Проблемы теории упругости

БИФУРКАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ «СООРУЖЕНИЕ – ОСНОВАНИЕ» НА БАЗЕ МОДЕЛИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА В.З. ВЛАСОВА

В.К. ИНОЗЕМЦЕВ, *д-р техн. наук, профессор*
О.В. ИНОЗЕМЦЕВА, *канд. техн. наук*
К.А. СТРЕЛЬНИКОВА, *аспирант*
Саратовский государственный технический университет

Рассмотрим постановку задачи бифуркационной устойчивости упругого процесса деформирования системы, объединяющей сооружение с высокорасположенным центром тяжести, фундаментную плиту и основание.

В данном случае строится математическая модель системы, объединяющая абсолютно жесткое сооружение на деформируемой фундаментной плите, взаимодействующей со слоем основания [1].

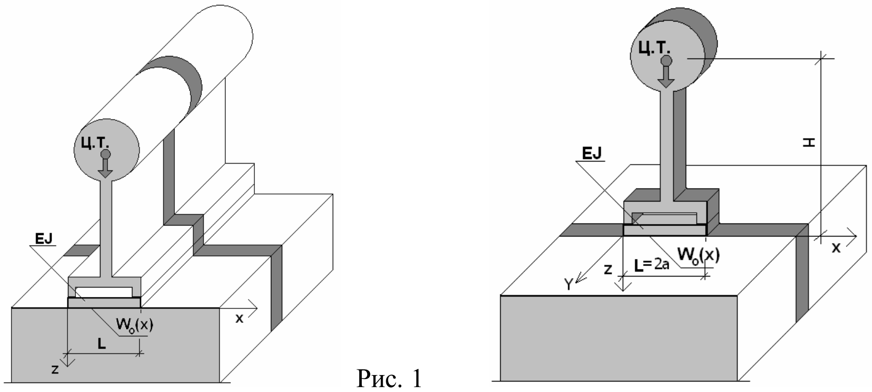

Рис. 1

Модель позволяет свести проблему устойчивости сооружения к задаче о собственных значениях в форме

$$M(x) = \lambda N(x). \tag{1}$$

Здесь x – неизвестная собственная функция, λ – собственное значение, M и N линейные дифференциальные операторы с соответствующими граничными условиями.

Иллюстрацией такого подхода будет модель, объединяющая уравнения для слоя основания на базе вариационного метода В.З. Власова [2] и уравнения изгиба балки (или балки-полоски выделенной из плиты), представленная в рамках плоской задачи в приращениях. В уравнениях модели вариационного метода В.З. Власова, описывающих докритическое состояние системы, следует положить равным нулю параметр шага нагружения, то есть считать приращение ΔP_k и $\Delta p(x)$ равными нулю. Тогда получим:

$$\sum_{j=0}^{n}(E_{22}^{jk})\Delta W_j + \sum_{j=0}^{n}(2E_{32}^{jk})\frac{d\Delta W_j}{dx} + \sum_{j=0}^{n}(S_{33}^{jk}\frac{d^2\Delta W_j}{dx^2}) = \Delta q(x), \tag{2}$$

где $\Delta q(x)$ в рамках плоской задачи теории упругости определяется уравнением равновесия балки и имеет вид:

$$\Delta q(x) = \Delta p(x) + EJ\Delta W_0^{IV}, \tag{3}$$

где $\Delta q(x)$ – отпор основания, $\Delta p(x)$ – нагрузка, EJ – изгибная жесткость балки.

В итоге уравнение бифуркационной устойчивости упругого эквивалента системы представляется дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных.

Граничные условия системы уравнений модели В.З.Власова задаются на функции приращений перемещений ΔW_i. При этом для поверхности слоя основания при решении уравнения (2) необходимо удовлетворить двум граничным условиям (по W) на границах области интегрирования (рис. 2):

$$\text{при } x_1 = -L_1 \rightarrow \Delta W_0 = 0; \text{ при } x_1 = L + L_2 \rightarrow \Delta W_0 = 0. \quad (4)$$

