

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ТОНКОЙ  
ОБОЛОЧКИ В ФОРМЕ РЕЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МОНЖА ПО  
БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ И МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО  
ЭЛЕМЕНТА**

Е.Р. ФИЛИПОВА, аспирант

*Российский университет дружбы народов*

*117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6; E-mail: zenjuuu@gmail.com*

*На примере сегодня имеющихся зданий и городов можно отчетливо проследить тенденцию внедрения тонкостенных конструкций в современный мир. Стремительное развитие и, следовательно, применение пространственных конструкций стало возможным благодаря уже существующим теориям расчета, использованию вычислительной техники и вычислительных программ. В данной статье будет рассмотрена применение безмоментной теории и метод конечного элемента на примере резной поверхности Монжа, а так же проведен сравнительный анализ полученных результатов.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** пространственные конструкции, резная поверхность Монжа, тонкостенная оболочка, безмоментная теория расчета, метод конечного элемента.

Существуют различные теории и методы расчета пространственных тонкостенных конструкций: безмоментная теория, теория пологих оболочек, вариационно-разностный метод, метод конечного элемента и др. Каждый способ расчета отличается своими плюсами и минусами, и используется в той или иной ситуации.

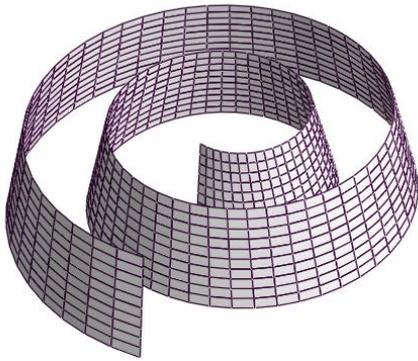


Рис. 1. Резная линейчатая поверхность Монжа с круговой цилиндрической направляющей поверхностью

Резная линейчатая поверхность Монжа с круговой цилиндрической направляющей поверхностью (рис.1)

Безмоментная теория оболочек представляет собой некий упрощенный вариант, в котором пренебрегают влиянием изгибающих и крутящих моментов, а также поперечных сил на напряженно-деформированное состояние в виду их незначительности. Следовательно, напряженное состояние характеризуется лишь нормальными и сдвигающими силами, действующими в плоскостях, касательных к срединной поверхности оболочки (рис.2).

Уравнения безмоментной теории для оболочки со срединной резной поверхностью Монжа с круговой цилиндрической направляющей поверхностью с учетом коэффициентов квадратичных форм [2] будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (A^2 S) + AX &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta} + AY &= 0, \\ \frac{N_\alpha}{R_1} - Z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $N_\alpha$  – нормальное усилие в направлении  $\alpha$ ,  $N_\beta$  – нормальное усилие в направлении  $\beta$ ,  $S$  – сдвигающее усилие,  $X, Y, Z$  – проекции внешней распределенной нагрузки на направления  $\alpha, \beta, \mathbf{n}$ , соответственно;  $A = [a_0 - \alpha + \beta \cos \theta] / a$  – коэффициент Ляме в теории поверхностей,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль поверхности.

Введем новые постоянные [3, 4]:  $m = \frac{a}{\sin(\theta)}$ ;  $C_0 = \frac{\alpha_0}{a}$ ;  $C_1 = -\frac{1}{a}$ ;  $C_2 = \frac{\cos(\theta)}{a}$ .

Интегрируя уравнение (1), получаем:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= mAZ, \quad S = -\frac{1}{A^2} \int_{\beta_0}^{\beta} A \cdot \left( A \cdot X + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \partial \beta + \frac{x1(\alpha)}{A^2}, \\ N_\beta &= -\frac{1}{A} \int_{\beta_0}^{\beta} \left( AY - C_2 N_\alpha + \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) \partial \beta + \frac{x2(\alpha)}{A}. \end{aligned}$$

