

Геометрия срединных поверхностей оболочек

ГЕОМЕТРИЯ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С СЕМЕЙСТВОМ ПЛОСКИХ КООРДИНАТНЫХ ЛИНИЙ

В.Н. ИВАНОВ, докт. техн. наук, профессор
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН
Тел. (495) 955-09-78

Нормальными поверхностями с системой плоских координатных линий, или просто нормальными поверхностями называются поверхности, образуемые плоской трансформирующейся кривой, движущейся в нормальной плоскости направляющей кривой. Любую поверхность можно представить в виде последовательного каркаса сечений нормальными плоскостями произвольной кривой, принятой за направляющую. Однако во многих случаях такой подход не рационален. Например, для поверхности вращения принимать за направляющую кривую нормальной поверхности меридиан поверхности вращения не целесообразно, так как в нормальных сечениях будут получаться сложные кривые. Можно и для произвольной поверхности с системой плоских координатных линий провести кривую, нормальную к плоскостям линий и принять ее за направляющую кривую, но это обратная задача. К известным нормальным поверхностям относятся поверхности вращения – направляющая прямая линия и резные поверхности Монжа – образующая кривая в процессе движения остается неизменной.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нормальные поверхности, направляющая кривая, образующая кривая, нормальная плоскость кривой.

В работах [1, 2] рассматривались поверхности с системой плоских координатных линий общего вида, когда плоскость плоских координатных линий в каждой точке направляющей кривой определяется функцией нормали этой плоскости. В работе [1] приводится векторное уравнение поверхности с системой плоских координатных линий, получены формулы коэффициентов основных квадратичных форм. В работе [2] получены условия, при которых система плоских координатных линий является системой линий главных кривизн поверхности. Рассмотрены подклассы поверхностей с системой плоских координатных линий, в том числе резные поверхности Монжа и нормальные поверхности. Примером поверхностей с системой плоских координатных линий, не лежащих в нормальной плоскости направляющей линии могут служить поверхности с системой плоских координатных линий в плоскостях пучка [3], подклассом которых являются поверхности Иоахимсталя [4].

Векторное уравнение нормальной поверхности получаем в виде

$$\rho(u, v) = r(u) + R(u, v)e(u, v), \quad (1)$$

где $\rho(u, v)$ – радиус-вектор поверхности; $r(u)$ – радиус вектор направляющей кривой; $R(u, v)$ – уравнение образующей кривой в местной полярной системе координат $e_0(u), g_0(u)$ в нормальной плоскости направляющей кривой;

$e(u, v) = e_0(u) \cos v + g_0(u) \sin v$ – уравнение окружности единичного радиуса в нормальной плоскости направляющей кривой; $e_0(u) = v \cos \theta(u) + \beta \sin \theta(u)$; $\theta(u)$ – функция, определяющая поворот координатной системы образующей кривой относительно нормали v и бинормали β направляющей кривой; $g_0(u)$ – вектор перпендикулярный вектору $e_0(u)$ в нормальной плоскости направляющей кривой – $g_0(u) = -v \sin \theta(u) + \beta \cos \theta(u)$.

Полярная система координат для описания образующей кривой удобна при проведении исследования свойств поверхности, в частности при выводе формул коэффициентов квадратичных форм. Если образующая кривая описывается параметрическими уравнениями $x = x_i(u, v)$; $y = y_i(u, v)$, то уравнение нормальной поверхности получаем в виде

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{r}(u) + x_o(u, v)\mathbf{e}_o(u, v) + y_o(u, v)\mathbf{g}_o(u, v). \quad (2)$$

Коэффициенты квадратичных форм нормальных поверхностей определяются по формулам [1, 2]:

А. Коэффициенты 1-й квадратичной формы:

$$\begin{aligned} E = (\mathbf{p}_u \mathbf{p}_u) &= T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2; & G = (\mathbf{p}_v \mathbf{p}_v) &= T_{21}^2 + T_{22}^2 = R^2 + \dot{R}^2; \\ F = (\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v) &= T_{11} \cdot T_{21} + T_{12} \cdot T_{22}. \end{aligned} \quad (3)$$