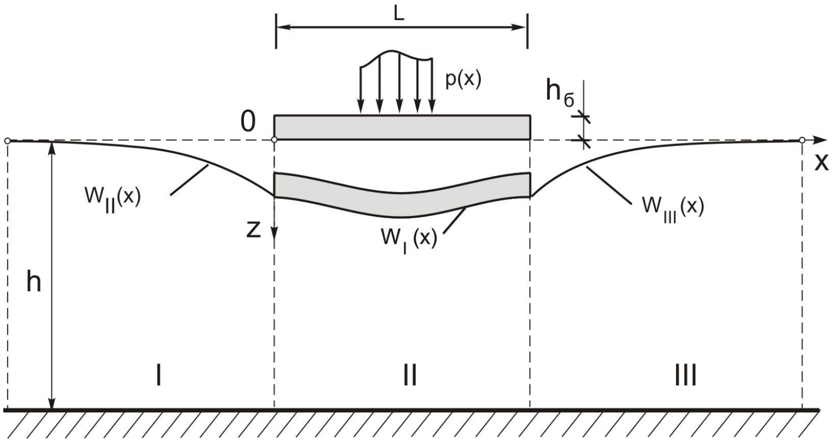

Рис. 2. Границы областей интегрирования

Выполнение данных граничных условий обеспечивается автоматически, если заданы границы области интегрирования и принято допущение, что перемещения поверхности основания в этих точках равны 0. Размеры области интегрирования в каждом конкретном случае зависят от характера решаемой задачи и требуемой точности расчета. Кроме того, необходимо задать условия по концам (0, L) фундаментной конструкции (балки или плиты), которые имеют смысл так называемой «сшивки» граничных условий на границах областей I, II и III (рис. 3). Для балки или плиты свободно лежащих на основании полагаем, что приращение изгибающего момента равно нулю и имеет место неразрывность эпюры приращений обобщенных поперечных сил и эпюры приращений вертикальных перемещений балки (или балки-полоски) и основания:

$$\Delta M^{0,L} = 0; \; \Delta S^{0,L}_{балки} = -\Delta P^{0,L} + \Delta S^{0,L}_{осн}; \; \Delta W^{0,L}_{балки} = \Delta W^{0,L}_{осн} . \quad (5)$$

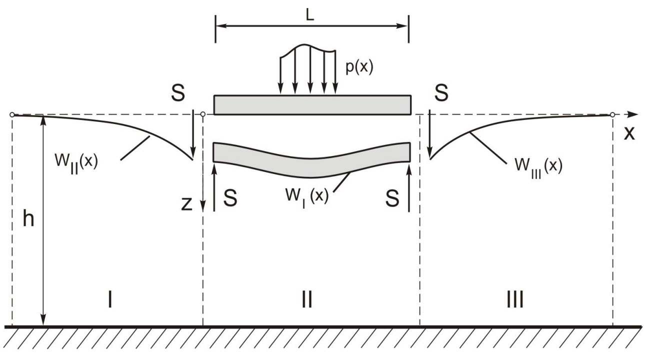

Рис. 3. Расчетная схема балки, свободно лежащей на однослойном основании

При расчете докритического состояния системы приращение левой и правой опорных реакций сооружения на k-том шаге нагружения:

$$\Delta P_k^{0,L} = \frac{\Delta P_k}{2}\left(1 - \frac{2H}{L^2}\sum_{n=0}^{k-1}\left(\Delta W_n^L - \Delta W_n^0\right)\right) \mp \frac{2H}{L^2}\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\Delta P_n}{2}\right)\left(\Delta W_k^L - \Delta W_k^0\right) \qquad (6)$$

При сведении задачи устойчивости к проблеме собственных значений ΔP_k в (6) необходимо считать равным нулю.

Полученные уравнения бифуркационной устойчивости модели вариационного метода В.З. Власова для упругой системы не требуют пошаговой процедуры поиска бифуркационной критической нагрузки. Наиболее просто численную реализацию поиска бифуркационной критической нагрузки можно проиллюстрировать на примере модели вариационного метода В.З.Власова для однородного однослойного основания. В этом случае уравнение (2) принимает вид для слоя основания

$$-E_{22}^{00}\Delta W_0 + S_{33}^{00}\frac{d^2\Delta W_0}{dx^2} = 0. \qquad (7)$$

Для слоя основания со свободно лежащей на нем фундаментной балкой или балкой-полоской получим:

$$-E_{22}^{00}\Delta W_0 + S_{33}^{00}\frac{d^2\Delta W_0}{dx^2} = EJ\frac{d^4\Delta W_0}{dx^4}. \qquad (8)$$

