(s,t) = 0$.

Подставляя соотношения (1.7) в (1.6) можно получить

$$(\xi_{11} - k^2)x'' + \xi_{12}\,y'' + \xi_{13}z'' = f_1(s,t), \qquad \xi_{21}\,x'' + (\xi_{22} - k^2)y'' + \xi_{23}z'' = f_2(s,t),$$

$$\xi_{31}x'' + \xi_{32}y'' + (\xi_{33} - k^2)z'' = f_3(s,t). \tag{1.8}$$

Характеристическими корнями этой системы являются [2]:

$$k_{1,2} = (d_Ts)_{1,2} = \pm\sqrt{\sigma_E}\,, \qquad k_{3,4} = (d_Ts)_{3,4} = \pm\sqrt{\sigma\ \varsigma}\ . \tag{1.9}$$

Характеристические корни $k_{3,4} = (d_Ts)_{3,4} = \pm\sqrt{\sigma\ \varsigma}$ оказывается кратными корнями, т. е существуют еще корни $k_{5,6} = (d_Ts)_{5,6} = \pm\sqrt{\sigma\ \varsigma}$.

Таким образом, динамическая нагрузка в ВГС распространяется в виде трех волн: одна волна, распространяется вдоль продольной оси ВГС со скоростью $k_{1,2} = (d_Ts)_{1,2} = \pm\sqrt{\sigma_E}$, которая называется продольной волной и две волны распространяются по двум другим направлениям с одинаковой скоростью $k_{3,4} = (d_Ts)_{3,4} = \pm\sqrt{\sigma\ \varsigma}$, $k_{5,6} = (d_Ts)_{5,6} = \pm\sqrt{\sigma\ \varsigma}$, которые называются поперечными волнами. Двойные индексы означает, что данная волна распространяется по положительному и обратному направлениям.

2. Примеры для конкретных случаев

Пусть, закон деформирования имеет вид

$$\sigma^* = A^*\varepsilon + \eta^*\dot{\varepsilon}\ , \tag{2.1}$$

т. е. деформирование идет по линейно-вязко-упругой модели Томпсона. Если в линейной модели Томпсона (2.1) постоянный коэффициент A^* равняется E, то получается вязко-упругий материал с «запаздывающей упругостью» («модель Фойгта»)

$$\sigma^* = E^*\varepsilon + \eta^*\dot{\varepsilon}\ . \tag{2.2}$$

В этом случае характеристические корни имеет вид:

$$k_{1,2} = (d_Ts)_{1,2} = \pm\sqrt{A}\,, \quad k_{3,4} = (d_Ts)_{3,4} = \pm\sqrt{\chi_{162}}\ , \quad k_{5,6} = (d_Ts)_{5,6} = \pm\sqrt{\chi_{162}}\ , \tag{2.3}$$

где $\quad A = A^*\rho_0^{-1}, \quad \eta = \eta^*\rho_0^{-1}, \quad \chi_{162} = (A\,\varepsilon + \eta\,\dot{\varepsilon}\ )\varsigma\,. \quad \varsigma = 1/(1+\varepsilon)\,.$

Рассмотрим некоторые свойства волн и схемы движения ВГС, описываемой моделью (2.2). Пусть при монотонном нагружении до некоторого напряжения $\sigma \le \sigma_\eta$ ВГС деформируется по закону

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{2.4}$$

а при $\sigma > \sigma_\eta$ – по закону $\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$, (2.5)

т.е. предполагается, что при малых деформациях вязкость отсутствует, материал деформируется по закону Гука и только при $\varepsilon > \varepsilon_\eta$ вязкость начинает оказывать влияние на диаграмму растяжения.

При нагружении по первому закону в пределах $\varepsilon \le \varepsilon_\eta$ в ВГС, возникают одна упругая продольная волна, распространяющаяся со скоростью

$$\widetilde{k}_{1,2} = \pm\sqrt{E} \tag{2.6}$$

и поперечные волны, распространяющиеся с одинаковой скоростью

$$\widetilde{k}_{3,4} = \pm\sqrt{E\,\varepsilon\,\varsigma}\,, \qquad \widetilde{k}_{5,6} = \pm\sqrt{E\,\varepsilon\,\varsigma}\,, \qquad \varsigma = 1/(1+\varepsilon)\,. \tag{2.7}$$

Эти волны возникают одновременно, но поперечные волны двигаются с меньшей скоростью, чем продольная волна. В дальнейшем рассмотрим только одну поперечную волну, так как они имеет одинаковые свойства.