Б. Дискриминант поверхности

$$\Sigma^2 = EG - F^2 = |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|^2 = G \cdot T_{13}^2 + d_{12}^2; \quad d_{12} = T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21}; \quad (4)$$

В. Вектор единичной нормали к поверхности

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|} = \frac{(-T_{22}\mathbf{e} + T_{21}\mathbf{g}) \cdot T_{13} + d_{12}\boldsymbol{\tau}}{\Sigma}. \quad (5)$$

Г. Коэффициенты 2-й квадратичной формы

$$\begin{aligned} L = (\mathbf{p}_u \mathbf{m}) &= \frac{(T_{21}T_{32} - T_{22}T_{31}) \cdot T_{13} + d_{12}T_{33}}{\Sigma}; \\ M = (\mathbf{p}_{uv} \mathbf{m}) &= \frac{(T_{21}T_{42} - T_{22}T_{41}) \cdot T_{13} + d_{12}T_{43}}{\Sigma} = \frac{[G(\bar{e}'_0 \mathbf{g}_0) - \phi_2]T_{13} + d_{12}T_{43}}{\Sigma}; \\ N = (\mathbf{p}_{vv} \mathbf{m}) &= \frac{(T_{21}T_{52} - T_{22}T_{51})T_{13}}{\Sigma} = \frac{(G - \phi_1)T_{13}}{\Sigma}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (R\ddot{R} - \dot{R}^2); & \phi_2 &= R\dot{R}' - \dot{R}R', & T_{11} &= R', & T_{12} &= R(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0); & T_{13} &= s' - Rk_s(\mathbf{e}\mathbf{v}); \\ T_{21} &= \dot{R}; & T_{22} &= R; & T_{31} &= s'k_s(\mathbf{e}\mathbf{v}) - R[(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0)^2 + k_s^2(\mathbf{e}\mathbf{v})^2] + R''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{32} &= s'k_s(\mathbf{g}\mathbf{v}) + 2R'(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0) + R\{(\mathbf{e}''_0 \mathbf{g}_0) + k_s^2[(\mathbf{e}_0 \mathbf{v})(\mathbf{g}_0 \mathbf{v}) - (\mathbf{e}\mathbf{v})(\mathbf{g}\mathbf{v})]\}; \\ T_{33} &= s'' - 2k_s R'(\mathbf{e}\mathbf{v}) - R[k'_s(\mathbf{e}\mathbf{v}) + k_s \chi_s(\mathbf{e}\boldsymbol{\beta}) + 2k_s(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0)(\mathbf{g}\mathbf{v})]; & T_{41} &= \dot{R}' - R(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0); \\ T_{42} &= R' + \dot{R}(\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0); & T_{43} &= -k_s[R(\mathbf{g}\mathbf{v}) + \dot{R}(\mathbf{e}\mathbf{v})]; & T_{51} &= \ddot{R} - R; & T_{52} &= 2\dot{R}. \end{aligned}$$

Здесь f' , \dot{f} обозначены производные функции по u и v соответственно; k , χ - кривизна и кручение направляющей кривой; $k_s = s' \cdot k$; $\chi_s = s' \chi$; $s' = |\mathbf{r}'| = |d\mathbf{r}/du|$; $\boldsymbol{\tau}$ - вектор касательной направляющей кривой.

Введение функции $\theta(u)$ позволяет разнообразить виды нормальных поверхностей за счет кручения образующей кривой в нормальной плоскости направляющей кривой. Нормальные поверхности с заданной произвольной функцией $\theta(u)$ можно выделить в подкласс закрученных нормальных поверхностей. Эту функцию можно использовать также для придания поверхности каких-либо геометрических свойств.

Для резных поверхностей Монжа - нормальные поверхности с образующей кривой неизменной формы, в случае пространственной направляющей кривой образующая кривая в нормальной плоскости направляющей кривой вращается относительно нормали направляющей кривой [1, 2, 5, 6]

$$\theta(u) = -\int s' \chi du + \theta_0, \quad (3)$$

где $s' = |\dot{r}(u)|$, χ – кривизна кручения направляющей кривой. Только в этом случае образующая кривая является линией кривизны поверхности, а образованная поверхность – резной поверхностью. Для нормальных циклических поверхностей с пространственной направляющей кривой, для получения ортогональной поверхностной координатной системы, функция $\theta(u)$ также определяется формулой (3).

