

Расчет тонких упругих оболочек

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Н.К. ГАЛИМОВ, к.ф.-м.н., с.н.с.

С.Н. ЯКУПОВ, аспирант

Учреждение Российской академии наук Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

При расчете элементов конструкций необходимо знать механические характеристики материала, такие как модуль упругости и коэффициент поперечного сжатия. В настоящей работе ставится обратная задача: зная перемещения вершины купола H , определить модуль упругости материала сферической оболочки E (рис.1), защемленной по краю и нагруженной внутренним равномерным давлением. При этом прогибы предполагаются малыми, материал оболочки – упругим. Введем необходимые обозначения: R и a – радиусы сферической оболочки и ее опорного круга, Θ – текущая координата, отмеряемая от вертикальной оси, Θ_0 – половина угла раствора, h – толщина стенки оболочки, ν – коэффициент поперечного сжатия, p – интенсивность равномерного внутреннего давления; u , w – меридиональное и радиальное перемещения (прогиб); T_1 , M_1 , ε_1 , k_1 и T_2 , M_2 , ε_2 , k_2 – усилие, изгибающий момент, деформация и изменение кривизны в меридиональном и в окружном направлениях.

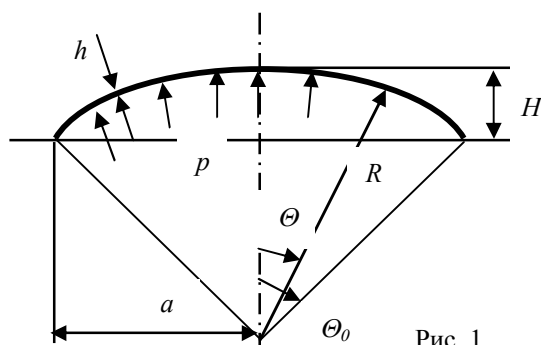


Рис. 1

Часть I. Задача об упругом равновесии сферической оболочки рассмотрена в ряде известных монографий [1,2,3]. Используя соотношения, приведенные в [3], получим конкретные расчетные формулы.

Соотношения между мембранными деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\theta} + w \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} (u \cdot \operatorname{ctg} \theta + w).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Соотношения между изгибными деформациями и поворотом v :

$$k_1 = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{d\theta}, \quad k_2 = -\frac{1}{R} \cdot \operatorname{ctg} \theta \cdot v.\quad (1.2)$$

Соотношения между усилиями, моментами и деформациями:

$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1), \quad M_1 = D(k_1 + \nu \cdot k_2), \quad M_2 = D(k_2 + \nu \cdot k_1),\quad (1.3)$$

где B и D означают жесткость оболочки на растяжение и изгиб

$$B = Eh / (1 - \nu^2), \quad D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)].\quad (1.4)$$

Перерезывающее усилие N выражается через изгибающие моменты

$$N = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{d}{d\theta} (M_1 \cdot \sin \theta) - M_2 \cdot \cos \theta \right].\quad (1.5)$$

Уравнения равновесия оболочки тождественно удовлетворяются введением функции напряжений V [3] (формулы 57.10 и 60.2):

$$T_1 = V \cdot \text{ctg} \theta + pR/2, \quad T_2 = dV/d\theta + pR/2, \quad N = V. \quad (1.6)$$

В работе [3], используя условие совместности деформаций и уравнение (1.5), получены два разрешающих уравнения относительно функций V и v , для которых получены зависимости

$$V = -\frac{1}{2\gamma^2}(A_1 \cdot \chi_2 - B_1 \cdot \chi_1), \quad v = \frac{1}{Eh}(A_1 \cdot \chi_1 + B_1 \cdot \chi_2). \quad (1.7)$$

Внося (1.7) в (1.3) и (1.6) получаем формулы для усилий и моментов:

$$T_1 = \frac{pR}{2} - \frac{\text{ctg} \theta}{2\gamma^2}(A_1 \cdot \chi_2 - B_1 \cdot \chi_1), \quad T_2 = \frac{pR}{2} - \frac{1}{2\gamma^2}(A_1 \cdot \chi_2' - B_1 \cdot \chi_1'), \quad (1.8)$$

$$M_1 = -\frac{R}{4\gamma^4}[A_1(\chi_1' + v \cdot \text{ctg} \theta \cdot \chi_1) + B_1(\chi_2' + v \cdot \text{ctg} \theta \cdot \chi_2)],$$

$$M_2 = -\frac{R}{4\gamma^4}[A_1(\text{ctg} \theta \cdot \chi_1 + v \cdot \chi_1') + B_1(\text{ctg} \theta \cdot \chi_2 + v \cdot \chi_2')].$$

