

АЛГОРИТМ УЧЕТА СМЕЩЕНИЯ КАК ЖЕСТКОГО ЦЕЛОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ОБОЛОЧКИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Ю.В. КЛОЧКОВ, *д-р техн. наук, профессор,*
А.П. НИКОЛАЕВ, *д-р техн. наук, профессор,*
О.В. ВАХНИНА, *ст. пр.*

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия

При осуществлении конечно-элементного анализа оболочек неизбежно возникает весьма сложная проблема по учету смещений используемого элемента дискретизации как жесткого целого. На наличие данной проблемы указывают как отечественные [1, 2], так и зарубежные [3, 4] исследователи. Имеющиеся к настоящему времени предложения по решению указанной проблемы [5, 6, 7] сводятся к попыткам учесть жесткие смещения элемента дискретизации в явном виде за счет включения в интерполяционные полиномы дополнительных членов, расширения матрицы жесткости путем конгруэнтного преобразования, строгого соблюдения совместности между соседними элементами и так далее. При этом приводились примеры расчета оболочки несложной геометрии, как правило, цилиндрической панели. В то же время в [8] предложено решение проблемы учета смещений конечного элемента как жесткого целого в неявной форме за счет использования векторного способа аппроксимации полей перемещений.

Целью настоящей работы является рассмотрение вопроса применения векторного способа аппроксимации перемещений [8] в алгоритмах расчета оболочек вращения, разработанных на основе треугольных элементов дискретизации, матрицы жесткости которых формировались с использованием корректирующих множителей Лагранжа, существенно повышающий точность конечно-элементных решений оболочек [9].

Рассмотрим элемент дискретизации в форме треугольного фрагмента, произвольно ориентированного на срединной поверхности оболочки вращения (рис.1) с узлами i, j, k . Столбец узловых варьируемых параметров данного элемента в глобальной системе координат S (длина дуги меридиана) и θ (угол, отсчитываемый от образующей против часовой стрелки) выбирается в виде

$$\left\{ U_V^T \right\}_{1 \times 27} = \left\{ \left\{ v_V^{1T} \right\}_{1 \times 9} \left\{ v_V^{2T} \right\}_{1 \times 9} \left\{ v_V^T \right\}_{1 \times 9} \right\}, \quad (1)$$

где $\left\{ q_V^T \right\}_{1 \times 9} = \left\{ q^i q^j q^k q_{,S}^i q_{,S}^j q_{,S}^k q_{,\theta}^i q_{,\theta}^j q_{,\theta}^k \right\}$. Здесь под q понимаются тангенциальные v^1, v^2 или нормальная v компоненты вектора перемещения.

Используемый элемент дискретизации является совместным по компонентам вектора перемещения, но несовместным по их производным, в силу чего на границе смежных элементов A и B неизбежно возникает скачок в значениях производных нормальной компоненты вектора перемещения $\partial v / \partial S_n$ вдоль внешних нормалей к границе соседних элементов дискретизации. Для устранения указанной погрешности предлагается применять

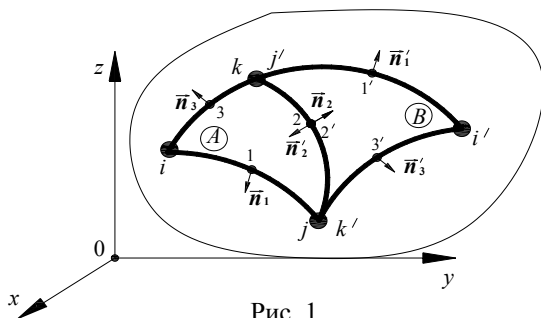


Рис. 1

корректирующие множители Лагранжа λ в дополнительных узлах 1, 2, 3, расположенных в серединах сторон треугольного конечного элемента (рис. 1):

$$\lambda^{(m)} \left(\frac{\partial v_A^{(m)}}{\partial S_{n_m}} + \frac{\partial v_B^{(m')}}{\partial S_{n'_m}} \right) = 0, \quad (2)$$