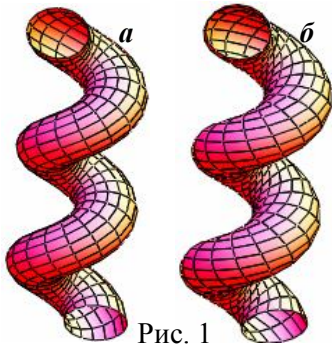


Рис. 1

На рис. 1 приведены чертежи винтовой трубчатой поверхности (циклическая нормальная поверхность постоянного радиуса с линией центров – винтовой линией) : рис 2, а – функция $\theta(u)$ определена по формуле (3) – ортогональная поверхностная система координат; рис 2, б – $\theta(u)=0$ – неортогональная система координат. Отметим, что трубчатая поверхность является циклической резной поверхностью.

Приведем примеры некоторых нормальных поверхностей. При построении поверхностей в системе MathCad используем непосредственно векторные уравнения поверхностей [7].

На рис. 2 направляющей нормальных поверхностей является синусоида $x_u = u$; $z_l = a \sin(u)$; $a=1$; $0 \leq u \leq 2\pi$, образующей кривой – трансформируемый эллипс. $x_o = c(u) \cos v$; $y_o = \vartheta(u) \sin v$; $0 \leq v \leq 2\pi$.

На рис. 2 направляющей нормальных поверхностей является синусоида $x_u = u$; $z_l = a \sin(u)$; $a=1$; $0 \leq u \leq 2\pi$, образующей кривой – трансформируемый эллипс. $x_o = c(u) \cos v$; $y_o = \vartheta(u) \sin v$; $0 \leq v \leq 2\pi$.

