

МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

С. В. ЕРОХИН*, аспирант

А. М. ГАЧАЕВ**, к. ф.-м. н., доцент

*МГАКХИС, **НИИПМА

109029, г. Москва, ул. Средняя Калитниковская, д. 30, kabrus@mail.ru

Представлена модель вязкоупругой деформации, основанная на производных дробного порядка. Описан метод определения параметров модели, позволяющий моделировать поведение системы при различных нагрузках.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вязкоупругая деформация, производные дробного порядка

1. Описание модели и экспериментальные данные

В настоящее время сохраняется актуальность теории расчета элементов строительных конструкций при силовых нагрузениях. Среди задач этой теории значимое место занимает исследование силового сопротивления материалов при различных воздействиях.

Расчет механического поведения конструкции при заданной зависимости нагружения от времени опирается на адекватную математическую модель свойств вязкоупругого материала. Таковой для вязкоупругих материалов является модель, основанная на производных дробного порядка [1], учитывающая режим нагружения и его «предысторию».

Модель нагружения вязкоупругого элемента конструкции имеет вид:

$$\sigma(t) + \sum_{j=1}^m b_j D^{\alpha_j} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{j=1}^m E_j D^{\beta_j} \varepsilon(t), \quad (1)$$

где $\sigma = \sigma(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$ - напряжение и деформация в момент времени t , b_j , E_j , α_j , β_j - заданные величины, а D^p - оператор дробного дифференцирования порядка p . Как показано в [1], для моделирования многих вязкоупругих материалов достаточно ограничиться моделью

$$\sigma(t) + bD^{\alpha} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^{\beta} \varepsilon(t), \quad (2)$$

которая при достаточно малом E_0 сводится к уравнению

$$\sigma(t) = E_1 D^{\beta} \varepsilon(t), \quad (3)$$

где $\sigma(t)$ - напряжение, $\varepsilon(t)$ - деформация, E_1 и $0 < \beta < 1$ - параметры материала.

Здесь $D^{\beta} < x(t) > = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}} d\tau$ - дробная производная Капуто [2].

Вязкоупругая среда как бы занимает промежуточное положение между вязкой неупругой ($\beta = 1$) и абсолютно упругой невязкой ($\beta = 0$) средами,

$$\sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon(t), \\ \eta d\varepsilon(t)/dt, \end{cases} \quad (4)$$

и формула (3) может рассматриваться как возможный способ интерполяции между ними. При $\beta = 1$ она порождает закон Ньютона, при $\beta = 0$ - закон Гука.

Дробно-дифференциальный подход был успешно применен многими исследователями для описания реологического поведения органических стекол, эластомеров, полиуретана и других материалов.

Экспериментальные исследования термостойких полимеров, проведенные в [3] также хорошо согласуются с этой моделью. Процесс разрушения полимеров складывается из предварительной пластической деформации и разрыва основных связей макромолекул. В зависимости от ряда факторов (условия деформирования, геометрия образца и т.д.) соотношение между этими двумя процес-

сами меняется. Для предельно ориентированных образцов лимитирующим процессом является разрыв основных связей, поскольку возможности реализации процессов пластической деформации в них невелики. В пластичных же полимерах, где объем пластически (или вынужденно-эластически) деформированного материала велик, может сложиться такая ситуация, когда энергия, необходимая для пластического деформирования и распространения магистральной трещины через зону пластической деформации, будет лимитирующим параметром процесса разрушения.

Рассматриваются закономерности процессов деформирования серии стеклообразных аморфных полиарилатов и ряда бисфенолов: диана «1», тетрахлордиана (ТХД) «2», диоксифенилсульфурна (ДОДФС) «3», фенолфталеина (Ф/Ф) «4», тетрабромфенолфталеина (ТБФ/Ф) «5» и 1,1-дихлор-2,2-диэтилена (ЭОДХ) «6», триптицендиол «7».

Все исследованные полиэфиры относятся к негорючим полимерам и предназначаются для использования в тех областях техники, где необходимы пленочные материалы и покрытия с повышенной огнестойкостью и высокими физико-механическими свойствами.

Для исследования были использованы пленки из вышеуказанных полиэфи-ров. Механические испытания проведены на машине для растяжения с постоянной скоростью деформирования (0,05 м/мин) при комнатной температуре.

На рис. 1 показаны кривые напряжение-деформация для шести полиэфи-ров. Все полиэфиры, за исключением ХАЭТИК - ТБФ/Ф, разрушаются пла-

стично с достаточно высоким пределом вынужденной эластичности (σ_A). Характерной особенностью кривых напряжение-деформация на рис.1 (кроме, естественно, ХАЭТИК - ТБФ/Ф) является отсутствие максимума (напряжение за пределом вынужденной эластичности нигде не снижается ниже σ_A).