Пусть теперь $\varepsilon > \varepsilon_\eta$ и ВГС нагружается по закону (2.5) В этом случае в ВГС распространяется упругая продольная волна со скоростью $\widetilde{k}_{1,2} = \pm\sqrt{E}$, а поперечная волна распространяется со скоростью

$$k_{PP} = \pm\sqrt{\left(E\,\varepsilon + \eta\,\dot{\varepsilon}\right)\varsigma}\,, \;\; \varsigma = 1/(1+\varepsilon)\,. \tag{2.8}$$

Можно найти время, когда вязкость начинает оказывать влияние на закон деформирования ВГС. Из условия $\widetilde{k}_1 = k_{pp}$ найдем

$$E = \left(E\,\varepsilon + \eta\,\dot{\varepsilon}\right)\varsigma\,, \quad \varepsilon > \varepsilon_\eta\,, \tag{2.9}$$

отсюда $\dot{\varepsilon} = E\,\eta^{-1}$. (2.10)

Проинтегрировав последнее соотношение, будем иметь

$$\varepsilon_\eta = E\eta^{-1}\left(t - t_\eta\right). \tag{2.11}$$

Данное выражение служит для определения деформаций ε_η, соответствующей моменту времени t_η появления деформации ε_η. Как следует из формулы (2.11), вязкость в ВГС появляется мгновенно и соответствует скорости деформации, определяемой по формуле (2.10).

Пусть, закон деформирования имеет вид

$$\sigma^* = \sigma_S^* + E_1^*\left(\varepsilon - \varepsilon_s\right) + \eta^*\dot{\varepsilon}\,, \tag{2.12}$$

т.е. с линейным упрочнением; где σ_S^* и ε_S – натяжение и относительная деформация, соответствующие пределу упругости материала.

В этом случае скорости распространяющихся волн будут:

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{E_1}\,, \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{\chi_{171}}\,, \;\; \chi_{171} = \left\{\sigma_S + E_1\left(\varepsilon - \varepsilon_S\right) + \eta\,\dot{\varepsilon}\right\}\varsigma\,, \tag{2.13}$$

где $\sigma_s = \sigma_s^* / \rho_0$, $E_1 = E_1^* / \rho_0$, $\eta = \eta^* / \rho_0$, $\varsigma = 1/(1+\varepsilon)$.

Если материал ВГС вязко-упругопластический и действующая нагрузка монотонно возрастает, то рассмотренную выше модель можно представить в виде:

$$\sigma = E\,\varepsilon_s + E_1\left(\varepsilon - \varepsilon_s\right) + \eta\,\dot{\varepsilon}\,. \tag{2.14}$$

Данная модель предполагает, что ВГС деформируется при малых относительных деформациях по закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon \le \varepsilon_S. \tag{2.15}$$

Далее, в зависимости от заданных свойств материала, возможно следующие варианты:

1) материал в пределах упругой деформации $\varepsilon_s \ge \varepsilon \ge \varepsilon_\mu$ подчиняется закону

$$\sigma = E\varepsilon_s + \eta\dot{\varepsilon}, \tag{2.16}$$

и при $\varepsilon > \varepsilon_s$ – по закону (2.14), где ε_μ – упругая деформация, соответствующая начальному моменту действия закона (2.16).

2) материал до некоторой деформации $\varepsilon_s < \varepsilon \le \varepsilon_\eta$ подчиняется упругопластическому закону

$$\sigma = E\varepsilon_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s), \tag{2.17}$$

и при $\varepsilon > \varepsilon_\eta$ – по закону (2.15), где ε_η – пластическая деформация, соответствующая начальному моменту действия закона (2.17).

Рассмотрим первый случай при деформациях $\varepsilon \ge \varepsilon_S$. При этом в нити последовательно возникают одна вязко продольно-поперечная волна, распространяющаяся со скоростью

$$k_3 = \pm\sqrt{\varsigma_{171}\left(E\varepsilon_S + \eta\dot{\varepsilon}\right)}, \text{ при } \varepsilon \le \varepsilon_S, \tag{2.18}$$

и две вязко-упругопластические волны, распространяющиеся со скоростями

$$k_5 = \pm\sqrt{E_1} \text{ и } k_7 = \pm\sqrt{\chi_{171}} \text{ при } \varepsilon > \varepsilon_S,\ \chi_{171} = \left\{\sigma_S + E_1(\varepsilon - \varepsilon_S) + \eta\dot{\varepsilon}\right\}\varsigma. \tag{2.19}$$

Схема волнового движения, соответствующая деформации $\varepsilon_s < \varepsilon \le \varepsilon_\eta$, приведена на рис.1. Характеристики $0m$ и $0n$ соответствуют упругой продольной $\tilde{k}_1$ и поперечной $\tilde{k}_3$ волнам. Области I и II являются областями упругих деформаций. Характеристика $t_\eta p$ возникает в момент времени $t_\eta > 0$, соответствует продольно-поперечной волне k_3 области III и является областью вязко упругих деформаций.

