РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В ФОРМЕ ЦИКЛИД ДЮПЕНА

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*
Российский университет дружбы народов

Циклиды Дюпена являются двуканаловыми поверхностями, оба семейства кривизны которых являются семействами окружностей [1], [2]. Основным свойством циклид Дюпена является зависимость главных кривизн каждого семейства окружностей только от одной координаты:

$$k_1 = k_1(\beta); \quad k_2 = k_2(\alpha), \tag{1}$$

где α, β – координатная сеть линий кривизны поверхности.

Другим важным свойством геометрии циклид Дюпена является то, что отношение коэффициентов A, B первой квадратичной формы поверхности выражается произведением функций, каждая из которых зависящих от одной из координат [3], [4], [5]

$$A / B = \xi(\alpha)\eta(\beta). \tag{2}$$

Чтобы систему уравнений равновесия безмоментной теории оболочек можно было привести к одному разрешающему уравнению, необходимо выполнение одного из четырех условий [6]:

$$а)\quad \frac{A}{k_2 B} = \psi_1(\alpha)\psi_2(\beta); \qquad б)\quad \frac{B}{Ak_1} = \tilde{\psi}_1(\alpha)\tilde{\psi}_2(\beta);$$

$$в)\quad \frac{A}{B} = \psi_3(\alpha)\psi_4(\beta); \qquad г)\quad \frac{k_2 B}{k_1 A} = \tilde{\psi}_3(\alpha)\tilde{\psi}_4(\beta). \tag{3}$$

При выполнении условий (3, *а*) или (3, *б*) система уравнений равновесия безмоментной теории оболочек приводится к одному разрешающему уравнению введением функции напряжений, при выполнении условий (3, *в*) или (3, *г*) – методом исключения неизвестных.

Свойства геометрии циклид Дюпена (1), (2) обеспечивают выполнение любого условия (3), и, следовательно, возможны четыре варианта разрешающего уравнения. Получение разрешающего уравнения методом исключения неизвестных обеспечивается дифференцированием исходных уравнений, что приводит к повышению общего порядка дифференциальных уравнений и появлению дополнительных функций и констант интегрирования. Получаемое решение необходимо проверять на его соответствие исходной системе уравнений, что приводит к дополнительным трудностям при решении задачи. Метод получения разрешающего уравнения введением функций напряжения, обычно не приводит к повышению порядка дифференциального уравнения и, поэтому он является более предпочтительным, если выполняются условия (3, *а*) или (3, *б*).

Свойства (1), (2) также обеспечивают условия применимости метода Фурье (метода разделения переменных) для решения разрешающего уравнения безмоментной теории оболочек.

Учитывая выполнение условия (3, *а*) введем функцию напряжений $\varphi(\alpha,\beta)$, связанную с внутренними тангенциальными усилиями формулами [6]:

$$N_\alpha = \frac{\xi}{k_2 AB}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + b_1; \quad N_\beta = -\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{\xi}{k_2 AB}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + b_1\right) + \frac{Z}{k_2}; \quad S = -\frac{\xi}{k_2 A^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + b_2, \tag{4}$$

где $b_1 = \frac{1}{k_2 B^2} \int B \left[k_2 ABX - \frac{\partial B}{\partial \alpha} Z - \frac{k_2}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A^2 b_2 \right) \right] d\alpha$ при произвольной функции b_2, или $b_2 = \frac{1}{A^2} \int A \left[ABX - \frac{1}{k_2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} Z - \frac{1}{k_2 B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(k_2 B^2 b_1 \right) \right] d\beta$ при произвольной функции b_1. Одна из функций b_1 или b_2 может подбираться для упрощения удовлетворения граничным условиям задачи или правой части разрешающего уравнения или приниматься равной нулю

При этом 1-е и 3-е уравнения системы равновесия безмоментной теории оболочек удовлетворяются тождественно, а 2-е уравнение приводится к разрешающему уравнению

$$\frac{k_2^2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\xi k_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\eta}{k_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\eta k_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right] = \frac{\eta k_2^2}{\xi} G_1(\alpha, \beta), \tag{5}$$