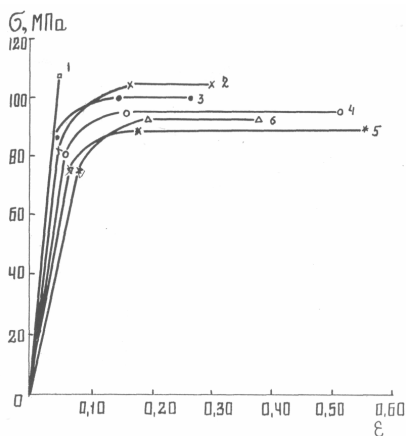


Рис. 1. Зависимость напряжение-деформация при растяжении пленочных образцов полиэфиры 1-ТБФ/Ф, 2 - ТХД, 3-Ф/Ф, 4-ЭОДХ, 5-диан, 6 -ДОДФС

2. Определение параметров модели

Конечно, в природе $\varepsilon(t)$ - функция далеко не линейная. Но, если нам удастся установить параметр β для случая линейного нагружения, то по теореме единственности для уравнения (3) можно утверждать, что этот параметр является инвариантным и не зависит от формы функции $\varepsilon(t)$.

Сформулируем теорему единственности для более общего случая.

Теорема Барретта. Для любой функции $v(x) \in L[a; b]$ существует единственное ре-

шение $u(x) \in L[a; b]$ задачи Коши

$$\lim_{x \rightarrow 0} D^{\alpha-i} u = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m-1 < \alpha < m$$

для уравнения

$$D^\alpha u(x) = \lambda u(x) + v(x), \quad x \in [a; b]$$

и оно задается формулой

$$u(x) = \sum_{i=1}^m a_i U_i(x - u(x), \lambda) + \int_0^x v(t) U_1(x - t, \lambda) dt,$$

где

$$U_i(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} x^{k\alpha-i}}{\Gamma(k\alpha-i+1)}.$$

В нашем случае ($\lambda = 0$) получаем

$$u(x) = a_1 U_1(x) + \int_0^x v(t) U_1(x) dt, \quad \text{где } U_1(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Вычислим параметр β , если растяжение материала задается линейно (как в предыдущем параграфе) $\varepsilon(t) = kt$. Принимая во внимание известную формулу

$$D^\beta t = \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad \text{получаем } \sigma(t) = \frac{kE_1}{\Gamma(1-\beta)} t^{1-\beta} = \frac{k^\beta E_1}{\Gamma(1-\beta)} [\varepsilon(t)]^{1-\beta}.$$

Обозначив $A = \frac{k^\beta E_1}{\Gamma(1-\beta)}$, можно записать просто

$$\sigma(t) = A[\varepsilon(t)]^{1-\beta}. \quad (5)$$

Таким образом, в этом случае напряжение зависит от деформации по степенному закону. Для определения β достаточно знать результаты двух измерений $\varepsilon(t_1)$ и $\varepsilon(t_2)$. Формула (3) описывает деформацию материала в зоне вязкоупругости, т. е. при $\sigma > \sigma_B$.

Соотношение (5) справедливо, если начало координат находится в точке предела вынужденной эластичности (ε_B, σ_B). Если помимо критической точки (ε_B, σ_B) мы знаем еще два результата измерений: (ε_1, σ_1) и (ε_2, σ_2), то, приняв $\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_B$, $\Delta\varepsilon_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_B$, $\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_B$, $\Delta\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_B$, можно записать

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 = A\Delta\varepsilon_1^{1-\beta} \\ \Delta\sigma_2 = A\Delta\varepsilon_2^{1-\beta} \end{cases}, \quad \text{откуда } \beta = 1 - \ln \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_1} / \ln \frac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta\varepsilon_1}. \quad (6)$$

Для примера возьмем диаграммы для двух материалов 1 – ТХД, 2 – Диан.

Из графика следует, что для первого материала зона вязкоупругости наступает при $\varepsilon_0 = 0,06$, $\sigma_0 = 82$. Еще две точки возьмем $\varepsilon_1 = 0,10$, $\sigma_1 = 97$; $\varepsilon_2 = 0,16$, $\sigma_2 = 103$. Таким образом, $\Delta\sigma_1 = 15$, $\Delta\sigma_2 = 21$, $\Delta\varepsilon_1 = 0,04$, $\Delta\varepsilon_2 = 0,10$. По формуле (6) получаем $\beta = 0,63$.