В зависимостях (1.7) введены функции χ_1, χ_2 [3]:

$$\chi_1(\theta) = \gamma \cdot \sqrt{2} \cdot \psi_1'(\gamma \cdot \sqrt{2} \cdot \theta) \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}}, \quad \chi_2(\theta) = \gamma \cdot \sqrt{2} \cdot \psi_2'(\gamma \cdot \sqrt{2} \cdot \theta) \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}}, \quad 4\gamma^4 = 12(1-\gamma^2)\left(\frac{R}{h}\right)^2, \quad (1.9)$$

где через ψ_1, ψ_2 обозначены функции, выражающиеся через функции Томсона:

$$\psi_1(\gamma \sqrt{2} \cdot \theta) = \text{ber}(\gamma \sqrt{2} \cdot \theta), \quad \psi_2(\gamma \sqrt{2} \cdot \theta) = -\text{ber}(\gamma \sqrt{2} \cdot \theta). \quad (1.10)$$

Штрих над функциями ψ_1 и ψ_2 означает дифференцирование этих функций по аргументу, указанному в скобках, A_1 и B_1 – произвольные постоянные интегрирования.

Получим формулу для прогиба w . Исключая из (1.1) функцию w , имеем:

$$\frac{du}{d\theta} - \text{ctg} \theta \cdot u = R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (1.11)$$

Внося в правую часть этого соотношения деформации ε_1 и ε_2 , выраженные с помощью (1.3) и (1.6) через функцию напряжений V , получаем зависимость между u и V :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{u}{\sin \theta} \right) = -\frac{(1+\nu)R}{E \cdot h} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\frac{V}{\sin \theta} \right).$$

Интегрируя это уравнение, получаем соотношение

$$u = -\frac{(1+\nu)R}{E \cdot h} \cdot V + C \cdot \sin \theta, \quad (1.12)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Сферическая оболочка закреплена по краю, поэтому должны выполняться условия:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0. \quad (1.14)$$

Из первого и второго условия (1.14) имеем

$$C = \frac{(1+\nu)R}{\sin \theta_0 \cdot Eh} \cdot V(\theta_0), \quad B_1 = -A_1 \cdot k, \quad k = \left(\frac{\chi_1(\theta_0)}{\chi_2(\theta_0)} \right). \quad (1.15)$$

Из первого уравнения (1.1) получим, исключая с помощью (1.13) функцию u , выражение для прогиба

$$w = \frac{pR^2(1-\nu)}{2 \cdot Eh} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0} \cdot \frac{(1+\nu) \cdot R \cdot V(\theta_0)}{Eh} + \frac{R \cdot \sin \theta}{Eh} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\frac{V}{\sin \theta} \right). \quad (1.16)$$

Из первого и третьего условий (1.14) следует, что при $\theta = \theta_0$ должно выполняться условие $\varepsilon_2 = 0$. Отсюда, используя соотношение:

$$\frac{dV(\theta_0)}{d\theta} - v \cdot \text{ctg} \theta_0 \cdot V(\theta_0) = -\frac{pR(1-v)}{2}, \quad (1.17)$$

найдем третью произвольную постоянную интегрирования A_1 :

$$A_1 = \frac{pR(1-v) \cdot \gamma^2}{Y(\theta_0)}, \quad Y(\theta_0) = [\chi_2'(\theta_0) + k\chi_1'(\theta_0) - v \cdot \text{ctg} \theta_0 \cdot (\chi_2(\theta_0) + k\chi_1(\theta_0))]. \quad (1.18)$$

Из (1.16), принимая во внимание (1.17), можно убедиться в том, что прогиб w при $\theta = \theta_0$ обращается в нуль, т.е. третье условие (1.14) выполняется.