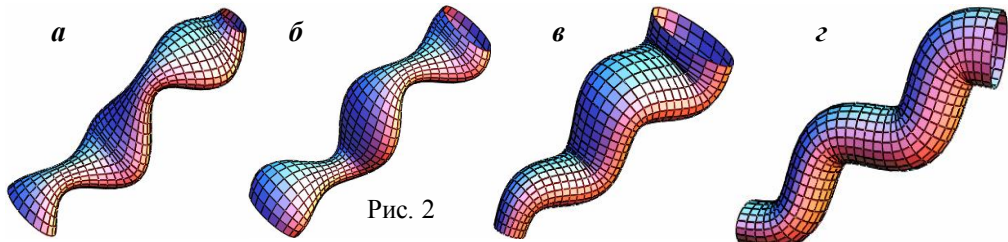


Рис. 2

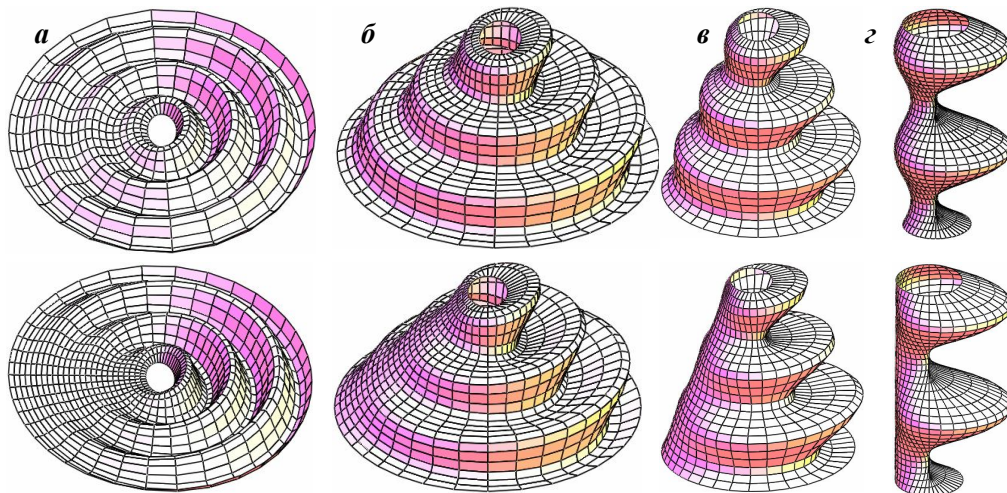


Рис. 3

На рис. 2, а – $c(u) = c_0 + c_1 \sin u$; $d(u) = d_0 + d_1 \sin u$, на рис. 2, б – $c(u) = c_0 + c_1 \cos u$; $d(u) = d_0 + d_1 \cos u$; $c_0 = 0,8$; $d_0 = 0,5$; $c_1 = 0,4$; на рис. 2, в, г – $c(u) = c_0 + c_1 u$; $c_0 = 1,5$; $d(u) = d_0 + d_1 u$; $d_0 = 0,8$; на рис. 2, в – $c_1 = 0,1$; $d_1 = 0,05$; на рис. 2, г – $c_1 = -0,05$; $d_1 = 0,05$.

Примем за направляющую кривую эллипс, а за образующую кривую синусоиду с переменной амплитудой $y_o = c(u) \sin v$. Ось синусоиды может иметь различный угол наклона относительно плоскости эллипса $\theta = \theta_0 = const$. На рис. 3 представлены эллипсоидально-синусоидальные нормальные поверхности $c(u) = c_0 + t \sin(u)$, $c_0 = 1,5$; полуоси направляющего эллипса $a = 3$; $b = 2$. На рис. 3, *a* $\theta_0 = 0$; рис. 3, *б* $\theta_0 = -\pi/4$; рис. 3, *в* $\theta_0 = -0,375\pi$; рис. 3, *г* $\theta_0 = -\pi/2$. В верхнем ряду поверхности с градиентом изменения амплитуды синусоиды $t = 1$, в нижнем $t = 1,5$. Если градиент равен амплитуде, то при $u = 1,5\pi$ $a(\pi/2) = 0$ - синусоида вырождается в прямую, что и наблюдается в рисунках нижнего ряда.

В процессе движения образующей кривой в нормальной плоскости направляющей кривой образующая кривая может вращаться. На рис. 4. представлены закрученные эллипсоидально-синусоидальные нормальные поверхности с параметрами соответствующими предыдущему примеру при $c_0 = t = 1,5$. Вращение образующей синусоиды определялось функцией $\theta(u) = \theta_0 + pu$; $t = 0,3$. Начальный угол: *a* $\theta_0 = 0$; *б* $\theta_0 = -\pi/4$; *в* $\theta_0 = -0,375\pi$; *г* $\theta_0 = \pi/2$;

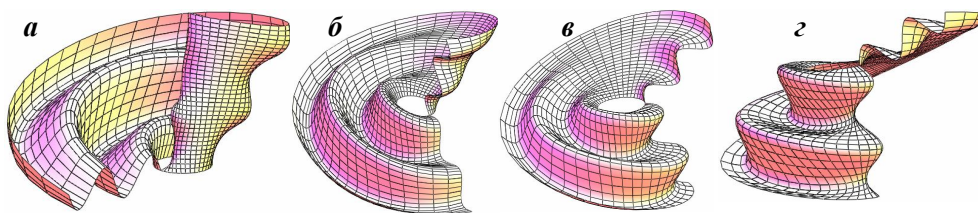


Рис. 4

На рис. 3, 4 в процессе движения образующей синусоиды в нормальной плоскости эллипса изменялась амплитуда синусоиды. Рассмотрим процесс формообразования поверхности при изменении длины полуволны синусоиды $x_o = d(u)v$; $y_o = c(u) \sin v$; $c(u) = c_0 + tu$; $d(u) = d_0 + ku$ (рис. 5).

