ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВЕЛАРОИДАЛЬНОГО ТИПА С ДВУМЯ СЕМЕЙСТВАМИ СИНУСОИД НА КОЛЬЦЕВОМ ПЛАНЕ

С.Н. КРИВОШАПКО, *д-р техн. наук, профессор*
С.Л. ШАМБИНА, *канд. техн. наук, доцент*
Российский университет дружбы народов, Москва

В статье рассматриваются поверхности, ограниченные двумя плоскими концентрическими окружностями, оба семейства координатных линий которых являются синусоидами. Эти поверхности можно отнести к группе поверхностей велароидального типа. Рассматриваемые поверхности могут найти применение в ландшафтной архитектуре, а также при проектировании некоторых изделий и сооружений, так как состоят из циклически повторяющихся тождественных элементов.

В наш век инновационных идей создаются конструкции и изделия, немыслимые с точки зрения недалекого прошлого. Архитекторы и инженеры- механики ищут новые формы и поверхности, описываемые аналитическими уравнениями, и внедряют их в архитектуру и различные отрасли техники.

Велароидальной называется *поверхность переноса* на плоском прямоугольном плане с образующей кривой переменной кривизны [1], которая при движении не выходит за пределы своего класса. Таким образом, поверхность ограничена четырьмя взаимно ортогональными контурными прямыми ($k_x = k_y = 0$), лежащими в одной плоскости. В настоящее время известны три вида велароидальных поверхностей: параболический, эллиптический и синусоидальный велароиды.

Синусоидальный велароид образовывается двумя семействами полуволн синусоид, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях и обращенных выпуклостями в одну и ту же сторону (рис. 1). Каждое семейство синусоид имеет одинаковый период. Синусоидальный велароид ограничен плоским прямоугольным контуром.

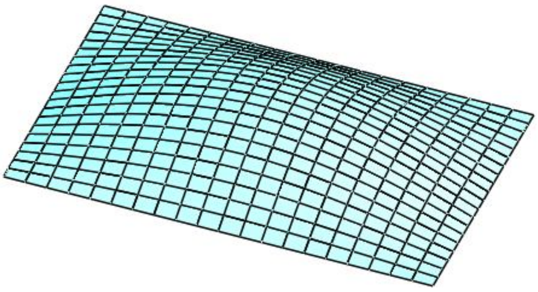


Рис. 1

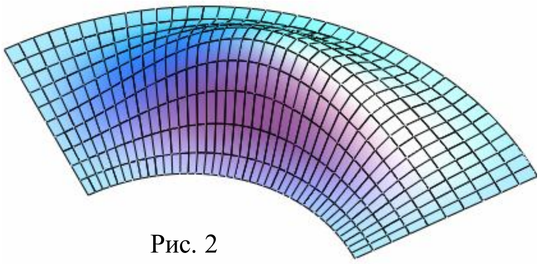


Рис. 2

В данной статье приводятся дополнительные результаты исследований велароидальных поверхностей с двумя семействами синусоидальных криволинейных координат. Поверхности ограничены двумя плоскими концентрическими окружностями (рис. 2). Эти поверхности впервые были представлены в работе [2]. Указанные признаки показывают, что поверхности не является велароидальными, но, по-видимому, их можно отнести к *поверхностям велароидального типа*.

Пусть имеем две концентрические окружности с радиусами r_0 и R (рис. 3), которые примем за контурные кривые рассматриваемой поверхности.

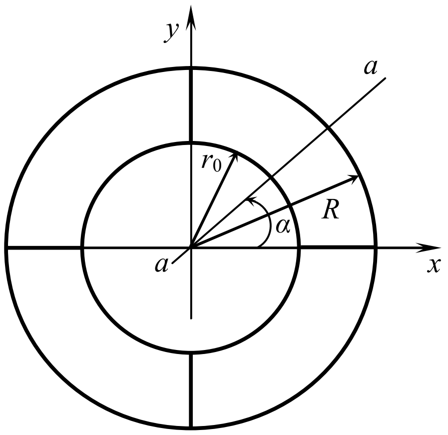


Рис. 3

Предположим, что в любом вертикальном сечении $a - a$, проходящем через центр O, лежит синусоида:

$$z = b\cos\frac{2\pi(r-c)}{R-r_0} - b,$$

где b – переменная высота полуволны синусоиды, $0 \le b \le B$. Будем считать, что участок синусоиды, находящийся в пределах точек A и B ($r_0 \le r \le R$), будет образовывать проектируемую поверхность велароидального типа.