Далее нам понадобятся асимптотические формулы для функций χ_1 и χ_2 и их производных χ_1' и χ_2' по аргументу $\gamma \cdot \sqrt{2} \cdot \theta$ [3] (формулы 59.23):

$$\chi_1(\theta) = M(\theta) \cdot a_1(\theta), \quad \chi_2(\theta) = M(\theta) \cdot a_2(\theta), \quad M(\theta) = e^{\gamma\theta} \sqrt{\gamma / (2\pi\sqrt{2} \sin \theta)},$$

$$\chi_1'(\theta) = -2\gamma \cdot M(\theta) \cdot \tilde{a}_1(\theta), \quad \chi_2'(\theta) = -2\gamma \cdot M(\theta) \cdot \tilde{a}_2(\theta), \quad (1.19)$$

$$a_1(\theta) = (1 - z_1) \cdot \cos \beta - \sin \beta, \quad a_2(\theta) = -[\cos \beta + (1 - z_1) \cdot \sin \beta],$$

$$\tilde{a}_1(\theta) = z_2 \cdot \cos \beta + (1 - z_2) \cdot \sin \beta, \quad \tilde{a}_2(\theta) = (1 - z_2) \cos \beta - z_2 \cdot \sin \beta, \quad (1.20)$$

$$z_1 = 3\text{ctg} \theta / 8\gamma, \quad z_2 = 7\text{ctg} \theta / 16\gamma, \quad \beta = \gamma \cdot \theta - (\pi / 8), \quad k = a_1(\theta_0) / a_2(\theta_0).$$

Внося в $Y(\theta_0)$ выражения для функций χ_1 , χ_2 , χ_1' , χ_2' , получаем

$$A_1 = -\frac{pR(1-v) \cdot \gamma^2}{M(\theta_0) \cdot J(\theta_0)}, \quad J(\theta_0) = 2\gamma(\tilde{a}_2(\theta_0) + k \cdot \tilde{a}_1(\theta_0)) + v \cdot \text{ctg} \theta_0 \cdot (a_2(\theta_0) + k \cdot a_1(\theta_0)). \quad (1.21)$$

Далее выведем расчетные формулы, необходимые для конкретных расчетов. Для апекса сферической оболочки ($\theta = 0$) из (1.16), воспользовавшись разложениями для функций ψ_1 , ψ_2 , ψ_1' , ψ_2' при малых значениях аргумента, [3] (формулы 64.1) и формулами (1.7) и (1.21), получим расчетную формулу для прогиба:

$$w_0 = \frac{pR^2(1-v)}{2Eh} \left[1 - \frac{(a_2(\theta_0) + k \cdot a_1(\theta_0))(1+v)}{J(\theta_0) \cdot \sin(\theta_0)} - \frac{2 \cdot \gamma^2}{M(\theta_0) \cdot J(\theta_0)} \right]. \quad (1.22)$$

Наибольший интерес представляют меридиональные усилия и изгибающий момент в апексе и на краю оболочки. Для них имеем следующие расчетные формулы:

$$\text{при } \theta = 0: \quad T_1(0) = \frac{pR}{2} \left[1 - \frac{(1-v)\gamma^2}{M(\theta_0) \cdot J(\theta_0)} \right], \quad M_1(0) = \frac{pR^2(1-v^2) \cdot k}{4M(\theta_0)J(\theta_0)}, \quad T_2(0) = T_1(0),$$

$$M_2(0) = M_1(0); \quad (1.23)$$

$$\text{при } \theta = \theta_0: \quad T_1(\theta_0) = \frac{pR}{2} \left[1 + \frac{\text{ctg} \theta_0 \cdot (1-v) \cdot (a_2(\theta_0) + k \cdot a_1(\theta_0))}{J(\theta_0)} \right], \quad T_2(\theta_0) = v \cdot T_1(\theta_0),$$

$$M_1(\theta_0) = -\frac{pR^2(1-v)(\tilde{a}_1(\theta_0) - k \cdot \tilde{a}_2(\theta_0))}{2\gamma \cdot J(\theta_0)}, \quad M_2(\theta_0) = v \cdot M_1(\theta_0). \quad (1.24)$$

Наличие формул (1.22) - (1.24) позволяет полностью определить напряженно-деформированное состояние оболочки.