В данной статье автор хочет рассмотреть 2 метода расчета, а именно: безмоментную теорию, а так же метод конечного элемента с применением современных расчетных комплексов. Прежде чем перейти непосредственно к описанию методов расчета и выводов результатов, вспомним о геометрии рассматриваемой оболочки. Резные поверхности - это класс поверхностей, у которых плоскости одного семейства плоских линий кривизны ортогональны поверхности. Более подробное описание геометрии и способа образования поверхности было рассмотрено в [1]. Расчеты будем вести для резной линейчатой поверхности Монжа с

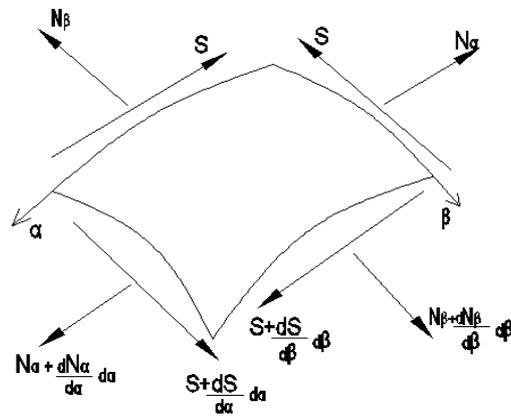


Рис. 2. Внутренние усилия при расчете по безмоментной теории

Примем следующие параметры оболочки:

$$a = 1 \text{ м}; \theta = 5\pi/12; \alpha_0 = 4 \text{ м}; \beta = -6 \dots 0 \text{ м}; \alpha = 0 \dots -4\pi.$$

Рассмотрим случай действия нагрузки в 100 кг/м в направлении прямых образующих  $\beta$  по верхнему кольцу оболочки. Следовательно, на верхней грани будет задано следующее граничное условие:  $N_\beta(\beta = -6) = -100 \text{ кг/м}$ . В данном случае:

$$X = 0; Y = 0; Z = 0.$$

Исходя, из заданных условий имеем следующие результаты:

$$N_\alpha = 0, S = 0, N_\beta = x^2(\alpha)/A.$$

Получим следующие эпюры нормальных усилий в направлении  $\beta$  при  $\alpha = 0$ ;  $\alpha = -2\pi$ ;  $\alpha = -4\pi$  (рис. 3, а, б, в).