Параметры направляющего эллипса соответствуют предыдущему примеру; $c_0 = 0,25$; $d_0 = 1$; $k = 0,5$. На рис. 5, *a* синусоида с неизменной амплитудой $t = 0$, ось синусоиды в плоскости эллипса $\theta_0 = 0$. На остальных рисунках синусоида с переменной амплитудой $t = 0,3$. На рис. 5, *б* ось синусоиды в плоскости эллипса. На рис. 5, *в* ось синусоиды имеет угол с плоскостью синусоиды $\theta_0 = -\pi/4$; . На рис. 5, *г* $\theta_0 = -0,375\pi$. На рис. 5, *в, г, з* - синусоида вращается в нормальной плос-

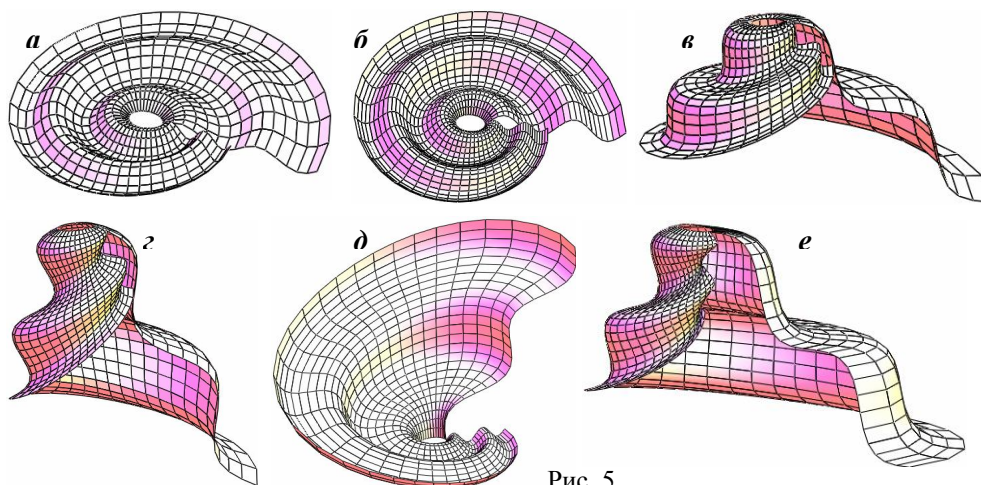


Рис. 5

кости эллипса $\theta(u) = \theta_0 + pu$; $p = 0,05\pi$. На рис. 5,д начальная синусоида в плоскости эллипса $\theta_0 = 0$, на рис. 5,е – начальная синусоида перпендикулярна плоскости эллипса $\theta_0 = -\pi/2$.

Рассмотрим нормальные поверхности с образующими кривыми в форме эпи и гипоциклоид. Эпициклоиды (гипоциклоиды) – кривые, образуемые точкой окружности, катящейся по неподвижной окружности: эпициклоида – катящаяся окружность вне неподвижной окружности, гипоциклоида – внутри неподвижной окружности [8].

Для эпициклоиды радиус подвижной окружности может быть меньше, больше или равным радиусу неподвижной окружности. Для гипоциклоиды радиус подвижной окружности должен быть меньше радиуса неподвижной окружности. Если отношение радиуса неподвижной окружности (d) к радиусу подвижной окружности (c) $\lambda = d/c$ – целое число, то кривые получаются замкнутые, состоящие из p однотипных ветвей кривые. Если p не является целым числом, то при полном обкате неподвижной окружности получаем незамкнутую кривую. Если при некотором целом k имеем $\lambda \cdot k$ – целое число, то получаем замкнутую кривую с пересекающимися ветвями при k обкатах неподвижной окружности. При $\lambda = 2$ гипоциклоида вырождается в прямую – диаметр неподвижной окружности.

Параметрические уравнения эпи- и гипоциклоид имеют вид:

$$x_0(v) = (d + pc)\cos(v) - pc \cos\left(\frac{d + pc}{c}v\right); \quad y_0(v) = (d + pc)\sin(v) + pc \sin\left(\frac{d + pc}{c}v\right). \quad (3)$$

При $p=1$ получаем эпициклоиду, при $p=-1$ – гипоциклоиду. Если при $p = -1$ принять радиус подвижной окружности больше радиуса неподвижной окружности, то неподвижная окружность остается внутри подвижной окружности и получаемая кривая будет эпициклоидой.