Часть III. Представляет интерес сопоставить полученные в ч.1 решения с решением, полученным на основе уравнений пологих оболочек. В качестве исходных возьмем соотношения §132 книги [2]:

$$\Delta\Delta\psi = \frac{Eh}{R}\Delta w, \quad D\Delta\Delta w + \frac{1}{R}\cdot\Delta\psi = p, \quad \Delta(\dots) = \frac{d}{dr}\left(\frac{d(\dots)}{dr}\right), \quad (2.1)$$

где ψ – функция напряжений, w – прогиб, D, E, h, R, a, p – те же величины, что и в ч.1; Δ – оператор Лапласа в полярных координатах, r – радиальная координата, $0 \leq r \leq a$. Введем безразмерную координату $\xi = r/a$.

Общие решения однородных уравнений (2.1) приведены в формулах (x), (y) §132 [2]. Дополним их частными решениями для прогиба и функции напряжений, зависящие от нагрузки p :

$$w(\xi) = c_1 \cdot \psi_1(k_1\xi) + c_2 \cdot \psi_2(k_1\xi) + c + \frac{pR^2}{Eh}, \quad k_1^4 = 12(1-\nu^2) \cdot a^4 / R^2h^2, \\ \psi(\xi) = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{Eh \cdot a^2}{R} (c_2 \cdot \psi_1(k_1\xi) - c_1 \cdot \psi_2(k_1\xi)) + \frac{pR \cdot a^2}{4} \xi^2, \quad (2.2)$$

где c, c_1, c_2 – произвольные постоянные, а функции ψ_1, ψ_2 – указаны в (1.10).

Мембранные деформации выражаются через радиальные перемещения u и прогиб w :

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{a \cdot d\xi} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{a \cdot \xi} + \frac{w}{R}, \quad k_1 = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{d^2w}{d\xi^2}, \quad k_2 = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \frac{dw}{d\xi}, \quad (2.3)$$

а формулы (1.3), (1.4) остается в силе.

Граничные условия жесткой заделки для пологих оболочек записываются:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad dw/dr = 0, \quad \text{при } \xi = 1, \quad (2.4)$$

означающие, что перемещения и поворот на крае равны нулю. Удовлетворяя этим условиям, найдем выражения постоянных:

$$c_1 = \frac{pR}{Eh} \cdot \frac{(1-\nu) \cdot R}{2I}, \quad c_2 = -\frac{\psi_1'(k_1)}{\psi_2'(k_1)} \cdot c_1, \quad (2.5)$$

$$I = -\left[\psi_1(k_1) + \frac{(1+\nu)}{k_1} \psi_2(k_1) \right] + \left[\psi_2(k_1) - \frac{(1-\nu)}{k_1} \psi_1(k_1) \right] \cdot \frac{\psi_1'(k_1)}{\psi_2'(k_1)}.$$

Далее, производя необходимые выкладки, имеем формулы для прогиба, усилия T_1 и момента M_1 :

$$w(\xi) = \frac{pR^2}{Eh} \cdot \frac{(1-\nu)}{2I} \left[\psi_1(k_1 \cdot \xi) - \psi_1(k_1) - \frac{\psi_1'(k_1)}{\psi_2'(k_1)} (\psi_2(k_1\xi) - \psi_2(k_1)) \right], \\ T_1(\xi) = \frac{pR}{2} \left[1 - \frac{(1-\nu)}{I \cdot (k_1\xi)} \cdot \left(\psi_2'(k_1\xi) + \psi_1(k_1\xi) \cdot \frac{\psi_1'(k_1)}{\psi_2'(k_1)} \right) \right], \quad (2.6)$$

$$M_1(\xi) = -\frac{pR^2 \cdot (1-\nu) \cdot (a/R)^2}{2 \cdot I \cdot k_1^2} \left[\psi_2'(k_1\xi) - \frac{(1-\nu)}{k_1\xi} \cdot \psi_1'(k_1\xi) + \left(\psi_1(k_1\xi) + \frac{(1-\nu)}{k_1\xi} \psi_2'(k_1\xi) \right) \cdot \frac{\psi_1'(k_1)}{\psi_2'(k_1)} \right].$$

В частности, для центра оболочки имеем

$$w(0) = \frac{pR^2}{Eh} \cdot \frac{(1-\nu)}{2I} \left[1 - \psi_1(k_1) + \frac{\psi_2(k_1) \cdot \psi_1'(k_1)}{\psi_2'(k_1)} \right], \quad (2.7)$$

$$T_1(0) = \frac{pR}{2} \left[1 + \frac{(1-\nu)}{2I} \right], \quad M_1(0) = -\frac{pR^2 \cdot (1-\nu^2) (a/R)^2 \psi_1'(k_1)}{4 \cdot I \cdot k_1^2 \cdot \psi_2'(k_1)}$$

Заметим, что при выводе формулы для M_1 вторые производные от ψ_1, ψ_2 вычислены с помощью уравнений Бесселя для этих функций.

