

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

А.И. ФИМКИН, *заведующий лабораторией
МИИТ, кафедры «Строительная механика»*

В статье рассматривается способ решения задачи определения технологических остаточных напряжений в объеме железнодорожного рельса с использованием расчетно-экспериментальной интерполяционной методики. Задача ограничена поиском основной составляющей компоненты тензора остаточных напряжений, ориентированной в направлении продольной оси рельса. Эта задача сформулирована как обратная в некорректной постановке. Такая постановка задачи дает ряд преимуществ, связанных с упрощением эксперимента. Решение ее предложено с использованием метода регуляризации А.Н. Тихонова [1].

Известно, что многие традиционные методы определения остаточных напряжений [2,6] связаны с весьма трудоемкой процедурой детальной разрезки исследуемого объекта на отдельные фрагменты, при которой освобождаются существовавшие в нём остаточные напряжения. Предлагаемый метод основан на единственном поперечном разрезе рельса, который достаточно просто выполнить с помощью стандартного железнодорожного инструмента [5]. Сущность метода заключается в восстановлении “обратной” продольной нагрузки, отличающейся от эпюры остаточных напряжений только знаком, по найденному экспериментально напряженному состоянию на поверхности рельса в группе опорных точек. Поперечная разрезка рельсового образца эквивалентна действию этой обратной нагрузки, приложенной к торцу рельса в месте распила. Деформации на поверхности рельса вследствие освобождения поверхности распила от продольных остаточных напряжений служат входными данными расчетной интерполяционной методики. Схематично метод исследования остаточных напряжений показан на рис. 1.

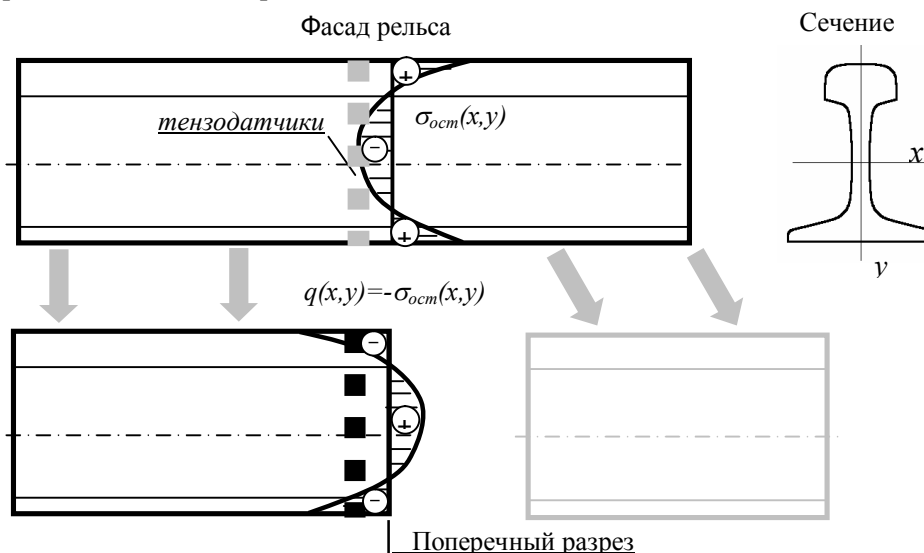


Рис. 1. Основной подход к решению задачи

Распределение продольных остаточных напряжений в рельсе характеризуется вектором σ значений этих напряжений в отдельных точках поперечного сечения, принадлежащем множеству Ω . Вектор σ недоступен для прямого измерения; возможно лишь исследование его проявления

$$A\sigma = U. \tag{1}$$

В данном случае A является неким оператором, ставящим в соответствие элементу из множества Ω элемент из множества U значений напряжений на поверхности.

Предлагаемая расчетно-экспериментальная методика основывается на существовании связи между деформациями на поверхности, полученными экспериментально в нескольких точках контура поперечного сечения после процедуры разрезки, и остаточным напряженным состоянием внутри рельса. Эта связь описывается интегральным уравнением Фредгольма первого рода [3].

$$A\sigma \equiv \int_{\Omega} H_{ij}^{(k)}(s, x)\sigma(x)d\Omega(x) = u(s) \quad s \in S; x \in \Omega, \quad (2)$$

где S – часть поверхности рельса, содержащая точки измерения деформаций; Ω – поперечное сечение рельса, в котором ищется распределение остаточных напряжений; $H_{ij}^k(s, x)$ – ядро интегрального оператора; x – координаты точек поперечного сечения. Ядро $H_{ij}^k(s, x)$ является функцией напряжений Грина. Решение уравнения (2) строится с использованием численных методов. При этом непрерывные зависимости от x дискретизируются, заменяясь соответствующими векторами. Дискретизация задачи осуществляется с помощью метода конечных элементов (рис. 2).

