## К РАСЧЕТУ НЕУПРУГИХ СОСТАВНЫХ КРУГОВЫХ АРОК

А.А. РОЧЕВ, *канд. техн. наук, доцент*
*Петрозаводский государственный университет*
*185026, Республика Карелия, г. Петрозаводск, дом 15, кв. 120.*
*Электронный адрес: metalll@bk.ru. Контактный телефон: 51-73-40.*

*В работе рассматривается расчет круговой арки переменного сечения на основе применения основных положений общей теории составных стержней А.Р. Ржаницына. Используются полученные автором выражения для определения эквивалентных модулей деформаций, учитывающие сжимаемость оси арки, деформации сдвига в стержнях арки, нелинейную связь деформаций и напряжений, а также деформации, связанные с искажением формы поперечного сечения стержней арки.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА*:* круговая составная арка, эквивалентные модули деформаций, искажение формы поперечного сечения стержней, деформационный расчет.

Исследуется несущая способность круговой составной упругопластической арки, имеющей переменное сечение по длине. Стержни, составляющие арку, соединены между собой структурными связями в виде раскосов, распорок, планок или перфорированных листов. В работе применяются основные положения общей теории составных стержней, разработанной А.Р. Ржаницыным [1]. Для материала стержней арки устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжением. Используется гипотеза о нелинейно упругом материале, основанная на теореме, доказанной А.М. Кочановым в [2], согласно которой при активной пластической деформации поведение упругопластического тела неотличимо от поведения нелинейно упругого тела.

Исследование арки базируется на использовании системы дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние упругой круговой составной арки постоянного сечения по длине с упругоподатливыми связями сдвига и упругоподатливыми поперечными связями постоянной жесткости по длине арки, полученных в [3]. Эта система уравнений предназначена для определения усилий в связях сдвига $\tau_i$ и усилий в поперечных связях $q_i$ в $n$ швах составной арки. Здесь $i$ - индекс, означающий номер шва. В данной работе осуществлена замена указанной системы дифференциальных уравнений системой уравнений в конечных разностях, в которую введены параметры, учитывающие физическую и геометрическую нелинейность решаемой задачи. Круговая ось арки делиться по длине на $m$ равных частей с образованием между полярными радиусами смежных сечений $j$ и $(j+1)$ угла $\varphi$. Используется метод шагового нагружения конструкции [4]. Описанная система конечно-разностных уравнений на $k$ -м шаге нагружения будет иметь вид

$$\begin{gathered}
\Delta^2 T_{ij}^{(k)} / \varphi^2 - R_i^2 \zeta_{ij}^{(k)} g_{i,i-1,j}^{(k)} T_{i-1,j}^{(k)} - (R_i^2 \zeta_{ij}^{(k)} g_{iij}^{(k)} - 1) T_{ij}^{(k)} - \\
- R_i^2 \zeta_{ij}^{(k)} g_{i,i+1,j}^{(k)} T_{i+1,j}^{(k)} - R_i^1 \zeta_{ij}^{(k)} d_{i,i-1,j}^{(k)} S_{i-1,j}^{(k)} - R_i^2 \zeta_{ij}^{(k)} d_{iij}^{(k)} S_{ij}^{(k)} - \qquad (1) \\
- R_i^2 \zeta_{ij}^{(k)} d_{i,i+1,j}^{(k)} S_{i+1,j}^{(k)} - R_i^2 \zeta_{ij}^{(k)} g_{ioj}^{(k)} = 0, \\
\Delta^5 S_{ij}^{(k)} / \varphi^5 + 2\Delta^3 S_{ij}^{(k)} / \varphi^3 + \Delta S_{ij}^{(k)} / \varphi + \\
+ R_i^4 \eta_{ij}^{(k)} ( p_{i,i-1,j}^{(k)} \Delta T_{i-1,j}^{(k)} / \varphi + p_{iij}^{(k)} \Delta T_{ij}^{(k)} / \varphi + p_{i,i+1,j}^{(k)} \Delta T_{i+1,j}^{(k)} / \varphi +
\end{gathered}$$

$$+l_{i,i-1,j}^{(k)}\Delta S_{i-1,j}^{(k)}/\varphi+l_{iij}^{(k)}\Delta S_{ij}^{(k)}/\varphi+l_{i,i+1,j}^{(k)}\Delta S_{i+1,j}^{(k)}/\varphi+\Delta p_{ioj}^{(k)}/\varphi)=0,$$

