

*Численные методы расчета конструкций*

## **РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ В ФОРМЕ ПОЛОГИХ СЕТЧАТЫХ ГИПАРОВ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

С.И. ТРУШИН, *д-р техн. наук, профессор\**

Е.В. СЫСОЕВА, *канд. техн. наук\*\**

Ф.И. ПЕТРЕНКО, *аспирант\**

*\*Национальный исследовательский Московский государственный  
строительный университет,*

*129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; [trushin2006@yandex.ru](mailto:trushin2006@yandex.ru),*

*\*\* Московский государственный академический художественный  
институт имени В.И. Сурикова при Российской академии художеств,  
109004, г. Москва, Товарищеский переулок, д. 30; [sev4279@yandex.ru](mailto:sev4279@yandex.ru)*

*Предложена методика расчета гибких сетчатых оболочек в форме гиперболического параболоида (гипара) при различных граничных условиях. Используются соотношения теории оболочек с учетом геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига. Рассматривается класс конструкций с достаточно густой сеткой ребер, при этом исходная дискретная модель сводится к некоторой континуальной модели с приведенными жесткостными характеристиками. Для решения нелинейной задачи используется метод продолжения решения по параметру, краевая задача решается вариационно-разностным методом. Приведен пример расчета гибкого пологого сетчатого гипара.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сетчатая оболочка, гиперболический параболоид, геометрическая нелинейность, метод продолжения решения по параметру, вариационно-разностный метод.

Пространственные решетчатые покрытия в виде сетчатых оболочек обладают, как известно, рядом существенных достоинств, к числу которых, в первую очередь, можно отнести возможность унификации узлов и стержней, что позволяет автоматизировать процесс их изготовления. Кроме того, конструкции данного типа отличается простота транспортировки стержневых элементов, возможность перекрывать большие пролеты, что связано с особенностями работы оболочечных конструкций, незначительная строительная высота покрытия, функциональная гибкость и архитектурная выразительность. Ряд вопросов, связанных с постановкой задач, разработкой методики и алгоритмов решения, а также результаты расчетов оболочек, в том числе сетчатых, представлены в работах [1-9].

Рассмотрим некоторое семейство ребер, и обозначим через  $\sigma$  и  $\tau$  нормальные и касательные напряжения в них. Представим сетчатую оболочку в виде гладкой однослойной оболочки, отнесенной к декартовым координатам  $x, y, z$ . Для построения физических соотношений в приведенной гладкой оболочке вырежем из нее элемент со сторонами  $ds_1$  и  $ds_2$  (рис.1).

Из условия равновесия прямоугольного элемента со сторонами  $ds_1$  и  $ds_2$  получим следующие соотношения между напряжениями  $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \dots, \tilde{\sigma}_{yz}$  в приведенной оболочке и напряжениями  $\sigma$  и  $\tau$  в ребрах:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= \frac{\delta}{a} \sigma \cos^2 \alpha; \quad \tilde{\sigma}_y = \frac{\delta}{a} \sigma \sin^2 \alpha; \quad \tilde{\sigma}_{xy} = \frac{\delta}{a} \sigma \sin \alpha \cos \alpha; \\ \tilde{\sigma}_{xz} &= \frac{\delta}{a} \tau \cos \alpha; \quad \tilde{\sigma}_{yz} = \frac{\delta}{a} \tau \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a$  – расстояние между ребрами;  $\delta$  – толщина ребер;  $\alpha$  – угол между осью  $x$  и осью ребра (рис. 1).

Если оболочка содержит  $n$  семейств ребер, то соотношения (1) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \delta_j \cos^2 \alpha_j; \\ \tilde{\sigma}_y &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \delta_j \sin^2 \alpha_j; \\ \tilde{\sigma}_{xy} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \delta_j \sin \alpha_j \cos \alpha_j; \\ \tilde{\sigma}_{xz} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \tau_j \delta_j \cos \alpha_j; \quad (2) \\ \tilde{\sigma}_{yz} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \tau_j \delta_j \sin \alpha_j, \end{aligned}$$

где  $n$  – число семейств ребер  $a_j$  – расстояние между ребрами  $j$ -го семейства;  $\delta_j$  – толщина ребер  $j$ -го семейства;  $\alpha_j$  – угол между осью  $x$  и осью ребра  $j$ -го семейства ребер.