Граничные условия для балки свободно лежащей на основании, учитывающие, что приращение изгибающего момента равно нулю и имеет место неразрывность эпюры приращений обобщенных поперечных сил и эпюры приращений вертикальных перемещений балки и основания, примут вид

$$\Delta M^{0,L} = 0; \quad \Delta W_{балки}^{0,L} = \Delta W_{осн}^{0,L},$$

$$\Delta S_{балки}^{0} - \Delta S_{осн}^{0} = -\frac{H}{L^2}P_{кр}^{упр.экв}\left(\Delta W_0^L - \Delta W_0^0\right);$$

$$\Delta S_{балки}^{L} - \Delta S_{осн}^{L} = +\frac{H}{L^2}P_{кр}^{упр.экв}\left(\Delta W_0^L - \Delta W_0^0\right).$$

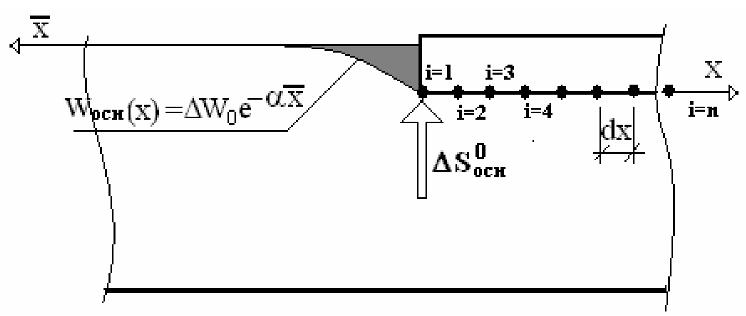

Рис. 4

Сведение проблемы устойчивости сооружения к задаче о собственных значениях произведем на основе метода конечных разностей. Для этого область интегрирования вдоль оси X под балкой разобьем на конечные отрезки длиной dX и представим уравнение (8) для внутренних точек области интегрирования ($2 < I < n - 1$) в конечно-разностной форме (рис. 4):

$$W_{i-2} - (4 + r)W_{i-1} + (6 + 2r + k)W_i - (4 + r)W_{i+1} + W_{i+2} = 0,$$

где W_i – неизвестные метода конечных разностей,

$$r = \frac{E_0 h_c}{6(1+\nu)}\frac{dx^2}{EJ}; \quad k = \frac{E_0}{h_c\left(1-\nu_0^2\right)}\frac{dx^4}{EJ}.$$

Учтем граничные условия по концам балки. Дифференциальное уравнение для слоя основания со свободно лежащей на нем фундаментной балкой или балкой-полоской выражает обобщенные условия равновесия грунта, рассматриваемого совместно с балкой, расположенной на его поверхности. Вследствие этого функция $\Delta W_0(x)$ представляет собой обобщенный прогиб, который в данном случае совпадает с действительным прогибом. Обобщенному прогибу соответствует обобщенная поперечная сила, отличающаяся от балочной поперечной силы:

$$\Delta S^{0,L}_{балки} = -EJ\left(\frac{d^3 \Delta W_0^{0,L}}{dx^3} - \frac{E_0 h_c}{6(1+\nu)EJ}\frac{d\Delta W_0^{0,L}}{dx}\right).$$

Поперечная сила основания $\Delta S^{0,L}_{осн}$, учитывающая влияние свободного основания за пределами балки, порождает по концам балки сосредоточенную реакцию

$$\Delta S^{0,L}_{осн} = \frac{E_0 h_c}{6(1+\nu)}\frac{W_{осн}(x)}{dx} = -\alpha\frac{E_0 h_c}{6(1+\nu)}\Delta W_0^{0,L}.$$

Согласно физическому смыслу задачи, обобщенная поперечная сила в месте приложения сосредоточенных опорных реакций сооружения по концам фундаментной балки, терпит разрыв на величину

$$\frac{H}{L^2}P_{кр}^{упр.экв}\left(\Delta W_0^L - \Delta W_0^0\right).$$

С учетом этого получим на левом конце фундаментной балки для первой и второй точек $(i=1)$ и $(i=2)$ следующие конечно-разностные уравнения в безразмерной форме:

$$\left(2+2r(1+dx\alpha)+k-\lambda P_{кр}^{упр.экв}\right)W_1-(4+2r)W_2+2W_3+\lambda P_{кр}^{упр.экв}W_n=0,$$