где
$$g_{i,i-1,j}^{(k)}=-\frac{1}{E_{ija}^{(k)}A_{ij}}+\frac{a_{ij}b_{i-1,j}}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}},$$

$$g_{iij}^{(k)}=\frac{1}{E_{ija}^{(k)}A_{ij}}+\frac{1}{E_{i+1,ja}^{(k)}A_{i+1,j}}+\frac{a_{ij}^2}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}}+\frac{b_{ij}^2}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{xi+1,j}},$$

$$g_{i,i+1,j}^{(k)}=-\frac{1}{E_{i+1,ja}^{(k)}A_{i+1,j}}+\frac{a_{i+1,j}b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{xi+1,j}},\qquad g_{ir}^{(k)}=g_{ri}^{(k)},$$

$$g_{ioj}^{(k)}=-\frac{M_{i,j}^{o(k)}a_{ij}}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}}-\frac{M_{i+1,j}^{o(k)}b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{x,i+1,j}}-\frac{N_{ij}^{o(k)}}{E_{ija}^{equ(k)}A_{ij}}+\frac{N_{i+1,j}^{o(k)}}{E_{i+1,ja}^{equ(k)}A_{i+1,j}},$$

$$d_{iij}^{(k)}=\frac{a_{i-1,j}}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}}-\frac{b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{x,i+1.j}},\quad d_{i,i-1,j}^{(k)}=-\frac{a_{ij}}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}},\quad d_{i,i+1,j}^{(k)}=\frac{b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{x,i+1,j}},$$

$$p_{i,i-1,j}^{(k)}=\frac{b_{i-1,j}}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}},\qquad p_{i,i+1,j}^{(k)}=-\frac{a_{i+1,j}}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{x,i+1,j}},$$

$$p_{iij}^{(k)}=\frac{a_{ij}}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}}-\frac{b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{x,i+1,j}},\quad l_{i,i-1,j}^{(k)}=-\frac{1}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}},\quad l_{i.i+1,j}^{(k)}=-\frac{1}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{x,i+1,j}},$$

$$l_{iij}^{(k)}=\frac{1}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}}+\frac{1}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{x,i+1,j}},\qquad l_{ir}^{(k)}=l_{ri}^{(k)},$$

$$p_{ioj}^{(k)}=\frac{M_{i+1,j}^{o(k)}}{E_{i+1,j}^{equ(k)}J_{x,i+1,j}}-\frac{M_{ij}^{o(k)}}{E_{ij}^{equ(k)}J_{xij}},\qquad i=1..n,\quad j=0..m\,, \tag{2}$$

$T_{ij}^{(k)}$ - сдвигающее усилие в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня арки, возникающее от действия усилий $\tau_i^{(k)}$ при $k$-м шаге нагружения и определяемое по формуле
$$T_{ij}^{(k)}=\int_0^{s_{ij}}\tau_i^{(i)}ds_i, \tag{3}$$

здесь $s_{ij}$ – координата $j$-го поперечного сечения по длине оси $i$-го стержня от начала этого стержня арки; $S_{ij}^{(k)}$ - изгибающий момент в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня арки, возникающий от действия усилий $q_i^{(k)}$ и $q_{i-1}^{(k)}$ при $k$-м шаге нагружения, и равный:

$$S_{ij}^{(k)}=-\int_0^{s_{ij}}\int_0^{s_{ij}}q_i^{(k)}ds_i^2+\int_0^{s_{ij}}\int_0^{s_{ij}}q_{i-1}^{(k)}ds_i^2; \tag{4}$$