где верхний индекс m обозначает номер вышеупомянутого дополнительного срединного узла. Для отдельного треугольного конечного элемента (КЭ) равенство (2) может быть преобразовано к виду [9]

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial S_{n_1}} + \lambda^{(2)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial S_{n_2}} + \lambda^{(3)} \frac{\partial v^{(3)}}{\partial S_{n_3}} = 0. \quad (3)$$

Входящие в (3) производные $\partial v^{(m)} / \partial S_{n_m}$ могут быть выражены через производные нормальной компоненты вектора перемещения по глобальным криволинейным координатам

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial S_{n_m}} = \frac{\partial v^{(m)}}{\partial S} \cos \alpha^{(m)} + \frac{\partial v^{(m)}}{\partial \theta} \cos \beta^{(m)}, \quad (4)$$

где α и β – углы между ортом нормали \bar{n}^m и векторами локального базиса \bar{a}_1^0 и \bar{a}_2^0 , касательными к срединной поверхности в узле m .

Используя стандартную интерполяционную процедуру [1, 2, 3], производные нормальной компоненты вектора перемещения могут быть выражены через узловые значения этой же компоненты по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial S} &= \left(\left\{ \varphi, \xi \right\}^T \frac{\partial \xi}{\partial S} + \left\{ \varphi, \eta \right\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} \right) \left\{ v_Y^{\Pi} \right\}; \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \left(\left\{ \varphi, \xi \right\}^T \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \left\{ \varphi, \eta \right\}^T \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \left\{ v_Y^{\Pi} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T = \{ \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_9 \}$ – матрица-строка функций формы, представляющих собой полные полиномы третьей степени [10]; ξ, η – локальные координаты, изменяющиеся от 0 до 1; $\left\{ v_Y^{\Pi} \right\}_{1 \times 9}^T = \{ v^i v^j v^k v_{,\xi}^i v_{,\xi}^j v_{,\xi}^k v_{,\eta}^i v_{,\eta}^j v_{,\eta}^k \}$ – столбец узловых значений нормальной компоненты вектора перемещения в локальной ξ, η системе координат. Равенство (3) с учетом (4) и (5) может быть записано в матричном виде [9]:

$$\left\{ \lambda \right\}_{1 \times 3}^T [F]_{3 \times 27} \left\{ U_Y^{\Pi} \right\}_{27 \times 1} = 0, \quad \text{где} \quad \left\{ U_Y^{\Pi} \right\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \left\{ v_Y^{\Pi} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_Y^{\Pi} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_Y^{\Pi} \right\}_{1 \times 9}^T \right\} \quad (6)$$

– столбец узловых неизвестных треугольного КЭ в локальной системе координат;

$$[F]_{3 \times 27} = \begin{bmatrix} \left\{ 0 \right\}_{1 \times 9}^T & \left\{ 0 \right\}_{1 \times 9}^T & \left\{ f_1 \right\}_{1 \times 9}^T \\ \left\{ 0 \right\}_{1 \times 9}^T & \left\{ 0 \right\}_{1 \times 9}^T & \left\{ f_2 \right\}_{1 \times 9}^T \\ \left\{ 0 \right\}_{1 \times 9}^T & \left\{ 0 \right\}_{1 \times 9}^T & \left\{ f_3 \right\}_{1 \times 9}^T \end{bmatrix}; \quad \text{где} \quad \left\{ f_1 \right\}_{1 \times 9}^T, \left\{ f_2 \right\}_{1 \times 9}^T, \left\{ f_3 \right\}_{1 \times 9}^T$$

– матрицы-строки, содержащие функции-формы, определяемые согласно (4), (5).

Входящий в (6) столбец узловых варьируемых параметров в локальной системе координат $\{U_V^J\}$ может быть выражен через столбец узловых неизвестных в глобальной системе координат (1)

$$\left\{U_V^J\right\}_{27 \times 1} = \left[P_R\right]_{27 \times 27} \left\{U_V^G\right\}_{27 \times 1}, \quad (7)$$

где $\left[P_R\right]_{27 \times 27}$ – матрица преобразования.