$$(-2-r)W_1+(5+2r+k)W_2+(-4-r)W_3+W_4=0,\quad \alpha=\sqrt{k/r}.$$

Для правого конца фундаментной балки конечно-разностные уравнения получаются аналогично. Структура конечно-разностных уравнений имеет вид:

$$\left(2+2r(1+dx\alpha)+k-\lambda P_{кр}^{упр.экв}\right)W_1-(4+2r)W_2+2W_3+\lambda P_{кр}^{упр.экв}W_n=0;$$

$$(-2-r)W_1+(5+2r+k)W_2+(-4-r)W_3+W_4=0;$$

$$W_1-(4+r)W_2+(6+2r+k)W_3-(4+r)W_4+W_5=0;$$

………………………………

$$W_{i-2}-(4+r)W_{i-1}+(6+2r+k)W_i-(4+r)W_{i+1}+W_{i+2}=0;$$

………………………………………………………………..

$$W_{n-4}-(4+r)W_{n-3}+(6+2r+k)W_{n-2}-(4+r)W_{n-1}+W_n=0;$$

$$W_{n-3}+(-4-r)W_{n-2}+(5+2r+k)W_{n-1}+(-2-r)W_n=0;$$

$$\lambda P_{кр}^{упрэкв}W_1+2W_{n-2}-(4+2r)W_{n-1}+\left(2+2r(1+dx\alpha)+k-\lambda P_{кр}^{упрэкв}\right)W_n=0;$$

где
$$\lambda=\frac{2Hdx^3}{L^2EJ}.$$

Полученная система представляет собой задачу на собственные значения.

Собственное значение в виде критической нагрузки определяет точку бифуркации исходного состояния равновесия системы. При приближении к этой точке по параметру нагрузки решение, описывающее равновесные состояния для реальных систем с наличием малых начальных несовершенств, устремляется в бесконечность. Рассмотрим в качестве примера идеализированную упругую систему и упругую систему с начальным несовершенством в виде малого начального эксцентриситета, при этом приращение нагрузки ΔP_k будет неравно нулю и система конечно-разностных уравнений, в связи с этим, будет неоднородным.

Для идеализированной системы с размерами, показанными на рис. 5, определим эпюру осадок слоя основания для докритического состояния, а для аналогичной системы с несовершенством построим решение, описывающее эпюру осадок при наличии начального эксцентриситета. При этом, возможно произвести численное сравнение результатов с аналитическим решением для фундаментной балки бесконечной жесткости полученной в [2].

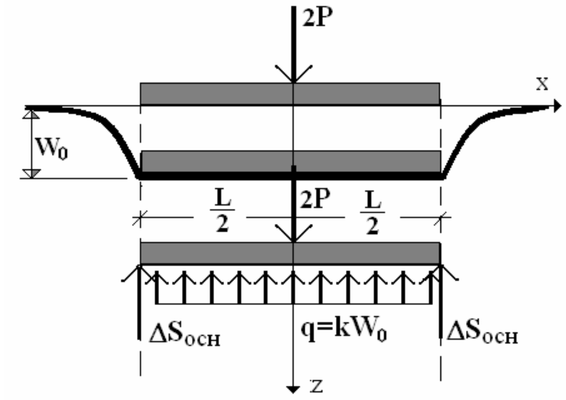

Рис. 5

Аналитическое решение имеет вид:

$$W_0 = \frac{2P}{\frac{E_0}{6(1+\nu)}\sqrt{\frac{6}{1-\nu_0}} + \frac{E_0 L}{2h_c\left(1-\nu_0^2\right)}}.$$

При единичной нагрузке безразмерный параметр вертикального перемещения, вычисляемый из аналитического решения:

$$\frac{E_0 L}{4Ph_c\left(1-\nu_0^2\right)} W_0 = \frac{1}{1 + \frac{h_c\left(1-\nu_0\right)}{3L}\sqrt{\frac{6}{1-\nu_0}}}.$$

Численное решение уравнений докритического состояния системы дает полное совпадение с аналитическим решением для балки большой жесткости и отличающийся от аналитического решения результат численного расчета для балки малой жесткости при которой происходит заметная изгибная деформация балки (рис. 6). На рис. 6 показаны прогибы балки на слое основания различной толщины 1м; 1,5 м; 2 м; 4 м. При увеличении толщины балки изгибные деформации уменьшаются. При толщине 4 м результаты совпадают с аналитическим решением для абсолютно жесткой балки.