$a_{ij}$ и $b_{i-1,j}$ - расстояния от центра тяжести $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня арки до разделяющих плоскостей ниже и вышележащего шва; $A_{ij}$ и $J_{xij}$ - площадь и момент инерции $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня арки; $\xi_{ij}^{(k)}$ и $\eta_{ij}^{(k)}$- коэффициенты жесткости, соответственно, связей сдвига и поперечных связей на $j$-м участке $i$-го шва арки при $k$-м шаге нагружения; $E_{ija}^{(k)}$ - секущий модуль деформаций для осевого волокна $j$-го поперечного сечения $i$-

го стержня арки, определяемый по диаграмме «напряжения - деформации» для материала $i$-го стержня арки, по деформации равной

$$\varepsilon_{ija}^{(k)} = (\varepsilon_{ij0}^{(k-1)} + \varepsilon_{iju}^{(k-1)})/2, \qquad (5)$$

здесь $\varepsilon_{ij0}^{(k-1)}$ и $\varepsilon_{iju}^{(k-1)}$ - краевые деформации в плоской стенке $j$-го симметричного тонкостенного поперечного сечения $i$-го стержня арки при $(k-1)$-м шаге нагружения; $E_{ij}^{equ(k)}$ - эквивалентный модуль деформаций для $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня арки, учитывающий влияние деформаций сдвига, сжимаемость оси стержня, нелинейную связь между деформациями и напряжениями при $k$-м шаге нагружения; $M_{ij}^{o(k)}$ и $N_{ij}^{o(k)}$ - изгибающий момент и продольная сила, возникающие в $j$-м сечении $i$-го стержня арки от действия внешней нагрузки в основной системе при $k$-м шаге нагружения без учета усилий, возникающих в связях сдвига и поперечных связях; $R_i$ - радиус кривизны оси $i$-го стержня арки. Выражение для определения $E_{ij}^{equ(k)}$ было получено и опубликовано автором данной статьи ранее в [5]

$$E_{ij}^{equ(k)} = M_{ij}^{(k-1)} h_{ij} (1 - \varepsilon_{ija}^{(k-1)}) / [(\Delta\varepsilon_{ij}^{(k-1)} - \gamma_{y1ij}^{(k-1)} h_{ij} Q_{yij}'^{(k-1)}) J_{xij}], \qquad (6)$$

где $M_{ij}^{(k-1)}$ - изгибающий момент в $j$-м сечении $i$-го стержня арки, возникающий при $(k-1)$-м шаге нагружения; $h_{ij}$ - высота $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня арки; $\Delta\varepsilon_{ij}^{(k-1)} = \varepsilon_{ij0}^{(k-1)} - \varepsilon_{iju}^{(k-1)}$; $\gamma_{y1ij}^{(k-1)}$ - угол сдвига на $j$-м участке $i$-го стержня арки от единичной поперечной силы при $(k-1)$-м шаге нагружения; $Q_{yij}'^{(k-1)}$ - первая производной от поперечной силы, действующей в $j$-м сечении $i$-го стержня арки при $(k-1)$-м шаге нагружения, которая в конечно-разностной форме имеет вид:

$$Q_{yij}'^{(k-1)} \approx (Q_{yi,j+1}^{(k-1)} - Q_{yi,j-1}^{(k-1)})/(2\varphi). \qquad (7)$$

Определение коэффициентов жесткости швов $\xi_{ij}^{(k)}$ и $\eta_{ij}^{(k)}$ за пределами упругости осуществляется с использованием формул, полученных в [6], с подстановкой в них вместо модуля Юнга эквивалентного модуля деформаций типа (6) при работе элементов связей на изгиб и секущего модуля деформаций при работе элементов связей на растяжение или сжатие.

Согласно методу сеток [7] определение центральных конечных разностей осуществляется по формулам

$$\Delta S_{ij}^{(k)} = (S_{i,j+1}^{(k)} - S_{i,j-1}^{(k)})/2, \quad \Delta p_{ioj}^{(k)} = (p_{i,j+1}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)})/2,$$

$$\Delta^2 T_{ij}^{(k)} = T_{i,j+1}^{(k)} - 2T_{ij}^{(k)} + T_{i,j-1}^{(k)}, \qquad \Delta^3 S_{ij}^{(k)} = (S_{i,j+2}^{(k)} - 2S_{i,j+1}^{(k)} + 2S_{i,j-1}^{(k)} - S_{i,j-2}^{(k)})/2, \quad (8)$$

$$\Delta^5 S_{ij}^{(k)} = (S_{i,j+3}^{(k)} - 4S_{i,j+2}^{(k)} + 5S_{i,j+1}^{(k)} - 5S_{i,j-1}^{(k)} + 4S_{i,j-2}^{(k)} - S_{i,j-3}^{(k)})/2.$$