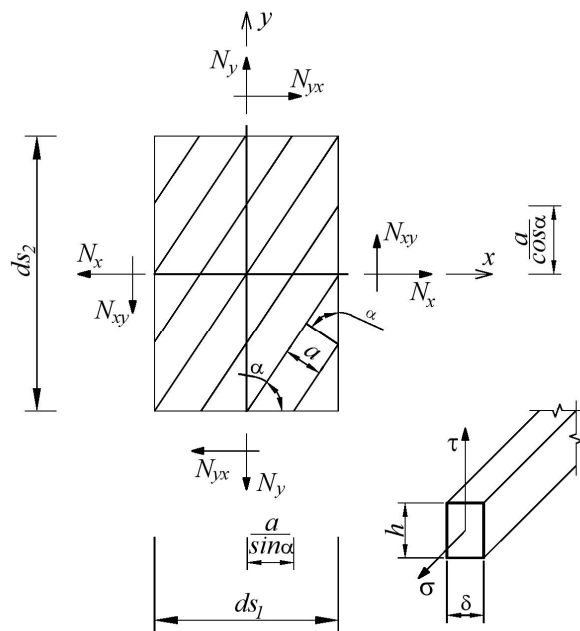


Рис. 1. К построению физических соотношений сетчатой оболочки

Для определения физических соотношений сетчатой оболочки используется метод множителей Лагранжа. Дополнительные условия статической эквивалентности исходной сетчатой структуры и сплошной оболочки вводятся с помощью множителей Лагранжа  $e_x, e_y, \dots, e_{yz}$ , представляющими собой деформации.

Удельная потенциальная энергия деформации слоя ребер единичной высоты определяется по формуле:

$$W_0(\sigma_j, \tau_j) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} \frac{\sigma_j \delta_j}{a_j} \frac{\sigma_j}{E} + \frac{1}{2} \frac{\tau_j \delta_j}{a_j} \frac{\tau_j}{G_j} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_j} \left( \frac{\sigma_j^2 \delta_j}{E_j} + \frac{\tau_j^2 \delta_j}{G_j} \right).$$

Расширенная функция удельной потенциальной энергии, минимизируемая по методу множителей Лагранжа с учетом выражений (2), записывается в виде:

$$\begin{aligned} W(\sigma_j, \tau_j) = & \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_j} \left( \frac{\sigma_j^2 \delta_j}{E_j} + \frac{\tau_j^2 \delta_j}{G_j} \right) + e_x \left( \sigma_x - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \sigma_j \cos^2 \alpha_j \right) + \\ & + e_y \left( \sigma_y - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \sigma_j \sin^2 \alpha_j \right) + e_{xy} \left( \sigma_{xy} - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \sigma_j \sin \alpha_j \cos \alpha_j \right) + \\ & + e_{xz} \left( \sigma_{xz} - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \tau_j \cos \alpha_j \right) + e_{yz} \left( \sigma_{yz} - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{a_j} \tau_j \sin \alpha_j \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $e_x, e_y, \dots, e_{yz}$  - деформации условной сплошной среды (множители Лагранжа);  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \sigma_{yz}$  - напряжения условной сплошной среды.

Из условий экстремума функции (3), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_j &= E_j (e_x \cos^2 \alpha_j + e_y \sin^2 \alpha_j + e_{xy} \sin \alpha_j \cos \alpha_j); \\ \tau_j &= G_j (e_{xz} \cos \alpha_j + e_{yz} \sin \alpha_j). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для  $\sigma_j$  и  $\tau_j$  в формулы (2), будем иметь (знак « $\sim$ » опускается):

$$\sigma_x = A_{11} e_x + A_{12} e_y; \quad \sigma_y = A_{21} e_x + A_{22} e_y; \quad \sigma_{xy} = A_{33} e_{xy}; \quad \sigma_{xz} = A_{44} e_{xz}; \quad \sigma_{yz} = A_{55} e_{yz}. \quad (4)$$

Соотношения (4) соответствуют некоторому ортотропному материалу у которого нагружение вдоль осей ортотропии  $x$  и  $y$  не вызывает сдвиговых деформаций в плоскости  $xOy$ , а касательные напряжения не вызывают удлинений в направлениях осей  $x$  и  $y$ . Жесткостные параметры, входящие в (4), определяются по формулам:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \cos^4 \alpha_j; \quad A_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \sin^4 \alpha_j; \\ A_{12} &= A_{21} = A_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j; \\ A_{44} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} G_j \delta_j \cos^2 \alpha_j; \quad A_{55} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} G_j \delta_j \sin^2 \alpha_j, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_j, G_j$  - модуль упругости и модуль сдвига ребра  $j$ -го семейства.