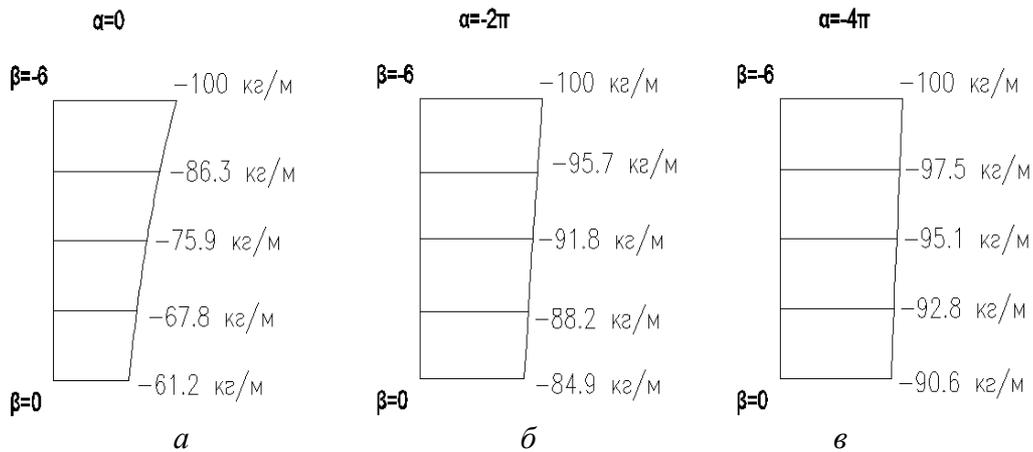


Рис. 3. Эпюры нормальных усилий  $N_\beta$  в направлении  $\beta$

Теперь рассмотрим получившиеся результаты расчета резной оболочки Монжа методом конечного элемента. Для решения поставленной задачи были созданы пространственные расчетные схемы в программном комплексе Лира-Сапр 2013. При расчете использовался метод конечных элементов (h-элементы) в форме метода перемещений. Переход от непрерывной действительной модели конструкций к дискретной расчетной схеме осуществлен разбиением модели на сетку конечных элементов с шагом не более трех толщин элементов, количество степеней свободы у КЭ – шесть (три поворота и три перемещения). Оболочка моделировалась плоскими КЭ (элементы N42 (трехузловые КЭ оболочки) и N44 (четырёхузловые КЭ оболочки)). В отличие от расчета по безмоментной теории тут будут возникать как изгибающие и крутящие моменты, так и поперечные силы (рис. 4).

Для расчета была создана расчетная модель, все параметры принимались такими же, как и при расчете по безмоментной теории, так же вводилась толщина оболочки принятая равной 50мм (рис. 5). Рассмотрим тот же самый вариант загрузки, аналогичный с безмоментной теорией. Для расчета приближенного к реальности в оболочке задавалось жесткое защемление нижнего края.

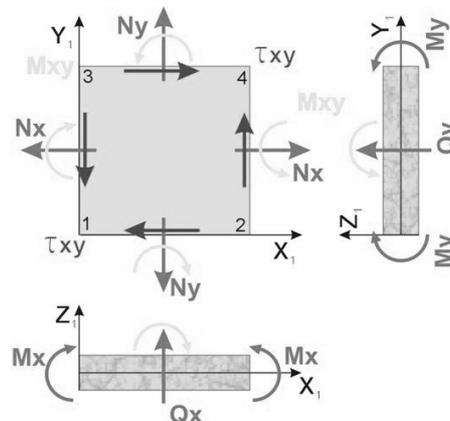


Рис. 4. Усилия в оболочке

Получим изополя внутренних усилий и перемещений оболочки. Для сравнения с безмоментной теорией рассмотрим лишь необходимые нам усилия, а именно нормальные усилия вдоль прямой образующей  $N_y$ , направляющей  $N_x$  и сдвигающие усилия  $S$ . Получим следующие эпюры нормальных усилий в направлении  $y$  при

$$\alpha \cong 0; \alpha = -2\pi; \alpha \cong -4\pi \text{ (рис. 6, а, б, в),}$$

за исключением пиковых краевых участков.