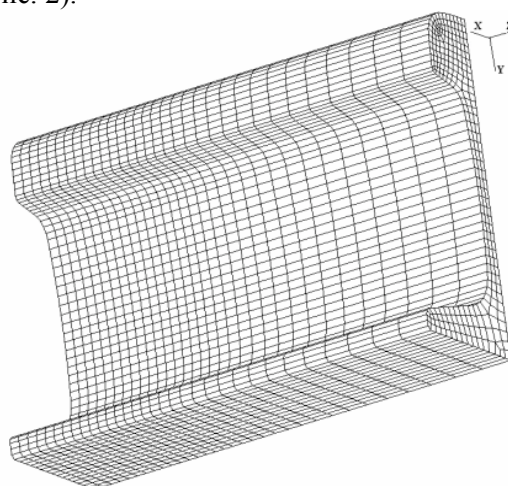


Рис. 2. Конечноэлементная модель рельса

Модель – отрезок натурального рельса типа Р65 длиной 360 мм – составлена из объемных 20-узловых конечных элементов серендипова семейства. Длина модели выбрана равной удвоенной высоте рельсового профиля. Топология модели представляет собой регулярную структуру в виде набора слоев элементов в направлении оси Z модели (продольной оси рельса) со сгущением сетки к плоскости приложения нагрузок. Подробность разбивки на элементы в плоскости поперечного сечения (XOY) определялась из условия согласования сетки конечных элементов и сетки узловых точек базисных функций. Для достаточного представления базисных функций между их узловыми точками должно было помещаться не менее 3 – 5 конечных элементов. Учет симметрии геометрии рельса позволил построить модель половины сечения с увеличенной густотой сетки в поперечном сечении. Однако в силу несимметричности прикладываемой нагрузки пришлось рассматривать две модели: симметричную и кососимметричную. Для каждого нагружения выполнены расчеты на симметричную и кососимметричную составляющие нагрузки.

Расчетная модель рельса последовательно загружается набором нагрузок, функционально представляющих собой систему специально выбранных базисных функций. На основе этих расчетов формируется прямоугольная матрица \tilde{A} размерами $M \times N$, которая является конечноэлементным аналогом ядра интегрального оператора (2). Столбцы матрицы \tilde{A} являются векторами деформаций в ряде точек на поверхности объекта, возникающих при последовательном нагружении расчетной модели набором нагрузок. Количество строк M матрицы \tilde{A} совпадает с числом выбранных точек на контуре поперечного сечения рельса. Количество столбцов N матрицы \tilde{A} соответствует числу нагружений модели. В этом случае задача сводится к решению системы уравнений

$$\tilde{A}X = B, \quad (3)$$

где X – вектор неизвестных коэффициентов системы базисных функций; B – вектор деформаций, полученный экспериментально.

Интерполируемая функция представляется непрерывной квазипериодической функцией координат двумерной плоскости. Искомая эпюра продольных остаточных напряжений в пределах сечения ищется как линейная комбинация базисных функций:

$$\sigma(x, y) = \sum_1^N X_i \cdot F_i(x, y) \quad (4)$$

В качестве базисных было признано целесообразным использование функций Котельникова, широко используемых в теории связи и передачи информации [4]:

$$F_i(x, y) = \frac{\sin(\pi(x - k \cdot \Delta_x) / \Delta_x)}{\pi(x - k \cdot \Delta_x) / \Delta_x} \times \frac{\sin(\pi(y - l \cdot \Delta_y) / \Delta_y)}{\pi(y - l \cdot \Delta_y) / \Delta_y}, \quad (5)$$

где k, l – целые числа, определяющие положение базисной функции на координатной плоскости; Δ_x, Δ_y – шаг по осям x и y сетки, на которой задана система базисных функций (см. рисунок 3).

В точках неопределенности базисные функции доопределяются значениями, равными единице.