После интегрирования по толщине с учетом (5) усилия в оболочке запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 N_x &= B_{11}e_x + B_{12}e_y; \quad N_y = B_{21}e_x + B_{22}e_y; \quad N_{xy} = B_{33}e_{xy}; \quad (6) \\
 M_x &= D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y; \quad M_y = D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y; \quad M_{xy} = D_{33}\kappa_{xy}; \quad Q_{xz} = S_1e_{xz}; \quad Q_{yz} = S_2e_{yz}, \\
 \text{где} \quad B_{11} &= \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \cos^4 \alpha_j; \quad B_{12} = B_{21} = B_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j; \\
 B_{22} &= \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^4 \alpha_j; \quad D_{11} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12a_j} \cos^4 \alpha_j; \\
 D_{12} &= D_{21} = D_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12a_j} \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j; \quad (7) \\
 D_{22} &= \sum_{j=1}^n \frac{E_j h_j^3 \delta_j}{12a_j} \sin^4 \alpha_j; \quad S_1 = \sum_{j=1}^n \frac{G_j h_j \delta_j}{a_j} \cos^2 \alpha_j; \quad S_2 = \sum_{j=1}^n \frac{G_j h_j \delta_j}{a_j} \sin^2 \alpha_j.
 \end{aligned}$$

где  $h_j$  – высота ребра  $j$ -го семейства.

Исходные геометрические соотношения, связывающие деформации и перемещения принимаются в виде:

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12} w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\
 \kappa_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \quad e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x; \quad e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y. \quad (8)
 \end{aligned}$$

где  $u$  и  $v$  – тангенциальные составляющие перемещения;  $w$  – нормальная составляющая;  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – углы поворота поперечных сечений оболочки в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$ ;  $k_1, k_2, k_{12}$  – кривизны в направлении координатных осей и кривизна кручения срединной поверхности оболочки. Соотношения (8) построены с учетом деформаций поперечного сдвига, что позволяет, в отличие от модели Кирхгофа-Лява, рассчитывать оболочечные конструкции из материала с низкой сдвиговой жесткостью.

Формулы (6) - (8) используются при построении функционала полной потенциальной энергии теории сетчатых оболочек, который имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x e_x + N_y e_y + N_{xy} e_{xy} + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy} + Q_{xz} e_{xz} + Q_{yz} e_{yz}) d\Omega - \\
 - \iint_{\Omega} (q_x u + q_y v + q_z w + m_x \theta_x + m_y \theta_y) d\Omega = 0,
 \end{aligned}$$

где  $q_x, q_y, \dots, m_y$  – компоненты внешней нагрузки по направлениям соответствующих обобщенных перемещений.

Краевая задача теории оболочек решается вариационно-разностным методом в сочетании с методом продолжения решения по параметру. Для решения нелинейной задачи используются следующие численные методики:

- 1) процедура продолжения решения по длине дуги кривой равновесных состояний в форме Крисфилда и Рикса [6-9];
- 2) процедура пошагового нагружения с уточнением решения на каждом шаге по нагрузке по методу Ньютона-Рафсона [6-9].

Рассмотрим задачи расчёта сетчатых оболочек в форме пологого гипара на прямоугольном плане с квадратной сеткой. Основные геометрические характеристики оболочек (рис. 2): размеры в плане  $l_1 = l_2 = 6$  м; шаг рёбер 1-го и 2-го семейства  $a = 0,2$  м; площадь поперечного сечения рёбер  $S = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ; углы наклона рёбер 1-го семейства к оси  $x$  составляют  $\alpha_1 = 0^\circ$ , углы наклона рёбер 2-го семейства к оси  $x$  составляют  $\alpha_2 = 90^\circ$ . Кривизны оболочки  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $k_{12} = -F/(ab) = -0,03 \text{ м}^{-1}$ . Модуль упругости материала  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

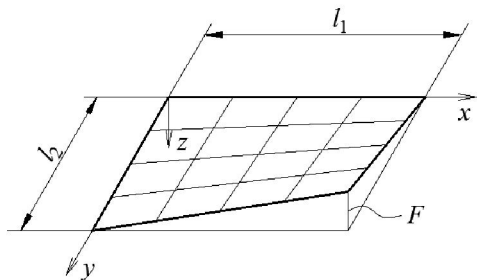


Рис. 2. Пологий сетчатый гипар с квадратной сеткой

Приемлются следующие виды граничных условий и способы нагружения оболочки:

1. Свободное опирание по контуру: при  $x = 0, l_1$  и  $y = 0, l_2$  нормальное перемещение  $w = 0$ . Шаг по нагрузке составляет  $\Delta q = 500 \text{ Па}$ . Общее количество шагов по нагрузке  $m = 3$ .