Для второго: $\varepsilon_0 = 0,08$, $\sigma_0 = 76$. Еще две точки возьмем $\varepsilon_1 = 0,11$, $\sigma_1 = 84$; $\varepsilon_2 = 0,18$, $\sigma_2 = 86$. Таким образом, $\Delta\sigma_1 = 8$, $\Delta\sigma_2 = 10$, $\Delta\varepsilon_1 = 0,03$, $\Delta\varepsilon_2 = 0,10$. По формуле (6) получаем $\beta = 0,815$.

3. Обобщенный закон высокоэластичной деформации

Имея достаточно эффективную методику для определения параметра β , остановимся на способе исследования обобщенного закона высокоэластичной деформации. Перепишем (3) в

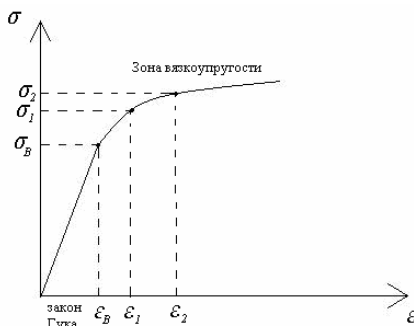


Рис. 2. К вопросу о вычислении параметра вязкоупругости

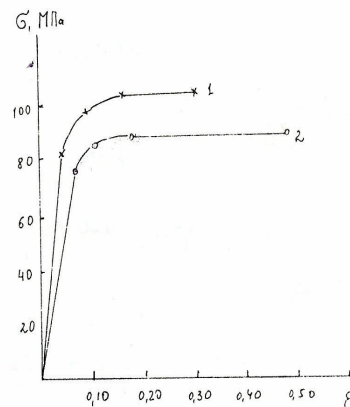


Рис. 3. Зависимость «напряжение деформация» 1 – ТХД, 2 – Диан

виде $\varepsilon(t) = \frac{1}{E} D^{-\beta} \sigma(t)$ или, что, то же самое, $\varepsilon(t) = \frac{1}{E\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma(x)}{(t-x)^\beta} dx$.

Используем это представление для получения аппроксимирующей матричной записи, а именно $\varepsilon_i = \frac{1}{E\Gamma(1-\beta)} \sum_{j=1}^N K_{ij} \sigma_j$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Здесь $\varepsilon_i = \varepsilon(t_i)$, $\sigma_i = \sigma(t_i)$, $K_{ij} = K(t_i, t_j)$, t_i – стандартное разбиение отрезка $[0; 1]$.

$$\text{Ядро} \quad K(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{(t-s)^\beta}, & s < t \\ 0, & s \geq t. \end{cases}$$

Для удобства запишем ядро следующим образом

$$K(t, s) = \theta(t, s) \cdot \frac{1}{(t-s)^\beta}, \quad \text{где } \theta(t, s) = \begin{cases} 1, & s < t \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Тогда аппроксимируемая матрица $K = \|K_{ij}\|$ будет иметь вид

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } K_{ij} = \theta(t_i, s_j) \cdot \frac{1}{(t_i - s_j)^\beta}.$$

Матрица K определена однозначно, поскольку параметр β известен.

Пусть растяжение материала задается функцией $\varepsilon(t) = f(t)$. Тогда матричное представление зависимости между напряжением и деформацией записывается

$$\text{следующим образом} \quad f_i = \frac{1}{E\Gamma(1-\beta)} \sum_{j=1}^N K_{ij} \sigma_j.$$

Чтобы найти σ_j , достаточно решить систему

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{E\Gamma(1-\alpha)} [K_{11}\sigma_1 + K_{12}\sigma_2 + \dots + K_{1N}\sigma_N] \\ f_2 = \frac{1}{E\Gamma(1-\alpha)} [K_{21}\sigma_1 + K_{22}\sigma_2 + \dots + K_{2N}\sigma_N] \\ \dots \\ f_N = \frac{1}{E\Gamma(1-\alpha)} [K_{N1}\sigma_1 + K_{N2}\sigma_2 + \dots + K_{NN}\sigma_N] \end{cases}.$$

4. Поведение модели при статической и динамической нагрузках

Наша задача состоит в качественном описании деформаций, возникающих в случае статической (медленное нагружение) и динамической (импульсный удар) нагрузки. Для этого проведем математическое моделирование системы со следующими параметрами: $E_1 = 1$, $\beta = 0,5$. В качестве функций нагрузки возьмем кусочно-линейные функции с одинаковым максимумом $\sigma_{\max} = 150$, но разным временем воздействия: $\Delta t_1 = 0,1$ в первом случае и $\Delta t_2 = 4$ во втором. В обоих случаях нагрузка линейно возрастает до максимума, а затем с той же скоростью линейно падает. Все параметры весьма условны и не отвечают реальным физическим экспериментам, демонстрируя лишь качественную картину. Далее приведены графики, дающие представление о результатах.