Семейство криволинейных координатных линий в окружном направлении также примем в виде синусоид:

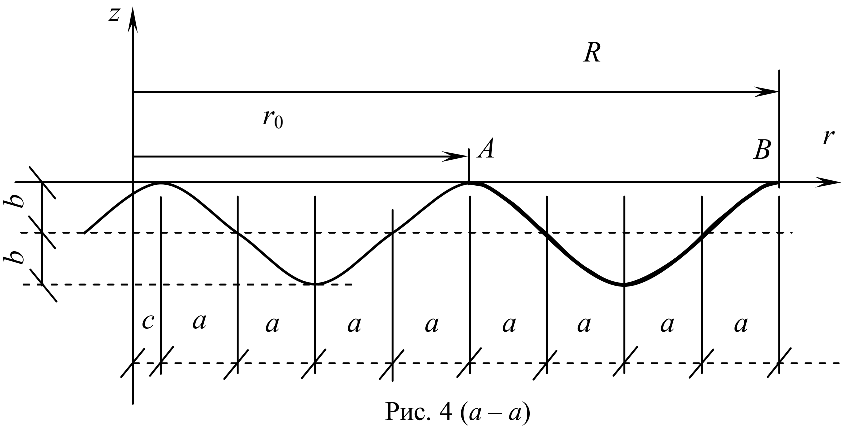


Рис. 4 ($a - a$)

$$z = b\cos n\alpha - b,$$

где n – число тождественных фрагментов поверхности в окружном направлении, принимаемых по необходимости.

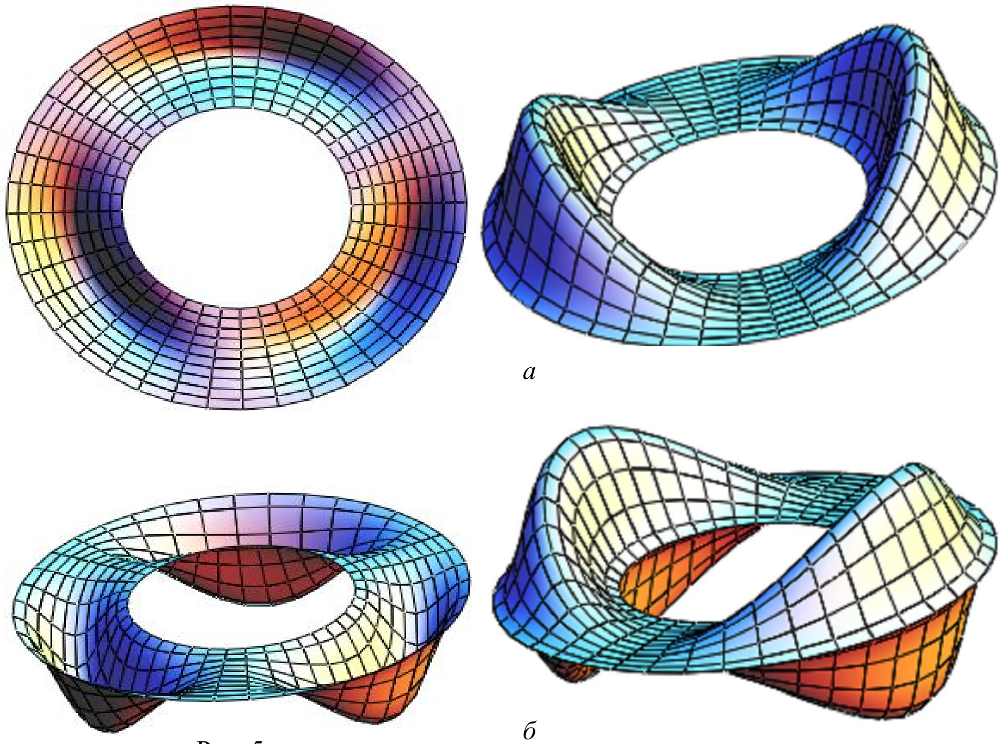
Один фрагмент будет стыковаться с соседним аналогичным фрагментом поверхности вдоль прямых линий, лежащих в горизонтальной плоскости, например, для рис. 3 имеем $n = 4$. На этих прямых окружные синусоиды имеют касательные, которые лежат в горизонтальной плоскости. Касательные к радиальным синусоидам в точках внутреннего и внешнего контуров также будут лежать в горизонтальной плоскости.