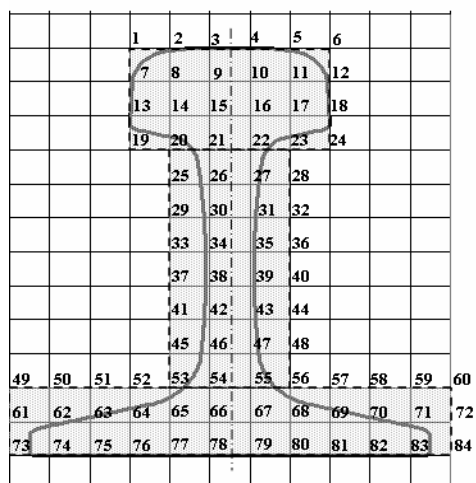


Рис. 3. Поперечное сечение рельса и сетка, на которой задана система базисных функций

На рис. 4 упрощенно показана продольная нагрузка, распределенная по закону одной из базисных функций.

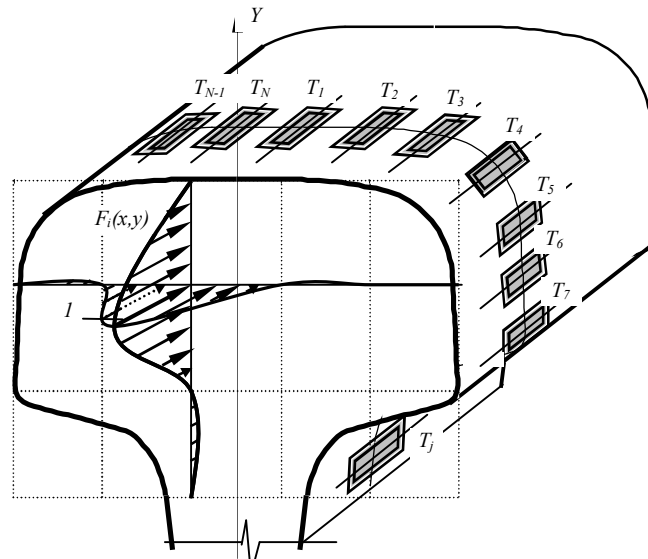


Рис. 4. Продольная нагрузка в виде базисной функции $F_i(x,y)$, приложенная к головке рельса (показана упрощенно). T_i – тензорезисторы

Особенностью конечноэлементной реализации поставленной задачи является то обстоятельство, что система (3) является переопределённой, т.е. количество уравнений превышает число неизвестных. Поэтому искомый вектор можно интерпретировать только как "псевдорешение" или "обобщённое решение" системы (3), т.е. вектор, минимизирующий норму невязки

$$\Delta(X) = \|\tilde{A}X - B\|^2. \quad (6)$$

Как известно, задачу поиска обобщённого решения исходной вещественной системы (3) можно свести к задаче поиска классического решения следующей системы линейных уравнений (метод наименьших квадратов):

$$A^T A X = A^T B. \quad (7)$$

Однако задача (7), так же, как и (3), остаётся некорректной вследствие плохой обусловленности их матриц. Плохая обусловленность системы означает, что погрешности коэффициентов её матрицы (имеющие место ввиду погрешностей метода конечных элементов) и погрешности правых частей (шум измерений) сильно искажают решение. Поскольку задача неустойчива, то точное решение с приближенно заданными матрицей и правой частью не будет иметь ничего общего с искомым вектором X . Поэтому численные методы решения систем плохо обусловленных уравнений (в частности, поиска псевдорешения) отличаются от классических алгоритмов (например, Гаусса или Крамера), которыми принято решать "хорошие" системы. Наиболее частый подход к решению некорректных задач заключается в их регуляризации, приводящей к вычислительной задаче решения уравнения Тихонова

$$(A^T A + \alpha E)X = A^T B, \quad (8)$$

где α – положительное число, параметр регуляризации. Как показано в [7], устойчивость метода регуляризации Тихонова обусловлена тем, что в силу положительной определенности матрицы $A^T A$ все ее собственные значения λ неотрицательны, причем $\lambda(A^T A)_{\min} = 0$. Наличие слагаемого αE увеличивает все собственные значения матрицы $A^T A$ на α , поэтому $\lambda(A^T A)_{\min} = \alpha$. Матрица $A^T A + \alpha E$ имеет обратную матрицу, норма которой