На рис. 6 приведены нормальные поверхности с направляющей синусоидой ($-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$), $a = 1$ и образующими эпициклоидами с отношением радиусов неподвижной и подвижной окружностей целым числом: а) $\lambda = 1$; б) $\lambda = 2$; в) $\lambda = 5$. Радиусы окружностей изменялись при движении образующей окружности $c(u) = c_0(1 + u/u_0)$; $d(u) = d_0(1 + u/u_0)$; $u_0 = \pi/2$; а) $c_0 = 0,2$; б) $c_0 = 0,3$; в) $c_0 = 0,5$; $d_0 = c_0/\lambda$. В нижнем ряду приведены скрученные нормальные поверхности с параметрами, соответствующими верхнему ряду $\theta(u) = tu$; $t = 2$.

На рис. 7 приведены нормальные поверхности с направляющей синусоидой ($-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$) и образующими гипоциклоидами с целым отношением радиусов неподвижной и подвижной окружностей: $c(u) = c_0(1 - |u|/u_0)$; $d(u) = d_0(1 - |u|/u_0)$;

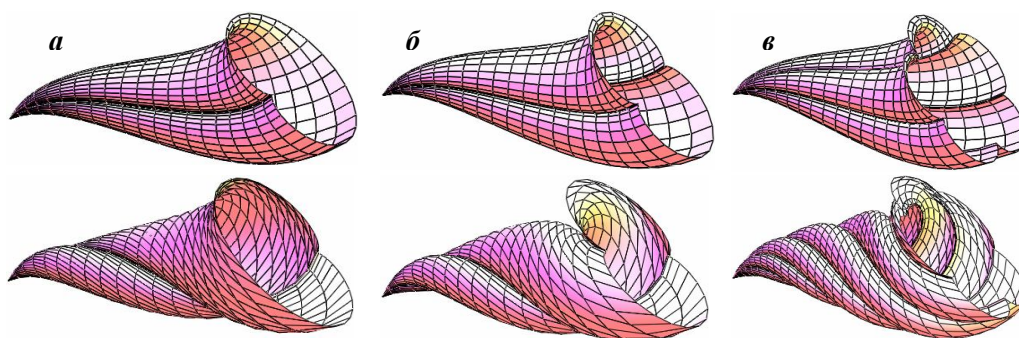


Рис. 6

мальных поверхностей, приводится общее векторное уравнение поверхностей, приводятся уравнения и рисунки некоторые видов поверхностей. Для построения рисунков в системе MathCad используется матричная форма записи уравнений поверхности. В работе класс поверхностей с системой плоских координатных линий в нормальной плоскости направляющей кривой назван каналовыми поверхностями. Конечно, исследуя поверхности, автор имеет право давать поверхностям или классу поверхностей название. Названия одних поверхностей отражают их свойства: поверхности вращения, цилиндрические, конические, минимальные поверхности, поверхности второго порядка. Другие поверхности получили имена авторов исследовавших эти поверхности: поверхности Иоахимстала, циклиды Дюпена, резные поверхности Монжа, поверхности Гурса и др.

В «Энциклопедии аналитических поверхностей» [10] приведено более 500 поверхностей (даны уравнения, формулы коэффициентов квадратичных форм, рисунки поверхностей), включающих 38 классов поверхностей. В работах [11, 12, 13] приведена классификация циклических поверхностей. Классификации даны в виде таблиц-диаграмм, отражающих разветвленную сеть подклассов и видов поверхностей. Часто классы поверхностей могут включать в качестве подклассов классы или подклассы других поверхностей. Так поверхности вращения входят в класс циклических поверхностей, в тоже время они относятся к классу нормальных поверхностей, являются резными поверхностями, каналовыми поверхностями Иоахимстала.

Давая наименование исследуемому классу поверхностей, необходимо учитывать, имеется ли в классической литературе аналогичное название какого либо класса поверхностей. В определении В.И. Шуликовского [4] *каналовой называется поверхность, одно семейство линий кривизны которой состоит из окружностей*. Доказывается, что такая поверхность является огибающей однопараметрического семейства сфер. В определении А.П. Нордена [5] *каналовыми поверхностями называются огибающие однопараметрического семейства сфер*. Доказывается, что семейство образующих окружностей каналовой поверхности является семейством линий главных кривизн. Центры образующих окружностей лежат на касательных к линии центров семейства сфер, перпендикулярны касательным, и, следовательно, плоскости окружностей, в общем случае, не перпендикулярны к линии центров этих окружностей. Аналогичное определение каналовых поверхностей дано у Рашевского П.К. [14]. Очевидно, эти два определения каналовых поверхностей являются эквивалентными. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен в книге «Наглядная геометрия» [15] о поверхностях, являющихся огибающими семейства сфер, пишут: «Наиболее общие поверхности этого рода суть *поверхности каналов*», т.е. каналовые поверхности.

