

Теория тонких упругих оболочек

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОБОЛОЧКИ В ФОРМЕ ДЛИННОГО ПОЛОГОГО КОСОГО ГЕЛИКОИДА В НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ НЕСОПРЯЖЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ПО МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Е.М. ТУПИКОВА, ассистент

Российский университет дружбы народов,
115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

В статье рассмотрены вопросы расчета тонкой упругой оболочки в форме косого геликоида по различным методикам, описанным в литературе, в частности, по полуаналитическому методу с численным решением трех уравнений равновесия в перемещениях и по аналитическому методу В.Г. Рекача, который так и не был опробован ранее на числах. Разработан еще один вариант вычисления перемещений и деформаций в оболочках в форме косого геликоида, используя расчетные предпосылки технической теории пологих оболочек В.З. Власова в неортогональной несопряженной системе координат. Составлены уравнения в перемещениях, которые решены численным методом.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: косой геликоид, теория пологих оболочек, несопряженная ортогональная система координат, разрешающие уравнения в перемещениях, моментная теория оболочек

Косой геликоид – поверхность, которая наравне с прямым и развертывающимся геликоидом широко применяется в технике. Аналитическое и полуаналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии косого геликоида под различными нагрузками является актуальным на данный момент, несмотря на то, что в современном проектировании конструкций и деталей подавляюще преобладает конечноэлементный анализ. Аналитические методы более явственно отображают физический смысл и исключают возможность неверного результата из-за некорректного построения конечноэлементной сетки, вследствие этого они применяются для проверки результатов, полученных по МКЭ.

В работе В.Г. Рекача [1] приводится методика аналитического решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния оболочки в форме косого геликоида. Численное решение для какого-либо конкретного примера по данной методике нигде в литературе до сих пор не было обнаружено.

В данной статье была поставлена задача проанализировать расчетные предпосылки данной методики следующим образом: сохранив некоторые допущения расчетной модели, провести исследование на числовом примере. Согласно технической теории пологих оболочек В.З. Власова [2], на которую опирается работа [1], в пределах пологости систему криволинейных радиально-кольцевых в плане координат можно приближенно считать ортогональной, а также допускается пренебречь перемещениями вдоль координатных линий u и v , ограничившись лишь перемещениями вдоль оси z . Смешанный метод технической теории оболочек выводится в работе [2] В.З. Власовым для сопряженных систем координат. Поскольку система координат для косого геликоида применяется на практике несопряженная, то дальнейшие допущения В.З. Власова в данном исследовании не анализируются.

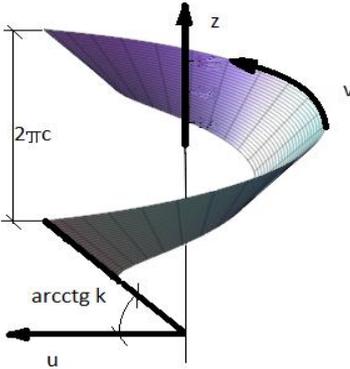
Данное исследование имеет также и самостоятельную ценность безотносительно к методике В.Г. Рекача, поскольку позволяет оценить разницу в трудоемкости реализации и достоверности результатов по сравнению с

анализом напряженно-деформированного состояния косо го геликоида по моментной теории в несопряженной неортогональной системе координат, произведенном в работе [3].

В данной работе параметрические уравнения срединной поверхности косо го геликоида принимаются в виде:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = k u + c v,$$

где k – угловой коэффициент образующей, c – шаг винта. Такие координаты в общем случае являются неортогональными ($F \neq 0$) и несопряженными ($M \neq 0$). Квадратичные формы для рассматриваемой поверхности выражаются следующим образом:



$$A = \sqrt{1 + k^2}, \quad B = \sqrt{u^2 + c^2}, \quad F = kc, \\ L = 0, \quad M = -\frac{c}{\sqrt{A^2 B^2 - F^2}}, \quad N = \frac{c u^2}{\sqrt{A^2 B^2 - F^2}}. \quad (1)$$