Часть III. Числовые расчеты. Приведем некоторые числовые результаты.

Пример 1. Рассмотрим оболочку, изготовленную из пластика с параметрами $\theta_0 = 1,236 \text{ рад}$, $p = 0,5 \text{ кг/см}^2$, $R = 38,1 \text{ мм}$, $a = 36 \text{ мм}$, $h = 1,3 \text{ мм}$. Из эксперимента получено значение прогиба $w(0) = 0,09 \text{ мм}$, т.е. $w(0)/h = 0,0655$ и можно применить линейную теорию. Примем коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$ (среднее значение для пластика [4]). Производя вычисления, имеем $w(0)/R = 0,3702(pR/Eh)$. Отсюда следует, что $E = 0,3702 pR/h \cdot (w(0)/R)$ и при $w(0)/R = 0,002361$, полученном из эксперимента, имеем $E = 2176 \text{ кг/см}^2$. По формуле (2.6) получим $E = 2205 \text{ кг/см}^2$, а по мембранной теории [5] – $E = 2700 \text{ кг/см}^2$. Завышение модуля упругости объясняется неучетом моментов по мембранной теории.

В табл.1 и 2 обозначено: $T_1(0), M_1(0), \sigma_1^M(0), \sigma_1^H(0), \varepsilon_1^+(0), \varepsilon_1^-(0)$ – усилия, моменты, напряжения, деформации на внешней и внутренней поверхностях оболочки при $\theta = 0$; $T_1(\theta_0), M_1(\theta_0), \sigma_1^M(\theta_0), \sigma_1^H(\theta_0), \varepsilon_1^+(\theta_0), \varepsilon_1^-(\theta_0)$ – то же при $\theta = \theta_0$.

Таблица 1

по формулам (1.23), (1.24)				по формулам (2.6), (2.7)			
$T_1(0)$	$T_1(\theta_0)$	$M_1(0)$	$M_1(\theta_0)$	$T_1(0)$	$T_1(1)$	$M_1(0)$	$M_1(1)$
9,5218	9,21141	$0,2585 \cdot 10^{-2}$	-2,5931	9,5007	8,4693	-0,0380	-2,8549
$\sigma^M(0)$	$\sigma^M(\theta_0)$	$\sigma^H(0)$	$\sigma^H(\theta_0)$	$\sigma^M(0)$	$\sigma^M(1)$	$\sigma^H(0)$	$\sigma^H(1)$
6,9350	6,7109	$0,823 \cdot 10^{-2}$	-8,2534	6,8998	6,1664	-0,1209	-9,0867
$\varepsilon^+(0)$	$\varepsilon^+(\theta_0)$	$\varepsilon^-(0)$	$\varepsilon^-(\theta_0)$	$\varepsilon^+(0)$	$\varepsilon^+(1)$	$\varepsilon^-(0)$	$\varepsilon^-(1)$
$0,1917 \cdot 10^{-2}$	$-0,5964 \cdot 10^{-3}$	$0,1913 \cdot 10^{-2}$	$0,5786 \cdot 10^{-2}$	$0,1844 \cdot 10^{-2}$	$-0,1132 \cdot 10^{-2}$	$0,1911 \cdot 10^{-2}$	$0,5831 \cdot 10^{-2}$

Пример 2. Рассмотрим оболочку, изготовленную из резины с параметрами $R = 55,9502 \text{ мм}$, $a = 36 \text{ мм}$, $h = 2,2 \text{ мм}$, $\theta_0 = 0,698969 \text{ рад}$, $p = 0,1 \text{ атм}$.

Из эксперимента получено значение прогиба $w(0) = 0,6 \text{ мм}$, т.е. $w(0)/h = 0,272$. Из (1.24) найдем $w(0)/R = 0,402108(pR/Eh)$. Из эксперимента, имеем $w(0)/R = 0,0107238$ и находим $E = 95,3615 \text{ кг/см}^2$. По формуле (2.6) получим $E = 101,4 \text{ кг/см}^2$. По мембранной теории [5] по сравнению с (1.22) имеем завышенное значение, получим $E = 103 \text{ кг/см}^2$. Некоторые расчетные данные приведены в табл.2.