где $G_1 = \frac{A}{\xi} \left[ABY + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{k_2} Z \right) - \frac{1}{A \cdot k_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A^2 k_1^2}{k_2} b_1 \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(B^2 b_2 \right) \right]$ – функция нагрузки. С учетом выполнения условия (3, *б*) функцию напряжения принимаем в виде:

$$N_\alpha = -\frac{k_2}{k_1^2} \frac{\xi}{A^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - b_3; \quad N_\beta = \frac{\xi}{k_1 A^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{Z}{k_2} + \frac{k_1}{k_2} b_3; \quad S = -\frac{1}{\eta k_1 B^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + b_4, \tag{6}$$

где

$$b_3 = -\frac{k_2}{A^2 k_1^2} \int A k_1 \left[AB + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{k_1} Z \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(B^2 b_4 \right) \right] d\beta, \text{ или}$$

$$b_4 = -\frac{1}{B^2} \int B \left[ABY + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{k_1} Z \right) + \frac{1}{A k_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A^2 k_1^2}{k_2} b_3 \right) \right] d\alpha .$$

Одна из функций $\widetilde{b}_3$ или $\widetilde{b}_4$ – произвольная функция и может приравниваться нулю.

Формулы (6) удовлетворяют тождественно 2-му и 3-му уравнениям равновесия безмоментной теории оболочек, а 1-е уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{\xi k_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{k_2^2}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right] + \eta k_1^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\eta}{k_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) = \frac{\eta}{\xi} k_1^2 G_2(\alpha, \beta), \tag{7}$$

где

$$G_2 = \eta B \left[ABX - \frac{1}{k_2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} Z + \frac{1}{B k_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(B^2 k_2 \widetilde{b}_3 \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A^2 \widetilde{b}_4 \right) \right].$$

Выполнение условия (3, *в*) позволяет исключить из системы уравнений равновесия безмоментной теории оболочек сдвигающее тангенциальное усилие S и выразив из 3-го уравнения равновесия N_β через N_α, получить разрешающее уравнение для нормального тангенциального усилия N_α

$$\xi k_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\xi k_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(k_2 B^2 N_\alpha \right) \right] + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\eta}{k_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(k_1^2 A^2 N_\alpha \right) \right] = k_2 G_3(\alpha, \beta), \tag{8}$$

где $G_3 = -\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(B^3 X - \frac{B^2}{k_2 A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} Z \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A^3 Y + \frac{A^2}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{k_2} Z \right) \right].$

Выражая из 3-го уравнения равновесия $N_\alpha = k_2 N_\beta / k_1 + Z / k_1$ и подставляя в уравнение (8), получаем разрешающее уравнение относительно N_β

$$\xi \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{\xi k_2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(k_2^2 B^2 N_\beta\right)\right] + \frac{k_1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\eta}{k_1}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(k_1 A^2 N_\beta\right)\right] = k_1 \widetilde{G}_3(\alpha, \beta), \tag{9}$$

где $\widetilde{G}_3 = \dfrac{A}{B}\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left[B^3 X + \dfrac{B^2}{k_2 A}\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{B}{k_1}Z\right)\right] - \dfrac{B}{A}\dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(A^3 Y - \dfrac{A^2}{k_1 B}\dfrac{\partial A}{\partial \beta}Z\right)$.

Выполнение условия (3, *г*) позволяет исключить из уравнений равновесия нормальные тангенциальные усилия и получить разрешающее уравнение относительно сдвигающего тангенциального усилия S

$$\frac{\xi}{k_2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{k_2^2}{\xi}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(B^2 S\right)\right] + \frac{1}{k_1 \eta}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[k_1^2 \eta \frac{\partial}{\partial \beta}\left(A^2 S\right)\right] = \widetilde{G}_4(\alpha, \beta), \tag{10}$$

где $G_4 = \dfrac{k_2 B}{k_1 A}\dfrac{\partial}{\partial \beta}\left[\dfrac{k_1 A^2}{k_2}\left(k_1^2 A X - \dfrac{1}{k_2 B}\dfrac{\partial B}{\partial \beta}Z\right)\right] -$

$$- \frac{k_1 A}{k_2 B}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\frac{k_2^2 \cdot B^3}{k_1}\left[BY - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{k_2}Z\right)\right]\right\}.$$

Для получения общего решения однородных уравнений (5, 7-10) можно использовать метод разделения переменных. Для решения однородных уравнений (7), (8) положим

$$\varphi(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha) F(\beta). \tag{11}$$