При известной функциональной зависимости между напряжениями и деформациями $\sigma = f(\varepsilon)$ для материала стержней арки краевые линейные относительные деформации в $j$ - м сечении $i$-го стержня арки при $(k-1)$-м шаге нагружении являются функциями усилий

$$\varepsilon_{ij0}^{(k-1)} = \varepsilon_{ij0}^{(k-1)}(M_{xij}^{ins(k-1)}, P_{ij}^{ins(k-1)}), \qquad (9)$$

$$\varepsilon_{iju}^{(k-1)} = \varepsilon_{iju}^{(k-1)}(M_{xij}^{ins(k-1)}, P_{ij}^{ins(k-1)}), \qquad (10)$$

где $M_{xij}^{ins(k-1)}$ - главный момент эпюры нормальных напряжений относительно центра тяжести $j$ - го поперечного сечения $i$-го стержня арки, возникающий при $(k-1)$-м шаге нагружении арки; $P_{ij}^{ins(k-1)}$- главный вектор эпюры нормальных напряжений в этом же сечении при $(k-1)$ -м шаге нагружении арки.

Краевые деформации $\varepsilon_{ij0}^{(k-1)}$ и $\varepsilon_{iju}^{(k-1)}$ определяются из решения системы уравнений равновесия для $j$ - го поперечного сечения $i$-го стержня арки

$$M_{xij}^{ins(k-1)}(\varepsilon_{ij0}^{(k-1)},\varepsilon_{iju}^{(k-1)}) = M_{ij}^{(k-1)}, \qquad P_{ij}^{ins(k-1)}(\varepsilon_{ij0}^{(k-1)},\varepsilon_{iju}^{(k-1)}) = N_{ij}^{(k-1)}, \quad (11)$$

где $N_{ij}^{(k-1)}$ - продольная сила, действующая в $j$ - м поперечном сечении $i$-го стержня арки и возникающая при $(k-1)$- м шаге нагружении.

Усилия, действующие в $j$ - м поперечном сечении $i$-го стержня арки, находятся из выражений

$$M_{xij}^{ins(k-1)} = \sum_{k_1=0}^{u} D_{ijk_1}^{(k-1)}\sigma_{ijk_1}^{(k-1)} + \sum_{v=0}^{c} K_{ijv}^{(k-1)}\sigma_{ijv}^{(k-1)}, \quad (12)$$

$$P_{ij}^{ins(k-1)} = \sum_{k_1=0}^{u} C_{ijk_1}^{(k-1)}\sigma_{ijk_1}^{(k-1)} + \sum_{v=0}^{c} U_{ijv}^{(k-1)}\sigma_{ijv}^{(k-1)}, \quad (13)$$

где $\sigma_{ijk_1}^{(k-1)}$ - нормальное напряжение в $k_1$- м волокне плоской стенки $j$ - го поперечного сечении $i$- го стержня, определяемое по известной диаграмме «напряжения – относительные деформации» в зависимости от величины линейной относительной деформации $k_1$-го волокна $i$-го стержня $\varepsilon_{ijk_1}^{(k-1)}$, которая определяется по формуле

$$\varepsilon_{ijk_1}^{(k-1)} = a_{ijk_1}\varepsilon_{ij0}^{(k-1)} + b_{ijk_1}\varepsilon_{iju}^{(k-1)}, \quad (14)$$