Таким образом, получаем параметрические уравнения проектируемой поверхности в виде:

$$x = x(r,\alpha) = r\cos\alpha,$$
$$y = y(r,\alpha) = r\sin\alpha,$$
$$z = z(r,\alpha) = b(\cos n\alpha - 1)\left(\cos\frac{2\pi(r-c)}{R-r_0} - 1\right), \qquad (1)$$

где $r_0 \le r \le R$, $0 \le \alpha \le 2\pi$, $a = (R - r_0)/4$, $r = \text{const}$ – криволинейные координатные линии на поверхности, которые проектируются на горизонтальную плоскость в концентрические окружности (рис. 5).

На рис. 5 показана рассматриваемая поверхность с $n = 3$, $R = 4$ м, $r_0 = 2$ м; $b = 1$ м, $c = 0$. На рис. 6, a поверхность имеет $n = 2$. Из двух полостей одной и той же поверхности можно сформировать замкнутую поверхность, причем контакт будет осуществляться по двум плоским контурным окружностям с радиусами r_0 и R и по прямым линиям (рис. 6, *б*), разделяющим два тождественных фрагмента поверхности (1).



а

б

Рис. 5 Рис. 6

Интересные формы поверхностей получаются, если принять $r_0 = 0$ (рис. 4). На рис. 7 представлена поверхность с $r_0 = 0$, $R = 8$ м; $n = 8$ и $b = 0{,}5$ м. В центральной точке поверхности будет особая точка.

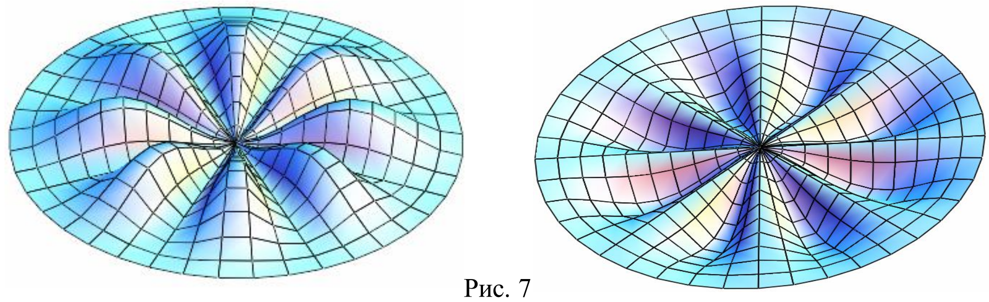


Рис. 7

Велароидальные поверхности в СНГ в отличии от стран Западной Европы и Америки [2 – 4] не пользуются большой популярностью, за исключением параболического велароида, форма которого передана перекрытию «Дарбази» [5, 6]. Это название произошло от названия древнегрузинского перекрытия.