В то же время нужно отметить, что в литературе имеются и альтернативные определения каналовых поверхностей. В монографии В.Ф. Кагана [16] дается следующее определение каналовых поверхностей: *каналовые поверхности образуются движением окружности переменного радиуса, при этом окружности лежат в нормальных плоскостях линии центров этих окружностей*. Автор монографии утверждает (без доказательства), что образующие окружности являются линиями кривизны поверхности. В монографии Кагана, на основании определения делается вывод, что образующие окружности каналовой поверхности (по определению Кагана В.Ф) являются геодезическими линиями. Но это уже явная ошибка. Из теории геодезических линий поверхности следует, что нормали к геодезическим линиям поверхности совпадают с нормальными к поверхности. Но, например, образующие окружности поверхностей вращения (ко-

торые подходят под данное определение), как известно, не являются геодезическими, так как их главные нормали (лежат в плоскости окружности) не совпадают с нормальными к поверхности, ортогональными к меридианам поверхности.

Определение каналовых поверхностей, аналогичное определению В.Ф. Казана, принято в работах [17, 18]. В этих работах для поверхностей с плоской линией центров получены коэффициенты квадратичных форм. Говорится, что коэффициенты F и M , якобы, равны нулю, и, следовательно, координатная сеть является ортогональной и сопряженной, окружности являются линиями кривизны. Авторы работ пользовались скалярными уравнениями поверхности, что привело к громоздким выкладкам, и не дало возможности внимательно проанализировать полученные формулы. На самом деле при внимательном анализе полученных авторами формул, как показано в работе [19], лишь коэффициент $F = 0$ (координатная сеть ортогональна), коэффициент M оказывается не равным нулю (сеть не сопряженная), следовательно, ни одно семейство координатных линий не является линиями кривизны нормальной циклической поверхности общего вида. В работе [18] дается и другое, расширенное определение каналовых поверхностей. К каналовым поверхностям относят поверхности, образованные движением окружности переменного радиуса, лежащей в нормальной плоскости произвольной направляющей кривой (не совпадающей с линией центров окружностей). Данное определение справедливо для трубчатых поверхностей – циклическим поверхностям постоянного радиуса, являющимися циклическими поверхностями Монжа. Для циклических поверхностей с произвольно изменяющимся радиусом образующих окружностей эти два определения в большинстве случаев противоречат друг другу. Например, для поверхности вращения (каналовой поверхности) образующие окружности лежат в нормальных плоскостях линии центров (прямой линии), но не ортогональны меридианам (линии вращения). Если в качестве определения каналовых поверхностей принять определение, данное в работах [16-18], то следует отказаться от вывода, что образующие окружности являются линиями главных кривизн нормальной циклической поверхности. В работе [20] показано, что образующие окружности циклических поверхностей, лежащие в нормальной плоскости линии центров, являются линиями кривизны только для двух частных случаев: поверхности вращения – линия центров прямая линия; трубчатые поверхности – образующие окружности постоянного радиуса.

Кроме того, можно привести еще один довод против определения каналовых поверхностей, принятое в работах [16, 18]. В геометрической литературе общепринято называть циклиды Дюпена (поверхности с двумя семействами окружностей, являющихся линиями кривизны) двухканаловыми поверхностями. Нетрудно показать, что плоскости образующих окружностей циклиды Дюпена не совпадают с нормальными плоскостями линий центров семейства окружностей.

Автор данной работы считает обоснованным принимать за определение каналовых поверхностей определение, данное В.И. Шуликовским.