Предположим, как это принято в работе [1], что шаг геликоида c значительно мал по сравнению с размерами конструкции в плане, тогда

$$u^2 + c^2 \approx u^2.$$

Предположим также, что в соответствии с принятой теорией пологих оболочек, в пределах пологости эта система координат является ортогональной и примем приближенно $F = kc \approx 0$. С учетом этих двух допущений квадратичные формы принимают более простой вид:

$$A = \sqrt{1 + k^2}, \quad B = u, \quad F = 0, \quad L = 0, \quad M = -\frac{c}{u A}, \quad N = \frac{k u}{A}. \quad (2)$$

Выражения для компонент деформации (3) и уравнения равновесия в перемещениях (4) представлены, таким образом, для ортогональной системы, в которой принято $F = 0$:

компоненты деформации:

$$\varepsilon_u = \frac{\partial}{\partial u} u_u, \quad \varepsilon_v = \frac{u_u}{u A} + \frac{k u_z}{u A}, \quad \varepsilon_{uv} = \frac{\partial}{\partial u} u_v - \frac{2 c u_z}{u^2 A^2} - \frac{u_v}{u A}, \\ \omega_u = \frac{\partial}{\partial u} u_v - \frac{c u_z}{u^2 A^2}, \quad \omega_v = -\frac{u_v}{u A} - \frac{c u_z}{u^2 A^2}, \quad \gamma_u = -\frac{\partial}{\partial u} u_z, \quad \gamma_v = -\frac{c u_u}{u^2 A^2}, \\ \kappa_u = 0, \quad \kappa_v = \frac{\partial}{\partial u} u_z, \quad \kappa_{uv} = \frac{c u_z}{u k A}; \quad (3)$$

уравнения равновесия:

$$\frac{E h u}{(1 - \sigma^2) A} \frac{\partial^2}{\partial u^2} u_u + \frac{E h}{(1 - \sigma^2) A} \frac{\partial}{\partial u} u_u + \frac{E h k \sigma}{(1 - \sigma^2) A} \frac{\partial}{\partial u} u_z - \\ - \frac{E h k}{u(1 - \sigma^2) A} u_z - \frac{E h}{u(1 - \sigma^2) A} \frac{\partial}{\partial u} u_u - u A X = 0, \\ - \frac{E h c}{u(1 + \sigma) A^2} \frac{\partial}{\partial u} u_z + \frac{E h u}{2(1 + \sigma) A} \frac{\partial^2}{\partial u^2} u_v + \frac{E h}{2(1 + \sigma) A} \frac{\partial}{\partial u} u_v + \\ + \frac{E h}{2 u(1 + \sigma) A} \frac{\partial}{\partial u} u_v - \frac{u Y}{A} = 0, \\ - \frac{E h^3 u}{12(1 - \sigma^2) A^3} \frac{\partial^4}{\partial u^4} u_z - \frac{E h^3}{12 u^2(1 - \sigma^2) A^4} \frac{\partial}{\partial u} u_z - \frac{E h^3}{6(1 - \sigma^2) A^4} \frac{\partial^3}{\partial u^3} u_z +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{E h^3}{12 u (1 - \sigma^2) A^4} \frac{\partial^2}{\partial u^2} u_z - \frac{E h k \sigma}{(1 - \sigma^2)} \frac{\partial}{\partial u} u_u + \frac{c h E}{u (1 + \sigma) A^4} \frac{\partial}{\partial u} u_v + \\
 & + \frac{2 E h \left(-\frac{1}{2} k A^2 - c^2 (1 - \sigma) \right)}{u^3 (1 - \sigma^2) A^3} u_z - \frac{E h k \sigma}{u (1 - \sigma^2)} u_u + u A Z = 0, \\
 & Q_u = \frac{1}{12} \frac{E h^3 \left(-u^2 \frac{\partial^3}{\partial u^3} u_z - u \frac{\partial^2}{\partial u^2} u_z + \frac{\partial}{\partial u} u_z \right)}{u^2 (1 - \sigma^2) A^3}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Такие допущения накладывают ограничения и на вид рассчитываемых конструкций. Метод может быть применен, в основном, к строительным конструкциям типа пандуса, у которых шаг винта пренебрежимо мал по сравнению с контурными радиусами, и категорически неприменим к машиностроительным конструкциям с большим шагом винта и сопоставимыми с ним радиусами.