С учетом (7) равенство (6) может быть записано в виде

$$\left\{\lambda\right\}_{1 \times 3}^T \left[F\right]_{3 \times 27} \left[P_R\right]_{27 \times 27} \left\{U_V^G\right\}_{27 \times 1} = \left\{\lambda\right\}_{1 \times 3}^T \left[T\right]_{3 \times 27} \left\{U_V^G\right\}_{27 \times 1} = 0. \quad (8)$$

Функционал, выражающий равенство энергии деформации для треугольного КЭ с учетом (8) запишется следующим образом

$$\Phi \equiv \left\{U_V^G\right\}_{27 \times 1}^T \left[K\right] \left\{U_V^G\right\}_{27 \times 1} - \left\{U_V^G\right\}_{27 \times 1}^T \left\{P\right\}_{3 \times 1} + \left\{\lambda\right\}_{1 \times 3}^T \left[T\right] \left\{U_V^G\right\}_{27 \times 1} = 0. \quad (9)$$

Минимизируя (9) по узловым неизвестным $\{U_V^G\}^T$ и значениям корректирующих множителей Лагранжа в дополнительных узлах на серединах на серединах сторон треугольного КЭ $\{\lambda\}^T$, можно получить систему уравнений

$$\begin{cases} \partial\Phi/\partial\left\{U_V^G\right\}^T = \left[K\right]\left\{U_V^G\right\} - \left\{P\right\} + \left[T\right]^T \left\{\lambda\right\} = 0; \\ \partial\Phi/\partial\left\{\lambda\right\}^T = \left[T\right]\left\{U_V^G\right\} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Систему (10) можно представить в удобной конечно-элементной формулировке

$$\left[K_p\right]_{30 \times 30} \left\{U_{Vp}^G\right\}_{30 \times 1} = \left\{P_p\right\}_{30 \times 1}, \quad (11)$$

где $\left[K_p\right]_{30 \times 30} = \begin{bmatrix} \left[K\right]_{27 \times 27} & \left[T\right]^T_{27 \times 3} \\ \left[T\right]_{3 \times 27} & \left[0\right]_{3 \times 3} \end{bmatrix}$; $\left\{U_{Vp}^G\right\}_{30 \times 1}^T = \left\{ \left\{U_V^G\right\}_{27 \times 1}^T \left\{\lambda\right\}_{1 \times 3}^T \right\}$; $\left\{P_p\right\}_{30 \times 1}^T = \left\{ \left\{P\right\}_{3 \times 1}^T \left\{0\right\}_{1 \times 3}^T \right\}$.

Для того чтобы в описанном выше алгоритме реализовать векторный способ аппроксимации перемещений [8], равенство (3) необходимо записать в векторной форме

$$\bar{\lambda}^1 \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial S_{n_1}} + \bar{\lambda}^2 \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial S_{n_2}} + \bar{\lambda}^3 \frac{\partial \bar{v}^3}{\partial S_{n_3}} = 0, \quad \text{где } \bar{\lambda}^{(m)} = \lambda^{1(m)} \bar{a}_1^{0(m)} + \lambda^{2(m)} \bar{a}_2^{0(m)} + \lambda^{(m)} \bar{a}^{0(m)}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^m}{\partial S_{n_m}} = \frac{\partial \bar{v}^m}{\partial S} \cos \alpha^{(m)} + \frac{\partial \bar{v}^m}{\partial \theta} \cos \beta^{(m)}. \quad (12^a)$$

Входящие в (12^a) производные вектора перемещения по глобальным криволинейным координатам S и θ определяются равенствами

$$\frac{\partial \bar{v}^m}{\partial S} = t_1^{1(m)} \bar{a}_1^{0(m)} + t_1^{2(m)} \bar{a}_2^{0(m)} + t_1^{(m)} \bar{a}^{0(m)}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^m}{\partial \theta} = t_2^{1(m)} \bar{a}_1^{0(m)} + t_2^{2(m)} \bar{a}_2^{0(m)} + t_2^{(m)} \bar{a}^{0(m)},$$

