

## Численные методы расчета конструкций

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

А.П. КИСЕЛЕВ, канд. техн. наук, доцент

Н.А. ГУРЕЕВА, канд. техн. наук, доцент

Р.З. КИСЕЛЕВА, ассистент.

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия

Обычно в расчетах многослойных пластин используются гипотезы Кирхгофа или Тимошенко, накладывающие связь на характер изменения тангенциальных перемещений по толщине пакета слоев пластины. Нормальное перемещение по толщине пакета слоев принимается постоянным. В настоящей работе представлен конечно-элементный алгоритм расчета многослойных пластин на основе соотношений теории упругости без дополнительных гипотез.

Матрица жесткости произвольного шестигранного элемента пластины с узловыми неизвестными в виде перемещений и их первых производных по декартовым координатам  $x, y, z$  формируется согласно алгоритму [1]. Для выполнения численного интегрирования произвольный шестигранник отображается на куб с локальными координатами  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ . Глобальные координаты  $x, y, z$  внутренней точки конечного элемента определяются через узловые значения координат трилинейными соотношениями

$$\lambda = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\lambda_y\}, \quad (1)$$

где  $\{\lambda_y\}_{1 \times 8}^T = \{\lambda^i \ \lambda^j \ \lambda^k \ \lambda^l \ \lambda^m \ \lambda^n \ \lambda^p \ \lambda^h\}$  – матрица-строка узловых значений координаты  $\lambda$ , под символом  $\lambda$  понимаются координаты  $x, y, z$ .

Дифференцированием (1) определяются производные координат  $x_{,\xi}, x_{,\eta}, x_{,\zeta}, \dots, z_{,\xi}, z_{,\eta}, z_{,\zeta}, \dots, \xi_{,x}, \xi_{,y}, \xi_{,z}, \dots, \zeta_{,x}, \zeta_{,y}, \zeta_{,z}, \dots$ .

Перемещения внутренней точки конечного элемента определяются через их узловые значения матричными соотношениями

$$\gamma = \{\varphi(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\gamma_y\}, \quad (2)$$

где  $\{\gamma_y\}_{1 \times 32}^T = \{\gamma^i \ \gamma^j \ \gamma^k \ \gamma^l \ \gamma^m \ \gamma^n \ \gamma^p \ \gamma^h \ \gamma_{,\xi}^i \dots \gamma_{,\xi}^h \ \gamma_{,\eta}^i \dots \gamma_{,\eta}^h \ \gamma_{,\zeta}^i \dots \gamma_{,\zeta}^h\}$  –

вектор узловых неизвестных компоненты  $\gamma$  в локальной системе координат; под символом  $\gamma$  понимаются перемещения  $u, v, w$ ;  $\{\varphi(\xi, \eta, \zeta)\}$  – матрица функций формы, полученной на основе кубических полиномов Эрмита.

Вектор узловых неизвестных компоненты  $\gamma$  в глобальной системе координат имеет вид

$$\{\gamma_y^G\}_{1 \times 32}^T = \{\gamma^i \ \gamma^j \ \gamma^k \ \gamma^l \ \gamma^m \ \gamma^n \ \gamma^p \ \gamma^h \ \gamma_{,x}^i \dots \gamma_{,x}^h \ \gamma_{,y}^i \dots \gamma_{,y}^h \ \gamma_{,z}^i \dots \gamma_{,z}^h\}$$

Связь между векторами  $\{\gamma_y^a\}$  и  $\{\gamma_y^G\}$  записывается в матричном виде

$$\{\gamma_y^a\}_{1 \times 32}^T = [r]_{32 \times 32} \{\gamma_y^G\}_{32 \times 1} \quad (3)$$

где матрица  $[r]$  формируется на основе соотношений

$$\gamma_{,\xi} = \gamma_{,x} \cdot x_{,\xi} + \gamma_{,y} \cdot y_{,\xi} + \gamma_{,z} \cdot z_{,\xi}. \quad (4)$$

Формулы Коши теории упругости с использованием выражений (1), (2), (3), (4) представляются в матричном виде

$$\{\varepsilon\} = [B] \{V_y^a\}, \quad (5)$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & 6 \times 96 & 96 \times 1 \end{matrix}$

где  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} 2\varepsilon_{xy} 2\varepsilon_{xz} 2\varepsilon_{yz}\}$  – вектор-строка деформаций внутренней точки конечного элемента;  $\{V_y^a\}^T = \{u_y^a\}^T \{v_y^a\}^T \{w_y^a\}^T$  – вектор узловых неизвестных конечного элемента в локальной системе координат.