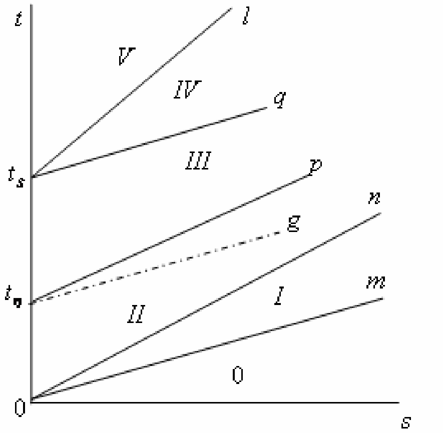

Рис.1. Расположения фронтов волны

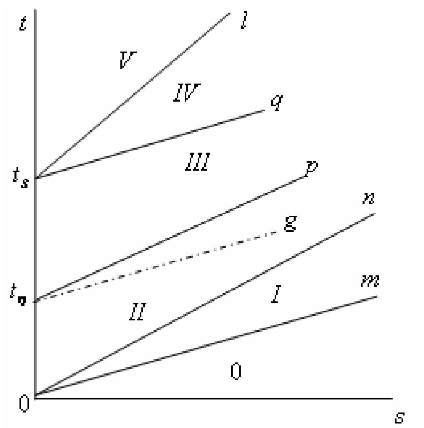

Рис.2. Расположения фронтов волны

Характеристики t_sq и t_sl соответствуют вязко упругопластическим волнам k_5 и k_7. Прямые $0m$, $t_\eta g$ параллельны и зона запаздывания упругости [3] находится между характеристиками $t_\eta g$ и $t_\eta p$, соответствующими упругой продольной волне $\tilde{k}_1$ и продольно-поперечной волне вязко-упругой k_3. Линия

$t_\eta g$ является последней характеристикой, соответствующей упругой продольной волне, распространяющейся со скоростью $\tilde{k}_1$, а линия $t_\eta p$ – первой характеристикой, соответствующей вязко-упругой продольно-поперечной волне, распространяющейся со скоростью k_3.

Рассмотрим теперь второй случай при деформациях $\varepsilon > \varepsilon_\eta$. Последовательность возникновения волн при монотонной нагрузке следующая:

– две упругие волны, распространяющиеся со скоростями (рис.2)

$$\tilde{k}_1 = \pm\sqrt{E} \quad \text{и} \quad \tilde{k}_3 = \pm\sqrt{E\varepsilon\varsigma} \quad \text{при} \quad \varepsilon \le \varepsilon_s; \tag{2.20}$$

– две упругопластические волны, идущие вдоль нити со скоростями

$$k_5 = \pm\sqrt{E_1} \quad \text{и} \quad k_7 = \pm\sqrt{\{E\varepsilon_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s)\}\varsigma} \quad \text{при } \varepsilon > \varepsilon_s; \tag{2.21}$$

– одна вязко упругопластическая продольно-поперечная волна, распространяющаяся со скоростью

$$k_3 = \pm\sqrt{\{E\varepsilon_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) + \eta\dot{\varepsilon}\}\varsigma}, \quad \text{при} \quad \varepsilon > \varepsilon_\eta. \tag{2.22}$$

В данном случае очередность расположения областей III и IV, V поменяется. На схеме, изображенной на рис.1, область III является областью вязкоупругой деформации, а на рис. 2 – вязко-упругопластической деформации. Области IV, V на рис.1 имеют вязко упругопластическую, а на рис.2 – упругопластическую деформацию. Штриховая линия $t_s g$ является последней характеристикой, соответствующей упругой продольной волне, а линия $t_s p$ – первой характеристикой упругопластической волны. Область, расположенная между этими характеристиками, является зоной запаздывания текучести [3], а область запаздывания упругости на схеме рис. 2 не возникает.

Пусть материал ВГС деформируется по следующему закону:

$$T^* = \chi^*\varepsilon^q + \eta^*\dot{\varepsilon}, \quad \sigma' = \chi q \varepsilon^{q-1}\varepsilon' + \eta\dot{\varepsilon}', \tag{2.23}$$

тогда при $\varepsilon > \varepsilon_S$ поперечные и продольно-поперечные волны будут распространяться со скоростями $\tilde{k}_3 = \pm\sqrt{E\varepsilon_S\varsigma}$, $k_3 = \pm\sqrt{(E\varepsilon_S + \eta\dot{\varepsilon})\varsigma}$,

$$k_1 = \pm\sqrt{\chi q\,\varepsilon^{q-1}}, \quad k_3 = \pm\sqrt{\chi_{172}}, \quad \chi_{172} = (\chi\varepsilon^q + \eta\dot{\varepsilon})\varsigma_{172}. \tag{2.24}$$

Выводы

Свойства продольно-поперечной волны, возникающей в вязкой нити, существенно отличается от свойства поперечной волны, возникающей в упругой нити. На фронте поперечной волны, возникающей в упругой нити, деформация и натяжение остаются непрерывными, а на фронте продольно- поперечной волны, возникающей в вязкой нити – являются разрывными.

Литература

1. *Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – Изд.2-е, дополненное. – М.: «Университетская книга; Логос», 2009. – 512с.

2. *Кристеску Н.* Распространение волн в гибких нитях (влияние скоростей деформации)// ПММ. – Т. 21. – 1957. – Вып. 4. – С. 486-490.

3. *Бараев А.* Влияние запаздывания текучести на распространение упруго- пластических волн при поперечном ударе// ДАН РУз. – 1977. – № 12. – С. 9-10.

THE INVESTIGATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SPATIAL MOTION OF VISCOUS NON-LINEAR BRACE AND THE WAVES CAUSED BY DYNAMIC ACTION

Baraev A.