где $t_1^{1(m)}, t_1^{2(m)}, t_1^{(m)}, t_2^{1(m)}, t_2^{2(m)}, t_2^{(m)}$ – многочлены, содержащие компоненты вектора перемещения и их производные в узле m , расположенном в середине стороны треугольного КЭ [8], например,

$$t_1^{(m)} = v_{,S}^{(m)} + b_{11}^{0(m)} v^{1(m)}; \quad t_2^{(m)} = v_{,\theta}^{(m)} + b_{22}^{0(m)} v^{2(m)}. \quad (14)$$

Здесь b_{11}^0, b_{22}^0 – компоненты тензора кривизны. Для того чтобы размерность расширенной матрицы жесткости K_p не превышала порядка 30×30 при выполнении скалярного умножения в (12) можно ограничиться нормальной компонентой множителя Лагранжа, т.е. воспользоваться равенством

$$\lambda^{(1)} \bar{a}^{0(1)} \cdot \frac{\partial \bar{v}^{(1)}}{\partial S_{n_1}} + \lambda^{(2)} \bar{a}^{0(2)} \cdot \frac{\partial \bar{v}^{(2)}}{\partial S_{n_2}} + \lambda^{(3)} \bar{a}^{0(3)} \cdot \frac{\partial \bar{v}^{(3)}}{\partial S_{n_3}} = 0, \quad (15)$$

или с учетом (12^a) и (13)

$$\begin{aligned} & \lambda^{(1)} \left(t_1^{(1)} \cos \alpha^{(1)} + t_2^{(1)} \cos \beta^{(1)} \right) + \lambda^{(2)} \left(t_1^{(2)} \cos \alpha^{(2)} + t_2^{(2)} \cos \beta^{(2)} \right) + \\ & + \lambda^{(3)} \left(t_1^{(3)} \cos \alpha^{(3)} + t_2^{(3)} \cos \beta^{(3)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (15^a)$$

Входящие в (15^a) многочлены $t_1^{(m)}, t_2^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$) определяются на основе формул векторной аппроксимации перемещений [8]

$$\begin{aligned} \bar{V} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ \bar{V}_Y^{II} \right\}_{9 \times 1} &= \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left[L \right]_{9 \times 9} \left\{ \bar{V}_Y^I \right\}_{9 \times 1} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left[L \right]_{9 \times 9} \left[\bar{A} \right]_{9 \times 27} \left[N \right]_{27 \times 27} \left\{ U_Y^I \right\}_{9 \times 1} = \\ &= \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left[\bar{A} \right]_{9 \times 27} \left[G \right]_{27 \times 27} \left[N \right]_{27 \times 27} \left\{ U_Y^I \right\}_{9 \times 1}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\left\{ \bar{V}_Y^{II} \right\}_{1 \times 9}^T = \left\{ \bar{V}^i \bar{V}^j \bar{V}^k \bar{V}^i, \bar{V}^j, \bar{V}^k, \bar{V}^i, \bar{V}^j, \bar{V}^k, \bar{V}^i, \bar{V}^j, \bar{V}^k \right\}$; $\left\{ \bar{V}_Y^I \right\}_{1 \times 9}^T = \left\{ \bar{V}^i \bar{V}^j \bar{V}^k \bar{V}^i, \bar{V}^j, \bar{V}^k, \bar{V}^i, \bar{V}^j, \bar{V}^k, \bar{V}^i, \bar{V}^j, \bar{V}^k \right\}$

– столбцы векторных узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат соответственно; $[G]$ – матрица, определяемая из равенства $[L][\bar{A}] = [\bar{A}][G]$. Здесь $[\bar{A}]$ – квазидиагональная матрица, содержащая локаль-