Связь между напряжениями и деформациями внутренней точки конечного элемента принимается в виде

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}, \quad \text{где } \{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}\}. \quad (6)$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & 6 \times 6 & 6 \times 1 \end{matrix}$

Матрица жесткости конечного элемента формируется на основе равенства работ внешних и внутренних сил при нагружении упругого тела

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \int_S \{V\}^T \{p\} dS, \quad (7)$$

где  $V$  – объем тела,  $\{V\}^T = \{u, v, w\}$  – вектор перемещений точки на поверхности  $S$ ;  $\{p\}^T = \{p_x p_y p_z\}$  – вектор внешних нагрузок на поверхности  $S$ .

При использовании (5), (6) равенство (7) запишется в виде

$$[K] \{V_y^G\} = \{f\}, \quad (8)$$

где  $[K] = \int_V [R]^T [B]^T [C] [B] [R] dV$  – матрица жесткости конечного элемента;

$\begin{matrix} 96 \times 96 & V & 96 \times 96 & 96 \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 96 & 96 \times 96 \end{matrix}$

$\{V_y^G\} = \{u_y^G\}^T \{v_y^G\}^T \{w_y^G\}^T$  – вектор узловых неизвестных конечного элемента в глобальной системе координат;  $\{f\} = \int_S [R][A]^T \{p\} dS$  – вектор узловых усилий;

$[A]^T = \begin{bmatrix} [\varphi] & [0] & [0] \\ [0] & [\varphi] & [0] \\ [0] & [0] & [\varphi] \end{bmatrix}$ ,  $[R] = \begin{bmatrix} [r] & [0] & [0] \\ [0] & [r] & [0] \\ [0] & [0] & [r] \end{bmatrix}$  – матрица преобразования локального вектора  $\{V_y^a\}$  в глобальный вектор  $\{V_y^G\}$ .

В настоящей работе реализована возможность использования полученного конечного элемента в расчётах напряженно-деформированного состояния тонких пластин, состоящих из нескольких слоёв материалов с различными физическими свойствами.

Рассмотрим трёхслойную пластину, нагруженную произвольной нагрузкой. Выделим из неё пакет шестигранных объёмных элементов по толщине (рис. 1).

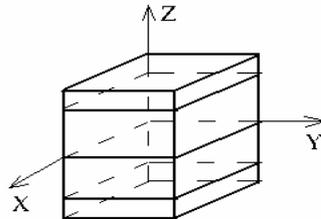


Рис. 1

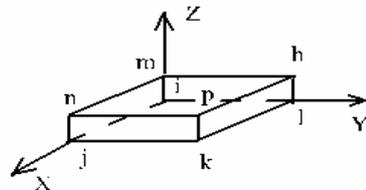


Рис. 2

На рис. 1 каждый внешний слой пластины представлен одним объёмным элементом, средний слой – двумя объёмными элементами. Количество элементов в слоях может варьироваться. Модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона

$\mu$  для внешних слоёв принимаются одинаковыми. Для среднего слоя эти величины являются другими  $E'$ ,  $\mu'$ .

Для отдельного объёмного конечного элемента принята нумерация узлов [1]: узлы нижней грани –  $i, j, k, l$  узлы верхней грани –  $m, n, p, h$  (рис. 2).

Вектор узловых неизвестных шестигранного элемента внешнего слоя имеет вид  $\{q\}^T = \{u \ u_{,x} \ u_{,y} \ u_{,z} \ v \ v_{,x} \ v_{,y} \ v_{,z} \ w \ w_{,x} \ w_{,y} \ w_{,z}\}$ , (9) где  $u, v, w$  – компоненты вектора перемещений вдоль осей  $x, y, z$  соответственно.

Из-за различия физико-механических свойств материалов пластины компоненты вектора неизвестных общей узловой точки конечных элементов, принадлежащих к разным слоям, будут различными. Вектор (9) и его компоненты для узловой точки внутреннего слоя будут помечены штрихами.

Если в узловой точке, расположенной на границе раздела слоёв, узловые неизвестные элемента внешнего слоя принять за основные, то узловые неизвестные конечного элемента внутреннего слоя нужно выразить через основные соотношением

$$\{q'\}^T = [L] \{q\}. \quad (10)$$

Для получения матрицы  $[L]$  используются следующие условия:

1. Равенство векторов перемещений граничного узла внешнего и внутреннего слоя  $v'=v$ , которое приводит к соотношениям

$$u'=u; \quad v'=v; \quad w'=w. \quad (11)$$

2. Равенство относительных деформаций вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ , которое на основании соотношений Коши [2] приводит к выражениям

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (12)$$

3. Отсутствие разрывов на границах разделов приводит к равенствам

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (13)$$

4. Отсутствие проскальзывания на границах разделов слоёв приводит к равенствам касательных напряжений  $\sigma'_{xz} = \sigma_{xz}$ ,  $\sigma'_{yz} = \sigma_{yz}$  и углов сдвига

$\gamma'_{xy} = \gamma_{xy}$ , которые при использовании [2] приводят к соотношениям

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{G}{G'} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{G}{G'} - 1 \right); \quad \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{G}{G'} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \left( \frac{G}{G'} - 1 \right); \quad \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (14)$$

где  $G$  – модуль упругости при сдвиге.