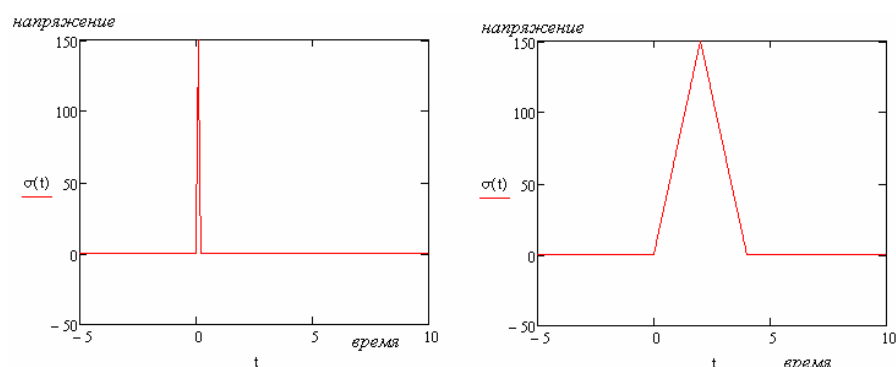


Рис. 3. Динамическая и статическая нагрузка

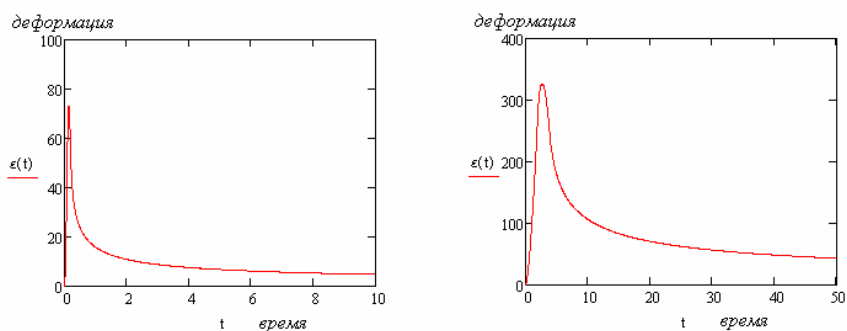


Рис. 4. Деформация от динамической и статической нагрузки

Как видно, деформация от статической нагрузки гораздо больше, несмотря на то, что максимумы нагрузок равны. Для большей наглядности рассмотрим их на одном рисунке. Этот результат коренным образом отличается от классического закона Гука. В зоне вязкоупругости решающим фактором становится не амплитуда, а энергия воздействия. Расчеты выполнены в вычислительной среде Mathcad 14.

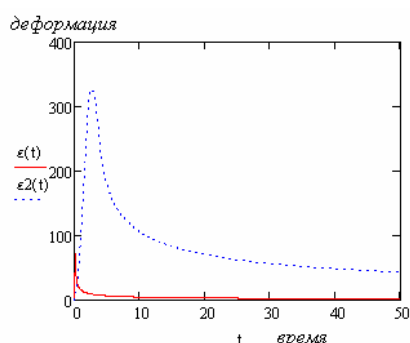


Рис. 5. Деформация: сплошная линия – от динамической нагрузки, пунктирная – от статической нагрузки

Л и т е р а т у р а

1. Бэгли Р. Л., Торвик П. Дж. Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка – новый подход к расчету конструкций с вязкоупругим демпфированием. Аэрокосмическая техника, т.2, №2, 1984.
2. Кехарсаева Э.Р., Алероев Т.С. Модель деформационно-прочностных характеристик хлоро-содержащих полиэфиров на основе производных дробного порядка// Пластические массы, 2001, №3, стр. 35.
3. Козлов Г. В., Кехарсаева Э. Р., Шогенов В. Н., Кеитов М. М., Миккитаев А. К. Деформация и разрушение пленок полиэфиров. – КБГУ, 1983.

A MODEL OF DEFORMATION OF VISCOUS-AND-ELASTIC MATERIALS

Erokhin S.V., Gachaev A.M.

Viscoelastical deformation model based on fractional derivatives submitted. Model parameter determination is described. It allows to predict system behavior under different loading.

KEYWORDS: Viscoelastical deformation, fractional derivatives.