Выразим из первых двух уравнений (4) $\frac{\partial^2}{\partial u^2} u_u$, $\frac{\partial^2}{\partial u^2} u_v$ и $\frac{\partial^4}{\partial u^4} u_z$ из третьего уравнения и преобразуем три уравнения равновесия (4) к каноническому виду системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
 & y' = f(u, y), \\
 & y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_u \\ (u_u)' \\ u_v \\ (u_v)' \\ u_z \\ (u_z)' \\ (u_z)'' \\ (u_z)''' \end{bmatrix}, f(u, y_i) = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ f_1 \\ y_3 \\ f_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_u)' \\ (u_u)'' \\ (u_v)' \\ (u_v)'' \\ (u_z)' \\ (u_z)'' \\ (u_z)''' \\ (u_z)'''' \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f_1 = k_{10} y_0 + k_{11} y_1 + k_{12} y_2 + k_{13} y_3 + k_{14} y_4 + k_{15} y_5 + k_{16} y_6 + k_{1X} X, \\
 & f_3 = k_{30} y_0 + k_{31} y_1 + k_{32} y_2 + k_{33} y_3 + k_{34} y_4 + k_{35} y_5 + k_{36} y_6 + k_{3Y} Y, \\
 & f_7 = k_{70} y_0 + k_{71} y_1 + k_{72} y_2 + k_{73} y_3 + k_{74} y_4 + k_{75} y_5 + k_{76} y_6 + k_{7Z} Z. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнений:

$$\begin{aligned}
 & k_{10} = \frac{1}{u^2}, k_{11} = -\frac{1}{u}, k_{12} = k_{13} = 0, k_{14} = \frac{k}{u^2}, k_{15} = -\frac{\sigma k}{u^2}, k_{16} = 0, k_{17} = 0, \\
 & k_{1X} = -\frac{(1-\sigma^2)(1+k^2)}{Eh}, \\
 & k_{30} = 0, k_{31} = 0, k_{32} = \frac{1}{u^2}, k_{33} = -\frac{1}{u^2}, k_{34} = 0, k_{35} = \frac{2c}{\sqrt{1+k^2}u^2}, k_{36} = 0, \\
 & k_{37} = 0, k_{1X} = -\frac{2(1+\sigma)(1+k^2)}{Eh}, \\
 & k_{70} = -\frac{12k(1+k^2)}{u^2 h^2}, k_{71} = -\frac{12k\sigma(1+k^2)}{u h^2}, k_{72} = -\frac{12c(1-\sigma)\sqrt{1+k^2}}{u^3 h^2}, \\
 & k_{73} = \frac{12c(1-\sigma)\sqrt{1+k^2}}{u^2 h^2}, k_{74} = \frac{24(-\frac{1}{2}(1+k^2)-c^2(1-\sigma))}{u^4 h^2}, k_{75} = -\frac{1}{u^3}, k_{76} = \frac{1}{u^2}, k_{77} = -\frac{2}{u}, \\
 & k_{7Z} = \frac{12(1-\sigma^2)(1+k^2)^2}{E h^3}.
 \end{aligned}$$