Возвращаясь к определению каналовых поверхностей, принятом в работе [9], заметим, что можно расширять понятие того или иного класса поверхностей, но при этом нужно следить, чтобы прежний класс поверхностей оставался подклассом расширенного класса поверхностей, не меняя своих свойств. Для поверхностей с системой плоских координатных линий в нормальной плоскости направляющей кривой эти условия при определении каналовых поверхностей по В.И. Шуликовскому не выполняются. Если давать одинаковые наименования разному типу поверхностей, то это приведет к путанице в научной терминологии.

Л и т е р а т у р а

1. *Иванов В.Н.* Некоторые вопросы теории поверхностей с семейством плоских координатных линий// Расчет оболочек строительных конструкций. – М.: УДН, 1977. – С. 37-48.
2. *Иванов В.Н.* Некоторые проблемы геометрии поверхностей с системой плоских координатных линий// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – № 3. – С. 6-15.
3. *Иванов В.Н.* Геометрия и конструирование оболочек на основе поверхностей с системой координатных линий в плоскостях пучка// Пространственные конструкции зданий и сооружений. Вып. 9. /Сб. научн. трудов МОО «Пространственные конструкции». – М.: «Девятка ПРИНТ», 2004. – С. 26-35.
4. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 540 с.
5. *Норден А.П.* Теория поверхностей. – М.: ГИТТЛ, 1956. –260 с.
6. *Иванов В.Н., Ризван Мухаммад.* Геометрия резных поверхностей Монжа и конструирование оболочек// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвуз. сборник научных трудов. – Вып. 11. – М.: Изд-во АСВ, 2002. – С. 27-36.
7. *Иванов В.Н.* Векторные уравнения при построении поверхностей в системе «MathCad»// Вестник Российского университета дружбы народов. – Сер.: Инженерные исследования. – 2005. – № 2 (12). – С. 90-92.
8. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики.–Т. 1.–М.: Изд-во «Наука», 1965.– 480 с.
9. *Матюшов Е.А., Беляева З.В.* Кинематический метод построения канальных поверхностей. – Прикладная геометрия. – Вып. 12. – № 25. – М.: МАИ, 2010. – С. 1-8.
10. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 556 с.
11. *Иванов В.Н.* Циклические поверхности (геометрия, классификация и конструирование оболочек)// «Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы»: Труды Международной научной конференции, Москва, 4-8 июня 2001 г. – М.: Изд-во РУДН. – С. 127-134.
12. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Классификация циклических поверхностей// Строительная механика инж. конструкций и сооружений. – 2006. – № 2. –С. 25-34.
13. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Геометрия, расчет и проектирование конструкций в форме циклических поверхностей// Обзорная информация: Сер. «Строительные материалы и конструкции». – М.: ОАО ВНИИТПИ, 2010. – Вып. 2. – 61 с.
14. *Рашиевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М., Л.: ГИТТД, 1950. 428 с.
15. *Гилберт Д., Кон.-Фоссен С.* Наглядная геометрия.–М.: Наука,1981. – 344 с.
16. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. – М.: ОГИЗ, Гостехиздат, т.1, 1947. - 512с.; т. 2, 1948. - 408 с.
17. *Григоренко Я.М., Гуляев В.И., Гоцуляк Е.А., Ашури К.* Напряженно- деформированное состояние трубчатых оболочек под действием равномерно распределенного давления// Прикладная механика, № 8, т. 1. – Киев: 1983. – С. 11-18.
18. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В.* Расчет оболочек сложной формы. – Киев: Будівельник, 1990. – 192 с.
19. *Иванов В.Н.* Геометрия циклических поверхностей// Сб. научных трудов аспирантов инженерного факультета. – Вып. VIII. – М.: УДН, 1971. – С. 137-142.
20. *Иванов В.Н.* Условия образования канальных поверхностей// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов. – Вып. 5. – М.: МБК «Биоконтроль», 1995. – С. 7-16.

GEOMETRY AND FORMING OF THE NORMAL SURFACES WITH SYSTEM OF PLANE COORDINATE LINES

V.N. Ivanov

The surfaces with system of coordinate lines lying in normal plane of some directrix are investigated. The vector equation of the surfaces and the formulas of the main quadratic forms are received. The drawings of surfaces made in MathCad system with different directrix and genatrix lines are shown.

KEY WORDS: normal surfaces, directrix line, genatrix line, normal plane of the curve.