ные векторы базисов узловых точек треугольного КЭ $\bar{a}_1^{0i}, \bar{a}_2^{0i}, \bar{a}^{0i}, \bar{a}_1^{0j}, \dots, \bar{a}^{0k}$, которые могут быть выражены через векторы локального базиса внутренней точки треугольного КЭ $\bar{a}_1^0, \bar{a}_2^0, \bar{a}^0$

$$\left\{ \bar{a}^{0t} \right\}_{3 \times 1} = [Y]_{3 \times 3} \left\{ \bar{a}^0 \right\}_{3 \times 1}, \quad \text{где} \quad \left\{ \bar{a}^{0t} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \bar{a}_1^{0t} \bar{a}_2^{0t} \bar{a}^{0t} \right\}; \quad \left\{ \bar{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \bar{a}_1^0 \bar{a}_2^0 \bar{a}^0 \right\}; \quad (17)$$

верхний индекс t обозначает узлы треугольного КЭ i, j, k . С учетом (17) можно сформировать равенство $[\bar{A}] = \bar{a}_1^0 [A_1] + \bar{a}_2^0 [A_2] + \bar{a}^0 [A_3]$. (17^a)

Выражение (16) с учетом (17^a) запишется следующим образом

$$\bar{V} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left(\bar{a}_1^0 [A_1] + \bar{a}_2^0 [A_2] + \bar{a}^0 [A_3] \right)_{27 \times 27} [G]_{27 \times 27} \left\{ Z_Y \right\}_{27 \times 1}, \quad \text{где} \quad \left\{ Z_Y \right\}_{27 \times 1} = [N]_{27 \times 27} \left\{ U_Y^I \right\}_{27 \times 1}. \quad (18)$$

Дифференцируя (18) по глобальным криволинейным координатам S и θ , можно получить производные вектора перемещения

$$\begin{aligned} \bar{V}_{,S} &\equiv t_1^1 \bar{a}_1^0 + t_1^2 \bar{a}_2^0 + t_1 \bar{a}^0 = \\ &= \left(\left\{ \varphi_{,\xi} \right\}^T \frac{\partial \xi}{\partial S} + \left\{ \varphi_{,\eta} \right\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} \right) \left(\bar{a}_1^0 [A_1] + \bar{a}_2^0 [A_2] + \bar{a}^0 [A_3] \right) [G] \left\{ Z_Y \right\}; \\ \bar{V}_{,\theta} &\equiv t_2^1 \bar{a}_1^0 + t_2^2 \bar{a}_2^0 + t_2 \bar{a}^0 = \\ &= \left(\left\{ \varphi_{,\xi} \right\}^T \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \left\{ \varphi_{,\eta} \right\}^T \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \left(\bar{a}_1^0 [A_1] + \bar{a}_2^0 [A_2] + \bar{a}^0 [A_3] \right) [G] \left\{ Z_Y \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношений (19) можно получить зависимости для многочленов $t_1^{(m)}, t_2^{(m)}$

$$\begin{aligned} t_1 &= \left(\{\varphi, \xi\}^T \frac{\partial \xi}{\partial S} + \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} \right) [A_3][G]\{Z_V\}; \\ t_2 &= \left(\{\varphi, \xi\}^T \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) [A_3][G]\{Z_V\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Равенство (15^a) с учетом (20) может быть записано в матричном виде

$$\begin{matrix} \{\lambda\}^T & [B] & \{U_V^F\} & = & 0, & (21) & \text{где} & [B] & = & \begin{bmatrix} \{b_1\}^T \\ \{b_2\}^T \\ \{b_3\}^T \end{bmatrix}. & (21^a) \\ 1 \times 3 & 3 \times 27 & 27 \times 1 & & & & & 3 \times 27 & & \begin{matrix} 1 \times 27 \\ 1 \times 27 \\ 1 \times 27 \end{matrix} \end{matrix}$$