здесь $a_{ijk_1}$ и $b_{ijk_1}$ - коэффициенты линейной интерполяции при разбиении стенки ветви по высоте на $u$ равных частей; $D_{ijk_1}^{(k-1)}$, $C_{ijk_1}^{(k-1)}$ - коэффициенты линейной интерполяции эпюры нормальных напряжений в плоской стенке $j$ - го поперечного сечения $i$- го стержня; $\sigma_{ijv}^{(k-1)}$ - нормальное напряжение в $v$- м волокне цилиндрической полки $j$ - го поперечного сечении $i$- го стержня, определяемое по известной диаграмме «напряжения – относительные деформации» в зависимости от величины линейной относительной деформации $v$-го волокна $j$ - го поперечного сечения $i$-го стержня $\varepsilon_{ijv}^{(k-1)}$; $K_{ijv}^{(k-1)}$ и $U_{ijv}^{(k-1)}$ - коэффициенты интерполяции эпюры нормальных напряжений в цилиндрической полке $j$ - го поперечного сечения $i$- го стержня.

Относительная деформация $\varepsilon_{ijv}^{(k-1)}$ определяется с учетом влияния искажения формы $j$ - го поперечного сечения $i$- го стержня арки

$$\varepsilon_{ijv}^{(k-1)} = \hat{\varepsilon}_{ij0}^{(k-1)} - \xi_{ijv}^{(k-1)} / R_i, \quad (15)$$

где $\hat{\varepsilon}_{ij0}^{(i-1)}$ - линейная относительная деформация волокна, расположенного на пересечении плоскости стенки и срединной поверхности цилиндрической полки; $\xi_{ijv}^{(k-1)}$ - радиальное смещение узловой точки $v$ цилиндрической полки в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня при $(k-1)$-м шаге нагружения арки.

Определение $\xi_{ijv}^{(k-1)}$ осуществляется на основе использования упругого решения, полученного в [8] для чистого изгиба и распространенного в [9] на поперечный изгиб. Дифференциальное уравнение четвертого порядка изгиба цилиндрической полки стержня арки заменяется системой линейных алгебраических уравнений в конечных разностях. Полка по ширине делится на $c$ равных частей длиной $b_1$.

Система уравнений для определения радиальных смещений узловых точек $v$ верхней цилиндрической полки запишется в виде

$$\Delta^4 \xi_{ijv}^{(k-1)} / b_1^4 + 4\alpha_{ijv}^{4(k-1)} \xi_{ijv}^{(k-1)} = 4\alpha_{ijv}^{4(k-1)} \hat{\varepsilon}_{ij0}^{(k-1)} R_i, \quad v = 0..c, \tag{16}$$

где $\Delta^4 \xi_{ijv}^{(k-1)}$ - центральная конечная разность четвертого порядка равная:

$$\Delta^4 \xi_{ijv}^{(k-1)} = \xi_{ij,v+2}^{(k-1)} - 4\xi_{ij,v+1}^{(k-1)} + 6\xi_{ijv}^{(k-1)} - 4\xi_{ij,v-1}^{(k-1)} + \xi_{ij,v-2}^{(k-1)}, \tag{17}$$

$$4\alpha_{ijv}^{4(k-1)} = \frac{\hat{E}_{ij0}^{(k-1)}}{E_{ijv}^{equ(k-1)}} \cdot \frac{12(1 - \hat{\mu}_{ij0}^{(k-1)} \mu_{ijv}^{equ(k-1)})}{t_f^2 R_i^2}, \tag{18}$$

здесь $\hat{E}_{ij0}^{(k-1)}$ и $\hat{\mu}_{ij0}^{(k-1)}$ - модуль деформаций и коэффициент Пуассона при ($k$ - 1)-м шаге загружения для волокна, расположенного на пересечении плоскости стенки и срединной поверхности верхней цилиндрической полки; $t_f$ - толщина верхней цилиндрической полки;

$$\hat{\mu}_{ij0}^{(k-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{E}_{ij0}^{(k-1)} (1 - 2\mu_o)}{E_o}, \tag{19}$$

$$\mu_{ijv}^{equ(k-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{ijv}^{equ(k-1)} (1 - 2\mu_o)}{E_o}, \tag{20}$$