$$\|(A^T A + \alpha E)^{-1}\| = 1/\alpha \neq \infty. \quad (9)$$

Таким образом, задача становится устойчивой, и остается лишь определиться с выбором параметра регуляризации. Если задать значение α большим, то решение системы уравнений будет очень устойчивым, однако оно будет сильно отличаться от решения исходной (3), т. е. невязка решения будет велика. При снижении α невязка решения будет уменьшаться, но будет увеличиваться неустойчивость решения. В предельном случае $\alpha = 0$ метод регуляризации Тихонова переходит в метод наименьших квадратов с крайне неустойчивым решением. Формализованный подход к выбору параметра регуляризации заключается в поиске минимума нормы невязки решения. Тем не менее, оптимальный подбор параметра регуляризации следует рассматривать как сочетание формального подхода с творческим анализом поведения результирующей кривой в сравнении с кривой, заданной правой частью уравнения (3).

При решении задачи использовались следующие допущения:

- справедливость закона Гука для материала рельса;
- неизменность эпюры остаточных напряжений по длине объекта. В силу этого сдвиговые деформации γ_{xz} и γ_{yz} равны нулю, поэтому в плоскости xOz и плоскости yOz отсутствуют касательные напряжения, и тензор напряжений при этом записывается следующим образом

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{vmatrix}; \quad (10)$$

- продольные остаточные напряжения σ_z определяются без учета влияния поперечных напряжений. На основании выводов, содержащихся в работе С.С. Schilling и G.T. Blake [6] формирующееся в процессе изготовления железнодорожных рельсов остаточное напряженное состояние имеет преобладающую продольную составляющую компоненту тензора напряжений. Это справедливо для вновь изготовленных рельсов, не подвергавшихся воздействию эксплуатационной нагрузки после укладки в путь. В связи с этим представленная методика определения продольных остаточных напряжений основана на измерении только продольных поверхностных деформаций, возникающих при поперечной разрезке рельса.

Методика эксперимента и результаты исследования

Объект исследования – отрезок рельса длиной 1200 мм, вырезанный из средней части рельсовой плети длиной 25 м. В середине исследуемого отрезка выбирается сечение, по контуру которого на поверхности размещается 50 тен-

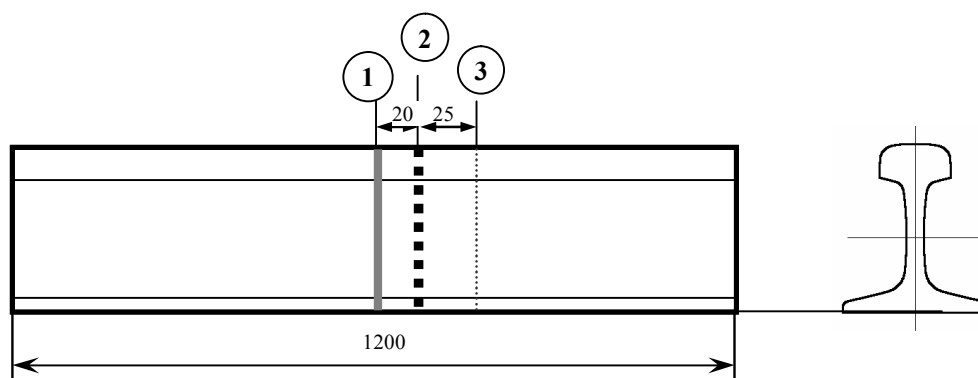


Рис. 5. Схема эксперимента (1 – место поперечного разреза; 2 – сечение с наклеенными по контуру тензорезисторами; 3 – место второго поперечного разреза с образованием темплета)

зодатчиков базой 5 мм, ориентированных параллельно продольной оси рельса. На расстоянии 20 мм от выбранного сечения намечается другое сечение, по которому производится поперечная разрезка рельса. Схема эксперимента приведена на рис. 5.

Эпюры деформаций после поперечного разреза и вырезания темплета приведены на рис. 6. Здесь полученные экспериментальным путем деформации графически изображены в виде отрезков, пропорциональных полученным значениям, отложенных в направлении внешней нормали к контуру в соответствующих точках. Положительные и отрицательные деформации отложены с наружной стороны контура рельса. Значения в промежуточных точках найдены с помощью сплайн-интерполяции.