5. Равенство нормальных напряжений к границе раздела слоёв  $\sigma'_{zz} = \sigma_{zz}$  при использовании [2] приводит к соотношению

$$\frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda' + 2\mu'} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda' + 2\mu'} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda' + 2\mu'} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (15)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе.

Если элемент внутреннего слоя примыкает нижней гранью к элементу наружного слоя, то описанное преобразование выполняется для узлов  $i, j, k, l$  (рис. 2), если верхней гранью – то для узлов  $m, n, p, h$ .

С использованием матрицы  $[L]$  формируется матрица преобразования матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок конечных элементов внутреннего слоя, граничащих с элементами наружного слоя.

**Пример расчёта.** Определено напряжено-деформированное состояние трёх-слойной пластины, закреплённой на левом конце, и нагруженной на свободном крае линейной распределённой нагрузкой интенсивности  $q$  (рис.3).

Были приняты следующие исходные данные:

$$l = 0,2 \text{ м}; \quad b = 0,2 \text{ м}; \quad q = 100 \text{ Н/см}; \quad h_1 = 0,002 \text{ м}; \quad h_2 = 0,006 \text{ м}; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \\ E' = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \mu = 0,3; \quad \mu' = 0,25.$$

По толщине пластина разбивалась на 10 равных дискретных элементов. По длине пластина разбивалась на 60 одинаковых элементов. При учете плоского напряженного состояния число степеней свободы системы равно 3926.

В таблице приведены результаты численного расчёта, где даны нормальные напряжения для точек 1, 2, . . . 4 (рис. 3). Штрихами отмечены точки, относящиеся к среднему слою панели.

Таблица

Напряжения МПа	Точки					
	1	2	2'	3'	3	4
$\sigma_{xx}$	-151.049	-85.783	-8.32	8.322	85.783	151.049
$\sigma_{zz}$	1.118	1.163	1.175	-1.163	-1.163	-1.118

Как видно, в граничных точках имеются скачки в значениях нормальных напряжений. Эпюра нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  в поперечном сечении заделки, разделенном по высоте на 10 равных частей представлена на рис.4.

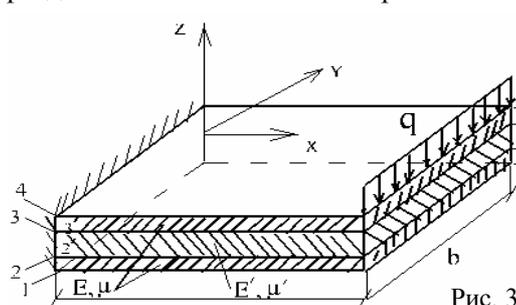


Рис. 3

Условие равновесия по силам ( $\Sigma X = 0$ ) выполняется с точностью  $\delta = 0,00039\%$ , а по моментам ( $\Sigma M_y = 0$ ) точность составила  $\delta = 0,00025\%$ . Анализ результатов показывает, что объёмный конечный элемент [1] пригоден для расчёта многослойных тонкостенных конструкций.

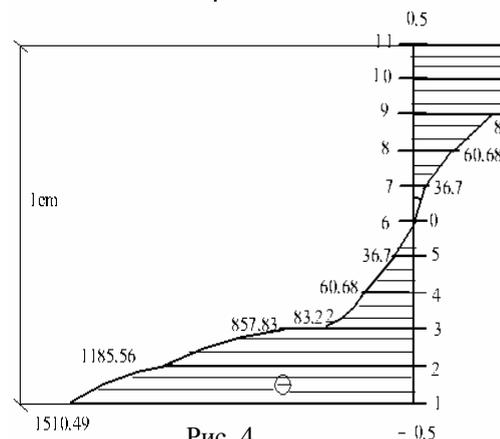


Рис. 4.

#### Л и т е р а т у р а

1. Киселев А .П. Метод конечных элементов в решении трёхмерных задач теории упругости// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – № 4. – С. 11-17.
2. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности.–М.: «Высшая школа», 1970. – 288с.

## THE APPLICATION OF THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS FOR STRENGTH ANALYSIS OF MULTILAYER PLATES

A.P. Kiselyov, N.A. Gureyeva, R.Z. Kiselyova

The possibility of using eight-node and six-edge finite elements with nodal unknown displacements and their derivative in strength analysis of thin plates consisting of several layers of materials with various physical properties is studied in the paper.