$E_{ijv}^{equ(k-1)}$ - эквивалентный модуль деформаций, учитывающий неупругие деформации цилиндрической полки в $v$ -м продольном сечении цилиндрической полки $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня при $(k-1)$-м загружении арки,

$$E_{ijv}^{equ(k-1)} = \frac{M_{ijv}^{(k-1)} E_o [3 + v_1 (1 - 2v_1)\mu_o]}{[v_1 (1 - 4\mu_o + 4\mu_o{}^2) - 3(1 - 2\mu_o)] M_{ijv}^{(k-1)} + \Delta\varepsilon_{ijv}^{(k-1)} t_f^2 E_o}, \tag{21}$$

где $\Delta\varepsilon_{ijv}^{(k-1)}$ - разность краевых деформаций в продольном сечении цилиндрической полки, проходящем через узловую точку $v$;

$$v_1 = \hat{E}_{ij0}^{(k-1)} \big/ E_o . \tag{22}$$

Аналогично составляется выражение для нижней цилиндрической полки.

Выражение для определения $E_{ijv}^{equ(k-1)}$ получено автором данной статьи аналогично тому, как он получил выражение для определения $E_{ij}^{equ(k)}$ в [5].

Первоначально расчет по формуле (19) осуществляется по параметрам напряженно-деформированного состояния, полученным при $(k-2)$ -м шаге нагружения арки, а затем по уточненным деформациям, полученным из решения системы уравнений (11), вычисляется по (21) $E_{ijv}^{equ(k-1)}$.

Учет деформированного состояния двухшарнирной арки осуществляется подстановкой в выражения для определения параметров $g_{io}^{(k)}$ и $p_{io}^{(k)}$ следующих зависимостей:

$$M_{ij}^{o(k)} = H_{oi}^{(k)}[\sin\theta_j(R_i - w_{ij}^{(k)}) + \upsilon_{ij}^{(k)}\cos\theta_j] -$$
$$-V_{oi}^{(k)}[R_i(1-\cos\theta_j) + w_{ij}^{(k)}\cos\theta_j + \upsilon_{ij}^{(k)}\sin\theta_j] + M_{ij}^{G(k)}, \qquad (23)$$

$$N_{ij}^{o(k)} = \sin(\theta_j + \beta_{ij}^{(k)})[H_{ij}^{o(k)} + ctg(\theta_j + \beta_{ij}^{(k)})(V_{oi}^{(k)} - G_{ij}^{(k)}), \qquad (24)$$

где $H_{io}^{(k)}$ и $V_{io}^{(k)}$ - горизонтальная и вертикальная опорные реакции в узловой точке $i$-го стержня арки с номером $j = 0$, определяемые по формулам:

$$H_{io}^{(k)} = N_{io}^{(k)}\cos(\alpha_{io}^{(k)} - \beta_{io}^{(k)}) + Q_{iy0}^{(k)}\sin(\alpha_{io}^{(k)} - \beta_{io}^{(k)}), \qquad (25)$$

$$V_{io}^{(k)} = N_{io}^{(k)}\sin(\alpha_{io}^{(k)} - \beta_{io}^{(k)}) - Q_{iy0}^{(k)}\cos(\alpha_{io}^{(k)} - \beta_{io}^{(k)}), \qquad (26)$$

здесь $\alpha_{io}^{(k)}$ - угол между касательной к оси $i$-го стержня арки в узловой точке с номером $j = 0$ и полярной осью; $N_{io}^{(k)}$ и $Q_{iy0}^{(k)}$ - продольная и поперечная сила в узловой точке с номером $j = 0$ $i$-го стержня арки; $w_{ij}^{(k)}$ и $\upsilon_{ij}^{(k)}$ - перемещения центра тяжести $j$-го сечения $i$-го стержня арки, соответственно, в радиальном и касательном направлении к оси $i$-го стержня недеформированной арки; $\theta_j$ - угловая координата $j$- го сечения недеформированного стержня составной арки; $\beta_{ij}^{(k)}$ - угол поворота $j$-го сечения $i$-го стержня арки; где $G_{ij}^{(k)}$ и $M_{ij}^{G(k)}$ - главный вектор и главный момент внешней нагрузки, приходящиеся на $i$-й стержень арки, отделенный $j$ - м сечением.