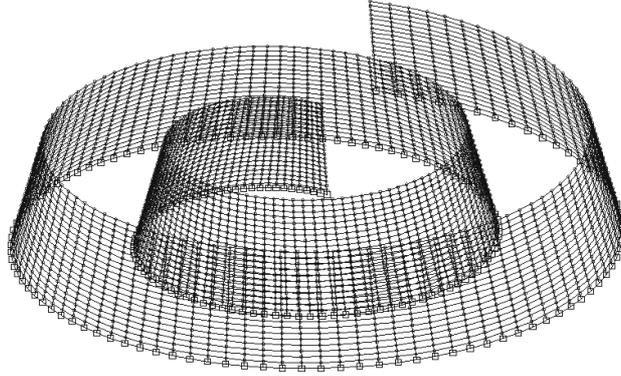


Рис. 5. Расчетная модель оболочки

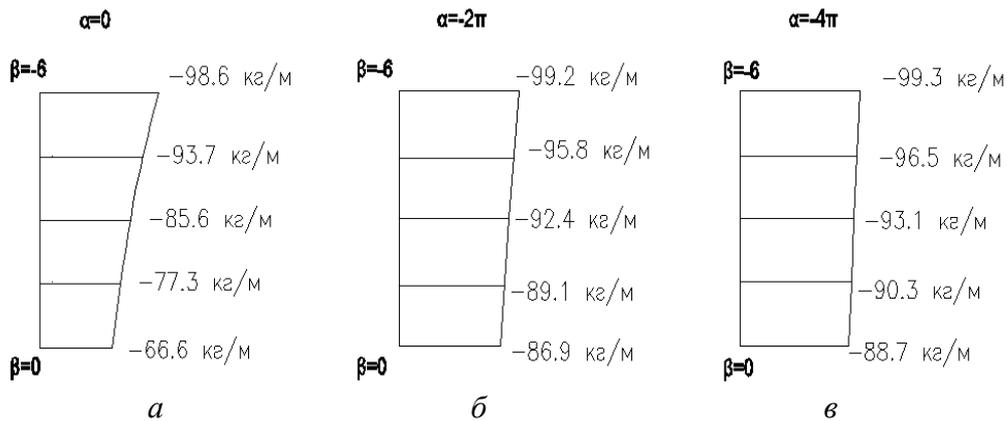


Рис. 6. Эпюры нормальных усилий  $N_\beta = N_y$  в направлении  $y$

По полученным результатам можно отметить следующие закономерности: значение нормальных усилий как по безмоментной теории, так и по методу конечного элемента возрастают у основания оболочки.

Теперь для наглядного анализа проведенных расчетов составим таблицу нормальных усилий  $N_\beta$ ,  $N_\alpha$  и сдвигающих усилий  $S$  по безмоментному методу и методу конечного элемента и вычислим расхождения в результатах (таблица 1).

Как видно в среднем расхождения в результатах нормальных усилий вдоль образующей  $N_\beta$  составляют порядка 2%, что является допустимым. Говоря же о нормальных усилиях  $N_\alpha$  и сдвигающих усилиях  $S$ , которые в безмоментной теории равняются 0, в методе конечного элемента они стремятся к 0 и много меньше остальных усилий полученных в оболочке.

#### Заключение

В статье были приведены результаты полученных расчетов по безмоментной теории, а так же по методу конечного элемента. Был проведен сравнительный анализ данных расчетов и выявлено примерное расхождение. Находящееся расхождение в пределах допустимого говорит о том, что данные расчеты были проведены верно. В

Таблица 1

	$\alpha=0$				$\alpha=-2\pi$				$\alpha=-4\pi$		
$N\beta$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность, %	$N\beta$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность, %	$N\beta$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность, %
$\beta=-6$	-100	-98.6	1.4	$\beta=-6$	-100	-99.2	0.8	$\beta=-6$	-100	-99.35	0.65
$\beta=-4.5$	-86.3	-93.7	8.6	$\beta=-4.5$	-95.7	-95.8	0.1	$\beta=-4.5$	-97.5	-96.55	1.0
$\beta=-3$	-75.9	-85.6	12.8	$\beta=-3$	-91.8	-92.35	0.6	$\beta=-3$	-95.1	-93.15	2.1
$\beta=-1.5$	-67.8	-77.3	14.0	$\beta=-1.5$	-88.2	-89.1	1.0	$\beta=-1.5$	-92.8	-90.3	2.7
$\beta=0$	-61.2	-66.6	8.8	$\beta=0$	-84.9	-86.9	2.4	$\beta=0$	-90.6	-88.7	2.1
$N\alpha$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность	$N\alpha$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность	$N\alpha$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность
$\beta=-6$	0	-5.6	-	$\beta=-6$	0	-3.3	-	$\beta=-6$	0	-17.1	-
$\beta=-4.5$	0	-0.7	-	$\beta=-4.5$	0	-5.3	-	$\beta=-4.5$	0	-10.65	-
$\beta=-3$	0	-0.7	-	$\beta=-3$	0	-0.4	-	$\beta=-3$	0	-0.6	-
$\beta=-1.5$	0	-0.4	-	$\beta=-1.5$	0	-0.3	-	$\beta=-1.5$	0	-2.23	-
$\beta=0$	0	-10.6	-	$\beta=0$	0	-15.6	-	$\beta=0$	0	-16.5	-
$S$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность	$S$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность	$S$	безмомент- ная кг/м	МКЭ кг/м	раз- ность
$\beta=-6$	0	8.6	-	$\beta=-6$	0	12.4	-	$\beta=-6$	0	13	-
$\beta=-4.5$	0	6.7	-	$\beta=-4.5$	0	11.1	-	$\beta=-4.5$	0	14.4	-
$\beta=-3$	0	4.5	-	$\beta=-3$	0	10.4	-	$\beta=-3$	0	14.5	-
$\beta=-1.5$	0	3.2	-	$\beta=-1.5$	0	9.7	-	$\beta=-1.5$	0	13.8	-
$\beta=0$	0	3.9	-	$\beta=0$	0	9.1	-	$\beta=0$	0	11.9	-

дальнейшем автор статьи так же планирует опубликовать материалы расчетов резной оболочки Монжа, рассчитанной по моментной теории аналитическим методом [5], а так же реальных сооружений [6] вариационно-разностным методом [7].