Входящие в (21^a) матрицы-строки b_m определяются согласно (15)...(20), например,

$$\begin{aligned} \{b_1\}^T \Big|_{\substack{\xi=0.5 \\ \eta=0.0}} &= \left[\left(\{\varphi, \xi\}^T \frac{\partial \xi}{\partial S} + \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} \right) \cos \alpha^{(1)} + \right. \\ &+ \left. \left(\{\varphi, \xi\}^T \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \cos \beta^{(1)} \right] [A_3][G]\{Z_V\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Сопоставляя равенства (6), (7) и (21), (21^a), следует отметить весьма существенные отличия данных соотношений, которые обусловлены принципиально различными способами аппроксимации полей перемещений в треугольном КЭ. Так, например, матрица $[F]$ содержит только третью часть ненулевых элементов, в то время как матрица $[B]$ является полностью заполненной. Этот факт объясняется тем, что в соответствии с традиционной интерполяционной процедурой каждая компонента вектора перемещения и ее производные зависят от узловых значений только этой же компоненты и ее производных, как это видно из (5). В соответствии с векторной аппроксимацией полей перемещений [8] отдельная компонента вектора перемещения и ее производные зависят от полного набора узловых варьируемых параметров треугольного КЭ $\{U_V^F\}$, в структуру которого входят узловые значения всех трех компонент вектора перемещения и их производные.

Дальнейшая процедура получения расширенной матрицы жесткости $[K_p]$ и столбца узловых нагрузок $\{P_p\}$ при векторном способе аппроксимации аналогична (9)...(11) с заменой матрицы $[T]$ на $[B]$ и соответствующей заменой интерполяционных формул, входящих в матрицы $[K]$ и $\{P\}$ [8].

Пример расчета. Была рассчитана открытая с торцов оболочка в форме эллипсоида вращения, загруженная внутренним давлением интенсивности q , имеющая на левом краю пружинные опоры, позволяющие смещаться ей под действием заданной нагрузки в меридиональном направлении как жесткому телу (рис. 2). Радиус вращения вычислялся по формуле

$$r = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

где $b = 0,9$ м; $a = 1,3$ м; осевая координата x изменялась в пределах $0 \leq x \leq 1,2$ м. Были приняты следующие исходные данные: $q = 5$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $t = 0,02$ м. Расчеты были выполнены в двух вариантах: в первом варианте был реализован алгоритм, описанный соотношениями (2)...(11); во втором варианте при формировании матрицы жесткости треугольного КЭ с множителями Лагранжа использовалась векторная аппроксимация перемещений (12)...(22).

Вследствие наличия осевой симметрии оболочка была представлена одной лентой треугольных КЭ, ориентированных в меридиональном направлении.

Таблица 1

Величина смещения оболочки как жесткого тела, м	Вариант 1			
	Точка 1		Точка 2	
	$\frac{\sigma_M^6}{\sigma_M^H}$, МПа	$\frac{\sigma_K^6}{\sigma_K^H}$, МПа	$\frac{\sigma_M^6}{\sigma_M^H}$, МПа	$\frac{\sigma_K^6}{\sigma_K^H}$, МПа
0.00	0.02	169.2	0.76	171.6
	0.71	167.2	0.09	164.9
0.09	6.2	58.5	7.1	66.1
	-20.6	46.2	-24.4	37.7
0.90	62.2	-937.8	64.3	-883.1
	-212.6	1042.7	-245.1	-1106.1
9.00	618.5	-10840.8	632.7	-10318.0
	-2121.2	-11866.3	-2438.7	-12476.0
Величина смещения оболочки как жесткого тела, м	Вариант 2			
	Точка 1		Точка 2	
	$\frac{\sigma_M^6}{\sigma_M^H}$, МПа	$\frac{\sigma_K^6}{\sigma_K^H}$, МПа	$\frac{\sigma_M^6}{\sigma_M^H}$, МПа	$\frac{\sigma_K^6}{\sigma_K^H}$, МПа
0.00	-0.17	169.2	0.81	171.6
	0.87	167.1	0.50	164.9
0.09	-0.17	169.2	0.81	171.6
	0.87	167.1	0.50	164.9
0.90	-0.17	169.2	0.81	171.6
	0.87	167.1	0.50	164.9
9.00	-0.17	169.2	0.82	171.6
	0.87	167.2	0.49	165.0