Для определения $w_{ij}^{(k)}$ и $\upsilon_{ij}^{(k)}$ используются известные дифференциальные зависимости [10], представленные в конечно-разностной форме,

$$\Delta^2 w_{ij}^{(k)} / \varphi^2 + w_{ij}^{(k)} = -\frac{R_i^2 M_{ij}^{(k)}}{E_{ij}^{equ} J_{xij}}, \qquad (27)$$

$$\beta_{ij}^{(k)} = (\Delta w_{ij}^{(k)} / \varphi + \upsilon_{ij}^{(k)}) / R_i, \qquad \Delta p_{ioj}^{(k)} = (p_{i,j+1}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)}) / 2, \qquad (28)$$

где $\Delta\upsilon_{ij}^{(k)}$, $\Delta w_{ij}^{(k)}$ и $\Delta^2 w_{ij}^{(k)}$ - центральные конечные разности первого и второго порядка равные:

$$\Delta\upsilon_{ij}^{(k)} = \upsilon_{i+1,j}^{(k)} - \upsilon_{i-1,j}^{(k)} / 2, \quad \Delta w_{ij}^{(k)} = w_{i+1j}^{(k)} - w_{i-1j}^{(k)} / 2, \qquad (29)$$

$$\Delta^2 w_{ij}^{(k)} = w_{i,j+1}^{(k)} - 2w_{ij}^{(k)} + w_{i,j-1}^{(k)}, \qquad (30)$$

$M_{ij}^{(k)}$ - суммарный изгибающий момент в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня основной системы равный:

$$M_{ij}^{(k)} = M_{ij}^{o(k)} + M_{ij}^{T(k)} + S_{ij}^{(k)}, \qquad (31)$$

здесь $M_{ij}^{T(k)}$ - изгибающий момент в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня, возникающий от действия усилий в связях сдвига, равный:

$$M_{ij}^{T(k)} = -T_{i-1,j}^{(k)} b_{i-1,j} - T_{ij}^{(k)} a_{ij}. \qquad (32)$$

Совместное решение вышеприведенных уравнений с учетом граничных условий позволяет выполнить деформационный расчет арки за пределом упругости. Результаты такого расчета в дальнейшем могут быть использованы дальше для проверки устойчивости арки методом проф. Р.С. Санжаровского [11].

Литература

1. *Ржаницын А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.

2. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз,1960. – 455 с.

3. *Заборов В.И.* Прочность и устойчивость составных арок //Научное сообщение ЦНИИС, вып.12. М.: Стройиздат, 1954. 70 с.

4. *Биргер И.А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука , 1975. С.61 – 73.

5. *Рочев А.А.* Нелинейная теория расчета сквозных упругопластических статически неопределимых рамных систем // Доклады 58-й конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета. В 3 ч. Ч. 1. – СПб. : СПбГАСУ, 2001. С.93 – 94.

6. *Ржаницын А.Р.* Теория составных стержней строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1948. – 192 с.

7. *Варвак П.М., Варвак Л.П.* Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1977. - 160 с.

8. *Бидерман В.Л.* Плоский изгиб тонкостенных кривых профилей// Расчеты на прочность в машиностроении. Под ред. С.Д. Пономарева. Т.1. М.: Машгиз, 1956. С. 448 – 465.

9. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. (Б-ка расчетчика). М.: «Машиностроение», 1977. 488 с.

10. *Динник А.Н.* Продольный изгиб. Кручение. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 392 с.

11. *Санжаровский Р.С.* Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. – 280 с.

**THE CALCULATION OF INELASTIC COMPOSITE CIRCULAR ARCHES**

A.A. Rochev

The paper deals with the calculation of circular arches with variable cross section on the basis of the application of the main provisions of the general theory of composite rods of A.R. Rzhanitsina. Used the expression obtained by the author to determine the equivalent vogue-ing strain, taking into account the compressibility of the axis of the arch, the shear strain in the rods exercises appropriate arch, nonlinear relation between strain and stress, and strain associated with distortion-WIDE shape of the cross-section of the arch bars.

KEY WORDS: circular composite arch, equivalent modules, strain, shape of the cross-section rods, the deformation calculation.