Для идеализированной системы с размерами, показанными на рис.7, определим бифуркационную нагрузку, а для аналогичной системы с несовершенством построим решение, описывающее возрастание эксцентриситета системы при ее нагружении.

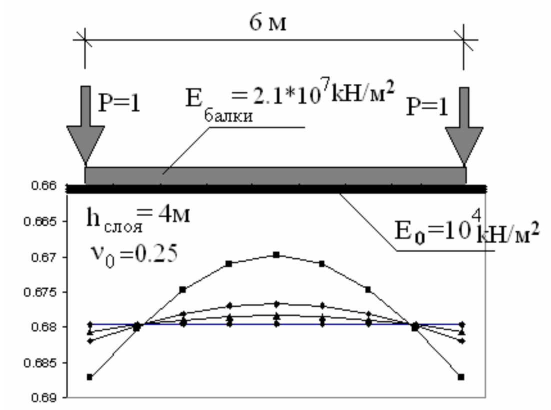

Рис. 6

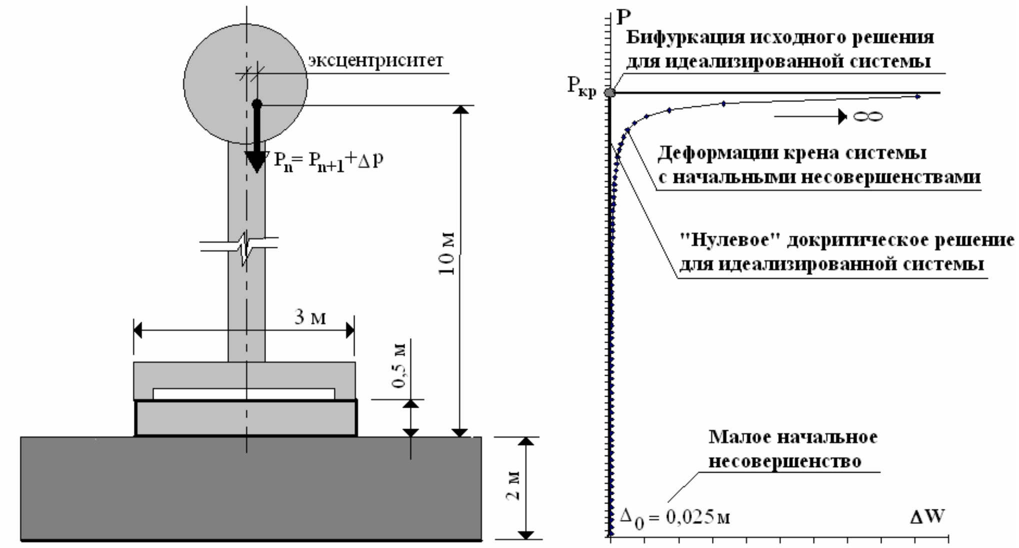

Рис. 7

Модуль упругости слоя основания $E_0 = 1{,}8 \cdot 10^4$ КН/м^2 , коэффициент Пуассона – 0,3; модуль упругости материала фундаментной балки – $2{,}1 \cdot 10^7$ КН/м^2. Безразмерный параметр критической нагрузки $\lambda P_{kr} = 3{,}598 \cdot 10^{-3}$.

По результатам расчета видно, что критическая бифуркационная нагрузка идеализированной системы совпадает с предельной нагрузкой для системы с начальными несовершенствами.

Литература

1. *Иноземцев В.К.* Общая устойчивость сооружений на неоднородном нелинено деформируемом основании// Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2008/ Н.Ф.Синева О.В.Иноземцева.

2. *Власов В.З.* Избранные труды: В 3 т. – М: Наука. 1964. – Т. 3. – 407с.

BIFURCATIONAL STABILITY OF THE “STRUCTURE AND FOUNDATION”SYSTEM ON THE BASIS OF V.Z. VLASOV’S MODEL OF VARIATIONAL METHOD

Inozemtzev V.K., Inozemtzeva O.V., Strelnikova K.A.

A model joining the equations for a layer of the ground on the basis of Vlasov’s variational method and the equations of bending of beam strip used for a plane problem in displacements is presented.