#### Л и т е р а т у р а

1. Филипова Е.Р. Об актуальности применения резных поверхностей Монжа в архитектуре // Строительство и реконструкция. –2015. – №. 6. - С. 91-95.
2. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
3. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы. – М.: Изд-во РУДН, 2010. – 542 с.
4. Филипова Е.Р. К вопросу о геометрии резных оболочек Монжа // Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций: Сб. трудов – М.: Изд-во РУДН, 2014. – С. 132-135.
5. Юханийо Маруланда Арбелаес. Расчет оболочек в форме резных поверхностей Монжа. – Дис. канд. техн. наук. – М.: УДН, 1970. – 154 с.
6. Филипова Е.Р., Гафурова Ю.Ф., Кривошапко С.Н. Архитектурные возможности оболочек в форме резной линейчатой поверхности Монжа// В сб.: Научному прогрессу - творчество молодых. Материалы IX Международной молодежной научной конференции по естественнонаучным и техническим дисциплинам: в 3 частях. – Йошкар-Ола, 2014. – С. 130-132.
7. Трушин С.И. Расчет оболочек в форме резной линейчатой поверхности Монжа с учетом геометрической нелинейности// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2006. - № 2. – С. 42-44.

#### References

1. Filipova, J.R. (2015) About Monge surface usage relevance in the architecture, *Stroitel'stvo i Rekonstrukcija*, № 6, p. 91-95.
2. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
3. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2010). *Analiticheskie Metody Rascheta Obolochek Nekanonicheskoy Formy*, Moscow: Izd-vo RUDN, 542 p.
4. Filipova, J.R. (2014). On Monge surface geometry, Prochnost, Polzuchest i Razrushenie Stroitel'nyh i Mashinostroitel'nyh Materialov i konstrukciy, Sb. Trud., Moscow: RUDN, p. 132-135.
5. Arbelaes, Juxanio Marulanda (1970). *Analysis of Shells in the Form of Ruled Monge surface*, PhD Diss. In technic., Moscow, UDN, 154 p.
6. Filipova, J.R., Gafurova, Yu.F., Krivoshapko, S.N. (2014). Architectural Opportunities of Shells in the Form of Ruled Monge's Surface, Sb.: *Nauchnomu Progressu - Tvorchestvo Molodyh*: Mat. IX Mezhdun. Molodezhnoy Nauchnoy Konferentzii po Estestvennonauchn. i Technich. Distziplinam, 3 Volumes, Yoshkar-Ola, p. 130-132.
7. Trushin, S.I. (2006). An analysis of shells in the form of a curved ruled surface of Monge with taking into account geometrical non-linearity, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 2, pp. 42-44.

### COMPARATIVE ANALYSIS OF THE RESULTS OF CALCULATION OF A THIN SHELL IN THE FORM OF CARVED SURFACE OF MONGE WITH AN APPLICATION OF MEMBRANE (MOMENTLESS) THEORY AND FINITE ELEMENT METHOD

Filipova J.R.

*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow*

On the example of existing buildings, the tendency of integration of thin-walled structures in modern practice can be clearly retraced. The rapid development and the use of spatial structures became possible due to the existing theories of the calculation, using of computers and computer programs. In this paper, the usage of a momentless theory and a finite element method on the example of a carved surface of Monge are considered, as well as a comparative analysis of the results of calculation are presented.

KEY WORDS: space structures, Monge's carved surface, thin-walled shell, moment less theory of shell analysis, finite element method.