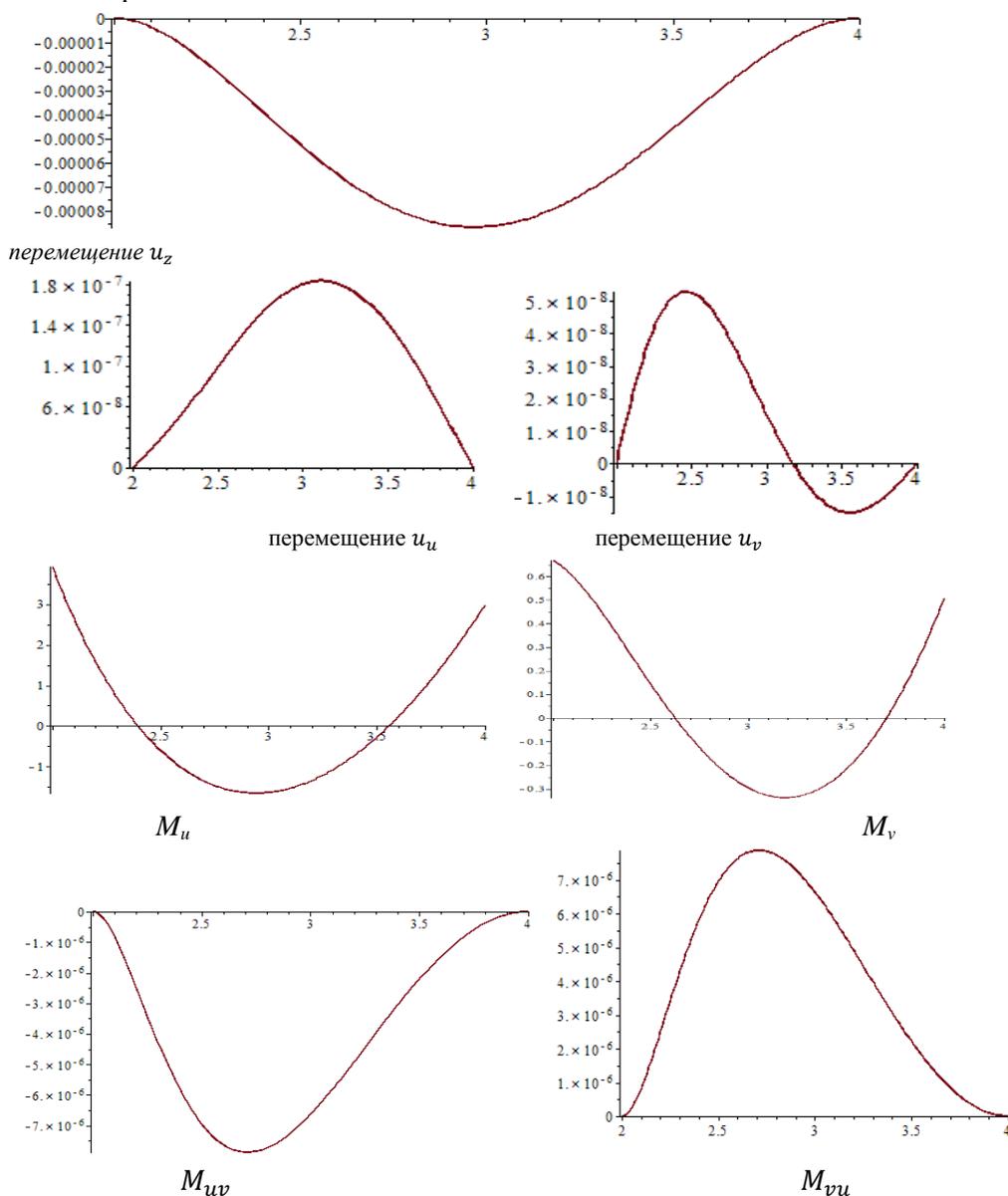
Вертикальная равномерно распределенная нагрузка (типа собственного веса) $p = \text{const}$ раскладывается на составляющие вдоль подвижных осей:

$$X = p \sin(\arctg k), Y = 0, Z = p \cos(\arctg k).$$

Для решения краевой задачи в строительной механике широко применяются методы начальных параметров. Уравнения равновесия в перемещениях могут быть решены численно методом Рунге-Кутты с применением метода ортогональной прогонки, что и было реализовано в данной работе.

Рассмотрим железобетонную оболочку, жестко закрепленную по обоим краям, нагруженную вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Угол наклона образующих $\varphi = 3^\circ$, или, иначе говоря, угловой коэффициент образующей $k = 0.05$, контурные радиусы — $R_1 = 2\text{ м}$, $R_2 = 4\text{ м}$; толщина 12 см, шаг винта направляющей — $0.01 \cdot 2\pi$; характеристики материала: $E = 32500\text{ МПа}$, $\sigma = 0.17$, величина нагрузки $p = 1000\text{ кг/м}^2$. Результат представлен на рис. 2.