Таблица 2

по формулам (1.23), (1.24)				по формулам (2.6), (2.7)			
$T_1(0)$	$T_1(\theta_0)$	$M_1(0)$	$M_1(\theta_0)$	$T_1(0)$	$T_1(1)$	$M_1(0)$	$M_1(1)$
2,8954	2,4659	$-0,8563 \cdot 10^{-2}$	-1,2696	2,9443	2,3346	0,04817	-1,3346
$\sigma^M(0)$	$\sigma^M(\theta_0)$	$\sigma^H(0)$	$\sigma^H(\theta_0)$	$\sigma^M(0)$	$\sigma^M(1)$	$\sigma^H(0)$	$\sigma^H(1)$
1,3169	1,1213	-0,003177	-1,5738	1,3383	1,0594	0,0611	-1,6748
$\varepsilon^+(0)$	$\varepsilon^+(\theta_0)$	$\varepsilon^-(0)$	$\varepsilon^-(\theta_0)$	$\varepsilon^+(0)$	$\varepsilon^+(1)$	$\varepsilon^-(0)$	$\varepsilon^-(1)$
$0,6899 \cdot 10^{-2}$	$-0,356 \cdot 10^{-2}$	$0,6922 \cdot 10^{-2}$	$0,21197 \cdot 10^{-1}$	$0,69002 \cdot 10^{-2}$	$-0,455 \cdot 10^{-2}$	$0,6297 \cdot 10^{-2}$	$0,2622 \cdot 10^{-1}$

Укажем, что изгибающий момент в центре по теории пологих оболочек определяется грубо. Из табл.1 и 2 можно заключить, что применение теории поло-

гих оболочек нужно применять с осторожностью для подъемистых, достаточно утолщенных оболочек, т.к. при определении модуля упругости погрешность может достигать 6%, а при определении усилий погрешность может достигать 8%, а моментов -10%. Поэтому желательно применять общую теорию непологих оболочек, тем более, что трудоемкость расчета не намного больше, чем при расчетах по теории пологих оболочек.

Л и т е р а т у р а

1. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. – Л.-М.: Гостехиздат, 1947. – 252с.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Гос. издат физ.-мат. литературы, 1963. – 636 с.
3. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. – М.: «Наука», 1968. 456 с.
4. Энциклопедия полимеров. Т.3. М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1150с.
5. Галимов Н.К., Якупов С.Н. Исследование механических характеристик сферических мембран из резиноподобных материалов// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2008. – №3. – С.73-76.

TO DEFINITION OF THE MODULE OF ELASTICITY OF SPHERICAL SHELLS

N.K. Galimov, S.N. Yakupov

Concrete settlement formulas for the spherical covers jammed on a contour which are under uniform pressure are received. Numerical examples are presented.



РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В ФОРМЕ ЦИКЛИД ДЮПЕНА

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*
Российский университет дружбы народов

Циклиды Дюпена являются двуканаловыми поверхностями, оба семейства кривизны которых являются семействами окружностей [1], [2]. Основным свойством циклид Дюпена является зависимость главных кривизн каждого семейства окружностей только от одной координаты:

$$k_1 = k_1(\beta); \quad k_2 = k_2(\alpha), \quad (1)$$

где α, β – координатная сеть линий кривизны поверхности.

Другим важным свойством геометрии циклид Дюпена является то, что отношение коэффициентов A, B первой квадратичной формы поверхности выражается произведением функций, каждая из которых зависящих от одной из координат [3], [4], [5]

$$A / B = \xi(\alpha)\eta(\beta). \quad (2)$$

Чтобы систему уравнений равновесия безмоментной теории оболочек можно было привести к одному разрешающему уравнению, необходимо выполнение одного из четырех условий [6]:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{A}{k_2 B} &= \psi_1(\alpha)\psi_2(\beta); & \text{б) } \frac{B}{A k_1} &= \tilde{\psi}_1(\alpha)\tilde{\psi}_2(\beta); \\ \text{в) } \frac{A}{B} &= \psi_3(\alpha)\psi_4(\beta); & \text{г) } \frac{k_2 B}{k_1 A} &= \tilde{\psi}_3(\alpha)\tilde{\psi}_4(\beta). \end{aligned} \quad (3)$$