Процедура подбора параметра регуляризации иллюстративно представлена на рис. 7. Смысл ее заключается в том, чтобы выбрать из множества расчетных кривых распределения остаточных напряжений по контуру рельса такую кривую, чтобы она наилучшим образом приближалась бы к распределению остаточных напряжений на контуре рельса, найденному экспериментально. Параметр регуляризации, соответствующий такой кривой, используется для построения поля остаточных напряжений в поперечном сечении рельса.

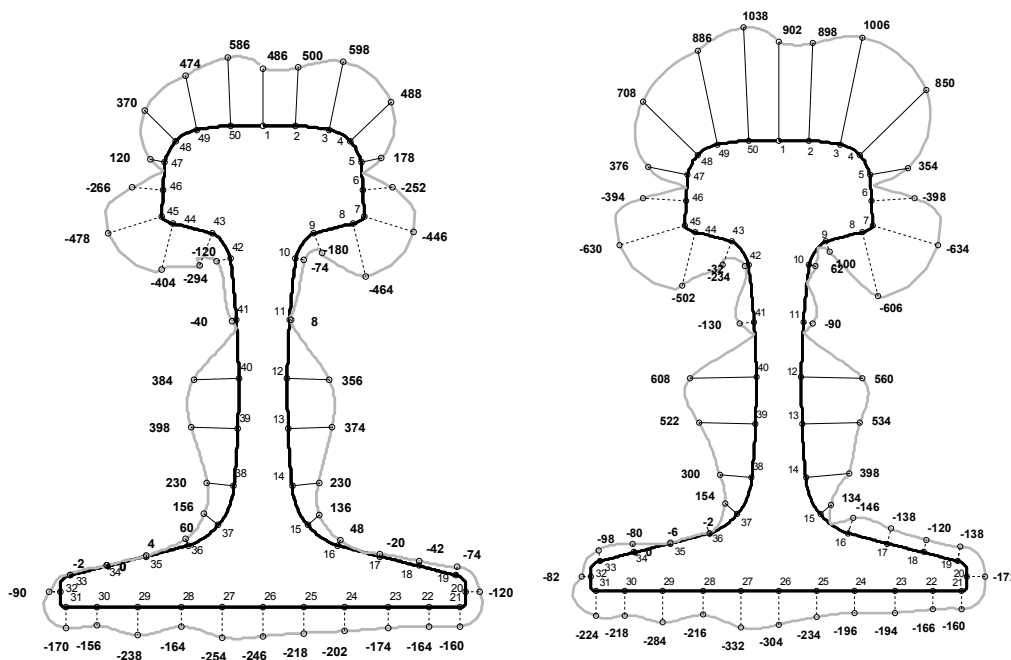


Рис. 6. Продольные деформации (мкм/мм) на контуре рельса после поперечной разрезки(слева) и после вырезания темплета (справа)

Численный способ выбора параметра регуляризации основан на минимизации функции отклонения значений расчетных напряжений в заданных точках на поверхности рельса от напряжений, полученных экспериментально. Невязка решения определяется по формуле

$$\Delta\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma_i^{расч} - \sigma_i^{эксп})^2 / (N - 1)}, \quad (11)$$

где $\sigma_i^{расч}$ – напряжения в точке i на контуре, вычисленные описанным выше способом; $\sigma_i^{эксп}$ – напряжения в точке i на контуре, полученные экспериментально после вырезания темплета; N – количество точек на контуре поперечного сечения.

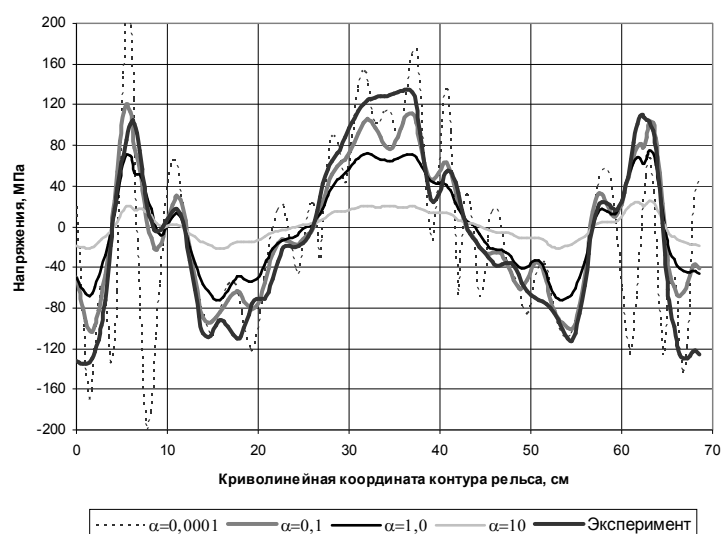


Рис. 7. Подбор параметра регуляризации

Зависимость невязки решения $\Delta\sigma$ от величины параметра регуляризации α приведена на рис. 8.