2. Шарнирно-неподвижное закрепление по контуру: при  $x=0; l_1$  перемещения  $u = v = \theta_y = w = 0$ ; при  $y = 0; l_2$  перемещения  $u = v = \theta_x = w = 0$ . Шаг по нагрузке составляет  $\Delta q = 100 \text{ Па}$ . Общее количество шагов по нагрузке  $m = 50$ .

3. Жёсткое закрепление по контуру: при  $x = 0; l_1$  и  $y = 0; l_2$  перемещения  $u = v = \theta_x = \theta_y = w = 0$ . Шаг по нагрузке составляет  $\Delta q = 100 \text{ Па}$ . Общее количество шагов по нагрузке  $m = 50$ .

График зависимости нормальных перемещений  $w$  в центре оболочки от уровня нагружения, определяемого номером шага  $m$ , для случая шарнирно-неподвижного закрепления по контуру показан на рис. 3.

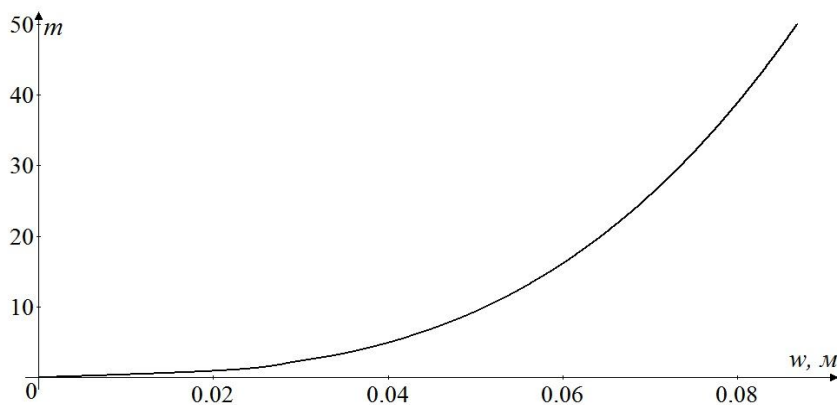


Рис. 3. График зависимости  $w-m$  при шарнирно-неподвижном закреплении оболочки по контуру

Расчет показывает, что при свободном опирании оболочки по контуру зависимость между нормальными перемещениями  $w$  в центре оболочки и уровнем нагружения носит линейный характер, а нормальные и сдвигающие усилия в элементах сетчатой оболочки практически отсутствуют. В качестве основных компонентов напряженного состояния выступают изгибающие моменты и поперечные силы в стержневых элементах, составляющих сетку оболочки.

При шарнирно-неподвижном закреплении оболочки по контуру помимо изгибающих моментов и поперечных сил в работу вступают нормальные усилия. Их роль в общей картине напряженного состояния увеличивается по мере нагружения оболочки.

Изополя нормальных перемещений  $w$  в оболочке при  $m=50$  показаны на рис. 4.

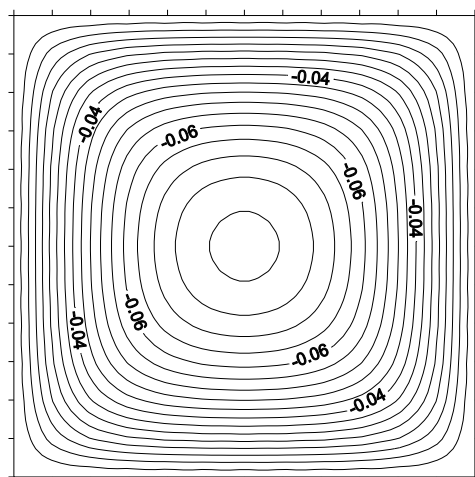


Рис. 4. Изополя нормальных перемещений  $w$  при шарнирно-неподвижном закреплении оболочки по контуру

При жестком закреплении в оболочке имеют место усилия как моментного типа – изгибающие моменты и поперечные силы, так и мембранного типа – нормальные и сдвигающие усилия. В данном случае жесткость оболочки, как и следовало ожидать, в целом больше, чем при шарнирно-неподвижном закреплении ее по контуру.