Подставляя решение (11) в однородное уравнение (5) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{k_2^2}{\xi}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\xi k_2}\frac{d\Phi}{d\alpha}\right) - \lambda \Phi = 0; \quad \frac{\eta}{k_1}\frac{d}{d\beta}\left[\eta k_1^2 \frac{dF}{d\beta}\right] + \lambda F = 0. \tag{12}$$

Аналогично, для однородного уравнения (7) имеем

$$\frac{1}{\xi k_2}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{k_2^2}{\xi}\frac{d\varphi}{d\alpha}\right] - \lambda \Phi = 0, \quad \eta k_1^2 \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\eta}{k_1}\frac{dF}{d\beta}\right) + \lambda F = 0. \tag{13}$$

Чтобы использовать метод разделения переменных в уравнениях (8-10), предварительно вводим новые переменные:

$$\widetilde{N}_\alpha = B^2 N_\alpha; \quad \widetilde{N}_\beta = B^2 N_\beta; \quad \widetilde{S} = B^2 S, \tag{14}$$

или

$$\widetilde{N}_\alpha = A^2 N_\alpha; \quad \widetilde{N}_\beta = A^2 N_\beta; \quad \widetilde{S} = A^2 S, \tag{15}$$

Решение ищется соответственно в виде

$$\widetilde{N}_\alpha = N(\alpha) T(\beta); \quad \widetilde{N}_\beta = N(\alpha) T(\beta); \quad S = N(\alpha) T(\beta). \tag{16}$$

Подставляем в уравнения (8-10) формулы (14) или (15), используя соотношение (2) и разделив уравнения на ξ^2 или умножив соответственно на η^2. Применяем для однородных уравнений метод разделение переменных, получаем при использовании формул (14):

для уравнения (8)

$$\frac{k_2}{\xi}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\xi k_2}\frac{d}{d\alpha}\left(k_2 N\right)\right] - \lambda N =, \quad \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\eta}{k_1}\frac{d}{d\beta}\left(k_1^2 \eta^2 T\right)\right] + \lambda T = 0. \tag{17}$$

для уравнения (9)

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\xi k_2}\frac{d}{d\alpha}\left(k_2^2 N\right)\right]-\lambda N=0\,,\quad \frac{k_1}{\eta}\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\eta}{k_1}\frac{d}{d\beta}\left(k_1\eta^2 T\right)\right]+\lambda T=0\,. \quad (18)$$

для уравнения (10)

$$\frac{1}{\xi k_2}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{k_2^2}{\xi}\frac{d}{d\alpha}(N)\right]-\lambda N=0\,,\quad \frac{1}{k_1\eta}\frac{d}{d\beta}\left[k_1^2\eta\frac{d}{d\beta}\left(\eta^2 T\right)\right]+\lambda T=0\,. \quad (19)$$

Аналогично можно получить уравнения при использовании формул (15).

Литература

1. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 540 с.

2. *Милинский В.И.* Дифференциальная геометрия. – Л.: Изд-во «Кубуч», 1934. – 332 с.

3. *Якубовский А.М.* Исследование аналитического метода задания циклид Дюпена при выделении их из конгруэнции окружностей // Прикладная геометрия. – М.: УДН, 1971. – Вып.4. – С. 26-40.

4. *Бойков И.К.* Геометрия циклид Дюпена и их применение в строительных объектах// Расчет оболочек строительных конструкций. – М.: УДН, 1982. – С. 116-129.

5. *Иванов В.Н.* On Dupin's syclide, as Joachimsthal's Channel Surfaces// The 10^{th} International Conference of Geometry and Graphics, Ukraine, Kiev, 2002, July 28- August 2, vol. 2. – Kiev. – P. 350 – 354.

6. *Рекач В.Г., Кривошапко С.Н.* Расчет оболочек сложной геометрии. – М.: Изд-во УДН, 1988. – 176 с.

THE REZULTING EQUATIONS OF MEMBRANE THEORY OF SHELLS IN THE FORM OF DUPEN'S SURFACES

Ivanov V.N.

The paper is considered the differential equations of equilibrium of membrane theory of shells in the form of Dupin's surfaces. It is shown that the geometrical characteristics of the Dupin's surfaces allows to reduce the system of tree equation of equilibrium to one resulting equation of second order. It may be done using stress function or excluding two of the unknowns. Four types of resulting equations are received.