Рис. 8. Зависимость невязки решения от величины параметра регуляризации

На основании приведенных критериев поиска величина параметра регуляризации принята равной 0,1. Поле продольных остаточных напряжений в головке рельса, соответствующее этой величине, приведено на рис. 9.

Анализ полученной эпюры в сравнении с результатами, приведенными в [2], позволяет отметить схожесть характера распределения остаточных напряжений для некоторых областей поперечного сечения рельса. Различия в характере распределения напряжений и их величине вызваны, в первую очередь, особенностями режимов правки и термообработки исследуемого рельса из партии, изготовленной на заводе «Азовсталь». Также оказывают влияние погрешности метода, возникающие вследствие пренебрежения поперечными напряжениями, что особенно существенно для головки рельса.

Основные выводы

Разработана методика, позволяющая определять продольные остаточные напряжения внутри железнодорожных рельсов. Основной подход, описанный в методике, можно использовать для определения продольных остаточных напряжений в линейно протяженных объектах. Благодаря сравнительной простоте и технологичности созданную методику можно применять на производстве для контроля уровней остаточных напряжений.

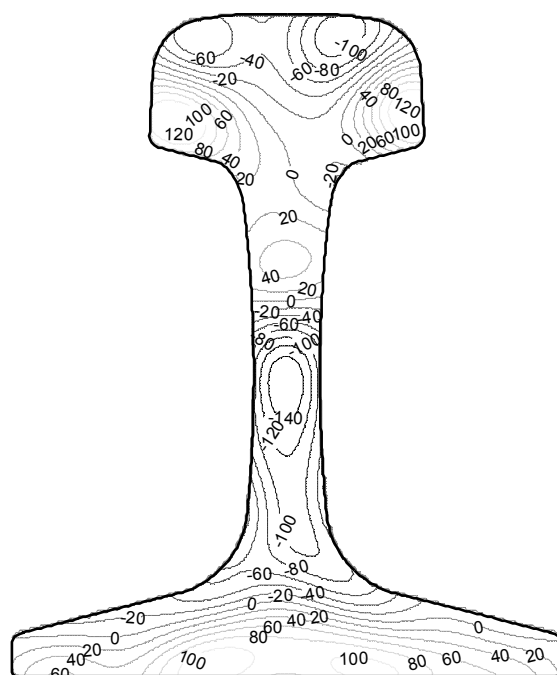


Рис. 9. Поле продольных остаточных напряжений в головке рельса, МПа

Аналитическое выражение функции напряжений открывает широкие возможности для исследования влияния остаточных напряжений на хрупкую и усталостную прочность рельсового профиля с точки зрения градиентного анализа поля напряжений.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.
2. Ахметзянов М.Х., Кушнеров В.А. Определение остаточных напряжений в железнодорожных рельсах// «Строительная механика и расчет сооружений»: Сб. – Новосибирск, 1967. – С. 268-284.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 128 с.
4. Котельников В.А. О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи: Всесоюзный энергетический комитет// Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности, 1933.
5. Фимкин А.И. Построение расчетной модели для определения остаточных напряжений в железнодорожных рельсах // Тез. докл. науч.-практич. конф. «Неделя науки – 98». – М.: МИИТ, 1998. – С. 41.
6. C.G. Schilling, G.T. Blake. The Measurement of Triaxial Residual Stresses in Railroad Rails - Measurement and Analysis Techniques. Experimental Techniques, 1984, Vol. 8 № 9. – P. 25-31.
7. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. – СПб: Политехника, 2001. – 240 с.

APPLICATION OF THE TIKHONOV REGULARIZATION FOR RESIDUAL STRESSES DETERMINATION

Fimkin A.I.

The problem of determining the technological residual stresses in the volume of railway rails is considered. For the solution of this problem proposed design-experimental technique based on the method of Tikhonov regularization. The results of determining of residual stresses using the proposed method are presented.