Представленная выше методика и результаты расчета сетчатых оболочек в геометрически нелинейной постановке как приведенных гладких пространственных систем сравнивались с решениями, полученными с помощью программных комплексов Лира и *Nastran* при аппроксимации сетчатой оболочки стержневыми пространственными элементами. Достаточно хорошая согласованность решений подтверждает достоверность полученных результатов. Следует отметить, что предлагаемая методика и разработанное программное обеспечение, функционирующее в среде *Fortran PowerStation*, позволяют эффективно, с малыми затратами машинного времени и с достаточной степенью точности оценить напряженно-деформированное состояние и устойчивость нелинейно деформируемых сетчатых оболочек.

#### Л и т е р а т у р а

1. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы – М.: РУДН, 2010. – 542 с.
2. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
3. Пшеничников Г.И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
4. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

5. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
6. Crisfield M.A. A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Through” // *Computers & Structures*, 1981, Vol.13, N1, pp.55-62.
7. Трушин С.И. Решение задач устойчивости гибких упругопластических оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. МГСУ. М.: 1999. – 275 с.
8. Трушин С.И., Михайлов А.В. Устойчивость и бифуркации гибких пологих сетчатых оболочек // *Вестник НИЦ Строительство*. – № 2. – 2010. – С. 150-158.
9. Трушин С.И., Сысоева Е.В., Журавлева Т.А. Устойчивость нелинейно деформируемых цилиндрических оболочек из композиционного материала при действии неравномерных нагрузок // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2013. – № 2. – С. 3-10.

#### References

1. Ivanov, V.N., Krivoschapko, S.N. (2010). *Analiticheskie Metodi Rascheta Obolochek Neckanonicheskoi Formi*, Moscow: RUDN, 542 p.
2. Krivoschapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
3. Pshenichnov, G.I. (1982). *Teoria tonchih uprugih setchatih obolochek i plastinoc*. Moscow: Nauka, 352 p.
4. Vasiliev, V.V. (1988). *Mechanica Konstrukcij iz Kompozitnykh Materialov*, Moscow: Mashinostroenie, 272 p.
5. Grigoliuk, E.I., Shalashilin, V.I. (1988). *Problemi Nelineinogo Deformirovania: Metod Prodolzhenia Reshenia po Parametru v Nelineinix Zadachah Mehaniki Tverdogo Deformiruемого Tela*, Moscow: Nauka, 232 p.
6. Crisfield, M.A. (1981). A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Through”, *Computers & Structures*, Vol.13, N1, pp.55-62.
7. Trushin, S.I. (1999). *Reshenie zadach ustoichivosti gibckih uprugoplasticheskix obolochek s uchetom deformatzii poperechnogo sdviga*, Dis. na soisc. uch. step. d-ra tehn. nauk: 05.23.17, MGSU, Moscow, 275 p.
8. Trushin, S. I., Mikhailov, A.V. (2010). Ustoichivost i bifurkazii dibckih pologih setchatih obolochek, *Vestnik NITZ Stroitelstvo*, No 2, p. 150-158.
9. Trushin, S.I., Sysoeva, E.V., Zhuravleva, T.A. (2013). Ustoichivost tzilindricheskix obolochek iz kompozitcionnogo materiala pri deistvii neravnomernih nagruzok, *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstrukcij i Sooruzhenii*, No 2. p. 3-10.

### ANALYSIS OF STRUCTURES IN THE FORM OF A SHALLOW RETICULATED HYPERBOLIC PARABOLOID WITH ACCOUNT OF GEOMETRICAL NONLINEARITY

S.I. TRUSHIN\*, E.V. SYSOEVA\*\*, F.I. PETRENKO\*

\* *Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow;*

\*\* *Moscow State Academic Art Institute Named after V.I. Surikov, Russian Academy of Arts,*

Numerical procedures for nonlinear analysis of flexible reticulated shells in the form of hyperbolic paraboloid are proposed. Geometrical relationships with account of large displacements and shear deformations are used. The discrete model of shell is reduced to continual model with effective rigidities. The finite difference energy method and continuation method are used for analysis of shallow reticulated shells in the form of hyperbolic paraboloid with different types of boundary conditions.

KEYWORDS: reticulated shell, hyperbolic paraboloid, geometric nonlinearity, continuation method, finite difference energy method.