Имея параметрические уравнения поверхности (1) можно вычислить коэффициенты основных квадратичных форм:

$$A^2 = 1 + \left[\frac{2\pi b}{R - r_0}(\cos n\alpha - 1)\sin\frac{2\pi(r - c)}{R - r_0}\right]^2,$$

$$F = \frac{2\pi b^2 n}{R - r_0}(\cos n\alpha - 1)\sin\frac{2\pi(r - c)}{R - r_0}\sin n\alpha \cdot \left[\cos\frac{2\pi(r - c)}{R - r_0} - 1\right],$$

$$B^2 = r^2 + \left[bn\sin n\alpha \cdot \left(\cos\frac{2\pi(r-c)}{R-r_0} - 1 \right) \right]^2,$$

$$L = -\frac{r}{\sqrt{A^2B^2 - F^2}} \frac{4\pi^2 b}{(R-r_0)^2} (\cos n\alpha - 1)\cos\frac{2\pi(r-c)}{R-r_0},$$

$$M = -\frac{bn\sin n\alpha}{\sqrt{A^2B^2 - F^2}} \left[\frac{2\pi r}{R-r_0}\sin\frac{2\pi(r-c)}{R-r_0} - \left(\cos\frac{2\pi(r-c)}{R-r_0} - 1 \right) \right],$$

$$N = \frac{rb}{\sqrt{A^2B^2 - F^2}} \left[n^2\cos n\alpha \cdot \left(\cos\frac{2\pi(r-c)}{R-r_0} - 1 \right) - \frac{2\pi r}{R-r_0}(\cos n\alpha - 1)\sin\frac{2\pi(r-c)}{R-r_0} \right].$$

Довольно сложные выражения основных квадратичных форм рассматриваемой поверхности показывают, что применяется криволинейная неортогональная несопряженная система координат.

Выводы. Следуя наставлениям Э. Торрохи и Ф. Канделлы, необходимо показывать возможности тонкостенных пространственных конструкций оболочечного типа и активизировать интерес к проектированию большепролетных пространственных сооружений, учитывая появление новых материалов, таких как фибробетон и волокнистые армированные полимерные композиты, принимая во внимание скачок в численных методах расчета.

Группа студентов инженерного факультета Российского университета дружбы народов, обучающихся по специальности «Архитектура», заинтересовалась результатами геометрических исследований поверхностей велароидального типа и в рамках студенческого научного общества разрабатывает предложения по применению представленных материалов в ландшафтной архитектуре искусственных и естественных объектов и в конструировании изделий для декора.

Литература

1. *Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л.* Поверхности велароидального типа на кольцевом плане с двумя семействами синусоид// Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: XI Міжн. науково-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання СПГМ-11». – 9-12 червня 2009 р. – Мелітополь, Україна. – С. 29-33.

2. *Mihailescu M., Horvath I.* Velaroidal shells for covering universal industrial halls// Acta techn. Acad. sci. hung. – 1977, 85 (1-2). – P. 135-145.

3. *Hadid H.A.* Analysis of parabolic velaroidal shells with simply supported boundary conditions// J. Struct. Eng.- 1982. – 8, No 4. – P. 111-118.

4. *Friaa Ahmed, Zenzri Hatem.* On funicular shapes in structural analysis and applications// Eur. J. Mech. A. – 1996. – 15, № 5. – P. 901-914 (библ.: 7 назв.).

5. *Штаерман Ю.Я., Бастатский Б.Н.* Изгиб вспарушенной плиты. – М.– Л.: Госэнергоиздат, 1960. – 37 с.

6. *Гогоберидзе Я.А.* Перекрытия «Дарбази». – Тбилиси, «Техника да шрома», 1950. – 278 с.

INVESTIGATION OF SURFACES OF VELAROIDAL TYPE WITH TWO FAMILIES OF SINUSOIDS ON ANNULAR PLAN

S.N. Krivoshapko, S.L. Shambina

Surfaces, limited by two flat concentric circumferences, with both families of coordinate lines in the form of sinusoids are examined in the paper. These surfaces can be attributed to the group of surfaces of velaroidal type. The considering surfaces can find their application in landscape architecture, and also as a model for designed buildings and structures because these surfaces consist of repetitive identical fragments.