Конечноэлементный расчет проводился для фрагмента оболочки, представляющего собой сегмент $0 < \nu < 45^\circ$. Расчеты проводились в программном комплексе ЛИРА 9.6, конечные элементы — четырехугольные, пластинчатые. Полученные результаты показали хорошее совпадение с МКЭ в эпюрах нормальных перемещений u_z , и, соответственно, опосредованно получаемых из них эпюрах моментов и поперечных сил в пределах пологости (угол наклона образующей $\varphi < 10^\circ$). Значения же перемещений u_u и u_v значительно меньше полученных по МКЭ, и соответственно, значения нормальных сил также отличаются на 1-2 порядка.



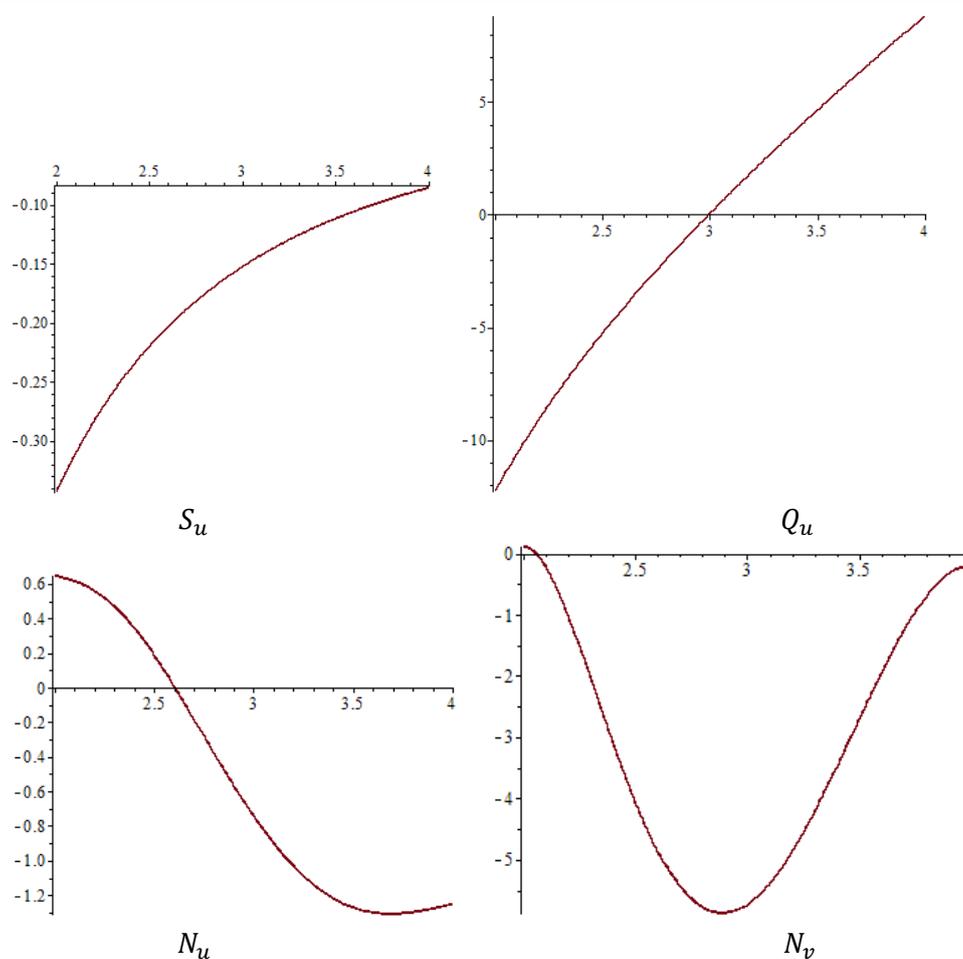


Рис. 2. Эпюры перемещений, изгибающих моментов и силовых факторов, построенные на основании 1-го метода

Таблица 1. Сравнительная таблица результатов при разных углах наклона образующих: метод 1- моментная теория для несопряженной ортогональной системы координат, метод 2- метод конечных элементов.