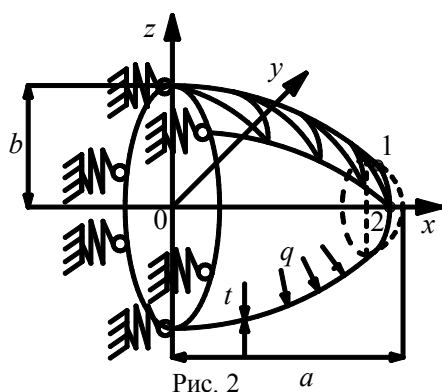


Рис. 2

Результаты повариантных расчетов представлены в табл. 1, в которой приведены численные значения меридиональных σ_m и кольцевых σ_n напряжений на правом краю оболочки (точки 1 и 2) в зависимости от величины смещения оболочки как жесткого тела.

Верхние индексы «в» и «н» в обозначениях напряжений указывают на внутреннюю и наружную поверхности оболочки соответственно.

Анализ результатов показывает, что при отсутствии жесткого смещения численные значения напряжений практически совпадают. Однако с возникновением жесткого смещения результаты первого варианта нельзя признать удовлетворительными.

С увеличением смещения оболочки как жесткого целого погрешность первого варианта многократно возрастает. И, напротив, во втором варианте наблюдается полная стабильность контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния, несмотря на весьма значительные смещения эллипсоида как жесткого тела.

Основываясь на вышеприведенных примерах, можно сделать вывод о необходимости использования векторной аппроксимации полей перемещений в алгоритмах формирования матриц жесткостей треугольных КЭ с множителями Лагранжа при расчете оболочек, допускающих жесткие смещения под действием заданной нагрузки.

Л и т е р а т у р а

1. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 391 с.
2. Скопинский В.Н. Напряжения в пересекающихся оболочках. – М.: Физматлит, 2008. – 399 с.
3. Зенкевич О.М. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред : Перев. с англ. – М.: 1976. – 464 с.
5. Кантин Г. Смещение криволинейных элементов как жесткого целого // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – №7. – С. 84-88.
6. Кузнецов Ю.М., Голованов А.И. Элементы с явным выражением жестких смещений в расчете тонких цилиндрических оболочек // Прочность и устойчивость оболочек. Труды семинара. – Вып. XIX. Часть II. – Казань – 1986. – №2. – С.83-93.
7. Косицын С.Б. Метод построения базисных функций для искривленных конечных элементов с учетом жесткого смещения // Исследования по строительным конструкциям и их элементам. М.: ЦНИИСК. – 1982. – С. 17-27.
8. Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А. Расчет оболочек на основе МКЭ в двумерной постановке. – Волгоград: ИПК ФГОУ ВПО ВГСХА «Нива». 2009. – 196 с.
9. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В. Использование множителей Лагранжа при формировании матрицы жесткости треугольного конечного элемента// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 2. – С. 38-43.
10. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселев А.П. О функциях формы в алгоритмах формирования матриц жесткости треугольных конечных элементов // Известия вузов. Сер.: Строительство. – 1999. – № 10. – С. 23-27.

THE ALGORITHM OF THE ACCOUNT OF DISPLACEMENT AS A RIGID WHOLE TRIANGULAR SHELL ELEMENT WITH THE HELP OF LAGRANGE MULTIPLIERS

Y.V. Klochkov, A.P. Nikolaev, O.V. Vakhnina

A question of application of a vector way of approximation of movings in the algorithms of calculation of environments of rotation developed on the basis of triangular elements of digitization which matrixes of rigidity were formed with use of the correcting multipliers of Lagrange essentially raising accuracy of certainly-element decisions of environments