φ	0	3	5	10	15
максимальное перемещение по оси z метод 1, м	$8,7 \cdot 10^{-5}$	$8,67 \cdot 10^{-5}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$7,83 \cdot 10^{-5}$
то же, метод 2, м	$8,7 \cdot 10^{-5}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$7,4 \cdot 10^{-5}$	$6,6 \cdot 10^{-5}$
максимальные изгибающие моменты M_u метод 1, КН·м/м	в $u = 2$ м/ в средней области 3939/-1659	3929/ -1654	3895/ -1638	3768/ -1574	3562/ -1470
то же, метод 2, КН·м/м	3711/ -1667	3689/ -1656	3639/ -1636	3416/ -1519	3108/ -1374

Такая картина соответствует модели полой оболочки, которая воспринимает только нормальные к ее поверхности нагрузки, и, следовательно, имеет только нормальные перемещения. За пределами пологости наблюдается значительное отличие от результатов МКЭ.

Л и т е р а т у р а

1. Рекач В.Г, Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии: Монография. - М.: Изд-во УДН. 176с., ил.

2. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.:ГТТИ, 1949. – 784 стр., 1988 г. – 784 стр.
3. Тупикова Е.М. Вычисление перемещений и усилий в железобетонных пандусах в форме косоугольного геликоида// Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 4. – С.24-28.
4. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография. – М.: РУДН, 2010 г. – 542 с.ил.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. – М.:ГТТИ, 1953. – 544 с.
6. Тупикова Е.М. Расчет тонких упругих оболочек в форме длинного косоугольного геликоида// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №3. – С.24-28.

References

- 1.Rekach, V.G., Krivoshapko, S.N. (1988). *Raschet Obolochek Slozhnoj Geometrii: Monographia*, Moscow: Izd-vo UDN, 176 p.
2. Vlasov, V.Z. (1949). *Obschaja Teorija Obolochek i Eje Prilozhenija v Tehnike*, M.:GTTI, 784p.
- 3.Tupikova, E.M. (2015). Calculation of displacements and forces in reinforced concrete ramps in the form of oblique helicoid, *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, №4, p.24-28.
- 4.Ivanov, V.N., Krivoshapko, S.N. (2010). *Analiticheskie Metody Rascheta Obolochek Nekanonicheskoj Formy: Monographia*, Moscow, RUDN,542 p.
- 5.Gol'denveizer, A.L. (1953). *Teorija Tonkih Uprugih Obolochek*, Moscow:GTTI, 544 p.
- 6.Tupikova, E.M. (2015). Analysis of the thin elastic shells of long oblique helicoid form, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, №3, p.24-28.

SEMI-ANALYTICAL ANALYSIS OF A LONG SHALLOW OBLIQUE HELICOIDAL SHELL IN A NON-ORTHOGONAL NON-CONJUGATE COORDINATE SYSTEM

Tupikova E.M.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

The article discusses the problems of analysis of thin shallow shell in the form of oblique helicoid by different methods, particularly, by a semi-analytical method of numerical solution of three equilibrium equations in displacements and by V.G.Rekach's analytical method, which was not numerically applied in any literature. New variant of analysis of stress-strain state of oblique helicoid shells was developed by applying V.Z. Vlasov's shallow shell theory. The equilibrium equations were obtained for three unknown displacements and after the numerical solution was used.

Keywords: oblique helicoid, theory of shallow shells, non-conjugate orthogonal coordinate system, resulting equations in displacements, bending shell theory.



СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ В ФОРМЕ РЕЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МОНЖА ПО БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ И МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Е.Р. ФИЛИПОВА, аспирант

Российский университет дружбы народов

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6; E-mail: zenjuuu@gmail.com

На примере сегодня имеющихся зданий и городов можно отчетливо проследить тенденцию внедрения тонкостенных конструкций в современный мир. Стремительное развитие и, следовательно, применение пространственных конструкций стало возможным благодаря уже существующим теориям расчета, использованию вычислительной техники и вычислительных программ. В данной статье будет рассмотрено применение безмоментной теории и метод конечного элемента на примере резной поверхности Монжа, а так же проведен сравнительный анализ полученных результатов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пространственные конструкции, резная поверхность Монжа, тонкостенная оболочка, безмоментная теория расчета, метод конечного элемента.