КОНСТРУИРОВАНИЕ ЗОНТИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ОТСЕКОВ ЦИКЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕНОСА

В.Н. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*
С.Н. КРИВОШАПКО, *д-р техн. наук, профессор*
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
Тел. (495) 955-09-78; E –mail: sn_krivoshapko@mail.ru

Исследуется геометрия циклической поверхности переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы. Получены векторные уравнения поверхности в линиях переноса и в системе координатных линий, включающих опорные меридианы базовой сферы. Показана возможность конструирования зонтичных оболочек из отсеков циклических поверхностей переноса, ограниченных опорными меридианами базовой сферы Аналогичные результаты получены для циклической поверхности переноса, построенной на меридианах базовой поверхности вращения отрицательной гауссовой кривизны.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сфера, циклическая поверхность переноса, зонтичные оболочки, меридианы на сфере, векторное уравнение поверхности.

По заданию ООО «AQUA»(Проектирование и строительство) был выполнен вариантный проект Культурно–развлекательного центра для возможного строительства в лесном массиве вблизи г. Жуковского Московской области. Здание центра должно было включать в себя две зонтичные оболочки: одну – положительной, а другую – отрицательной гауссовой кривизны.

Вначале был предложено использовать *поверхность зонтичного типа с параболическими образующими и круглым отверстием в вершине* и с основанием в форме эпициклоиды (рис. 1) в качестве срединной поверхности оболочки положительной гауссовой кривизны и с основанием в форме гипоциклоиды в качестве срединной поверхности оболочки отрицательной гауссовой кривизны (рис. 2). Впервые эти поверхности были предложены авторами в работе [1].

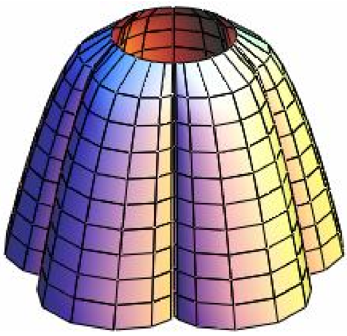


Рис. 1

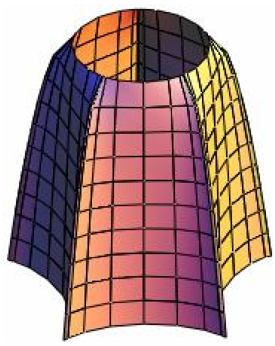
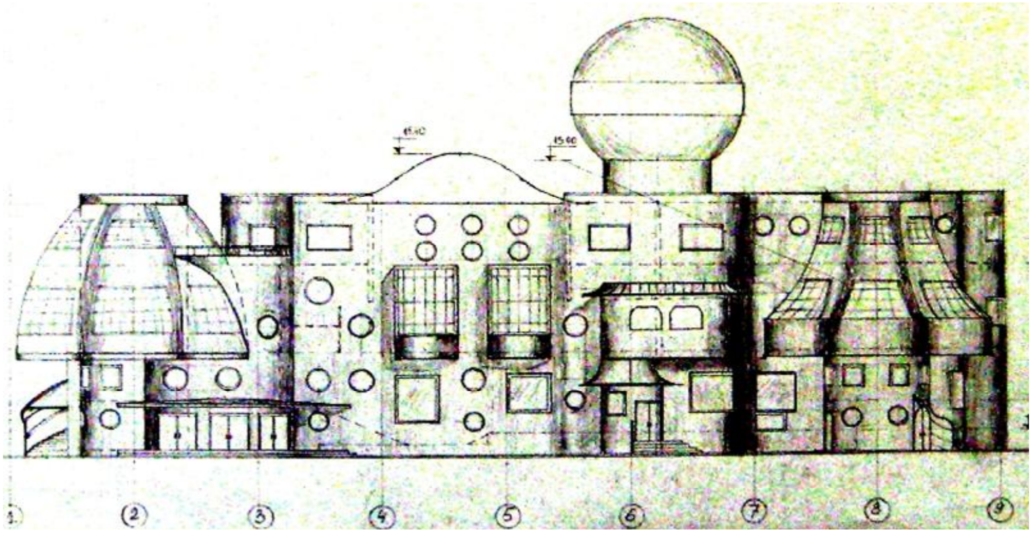


Рис. 2

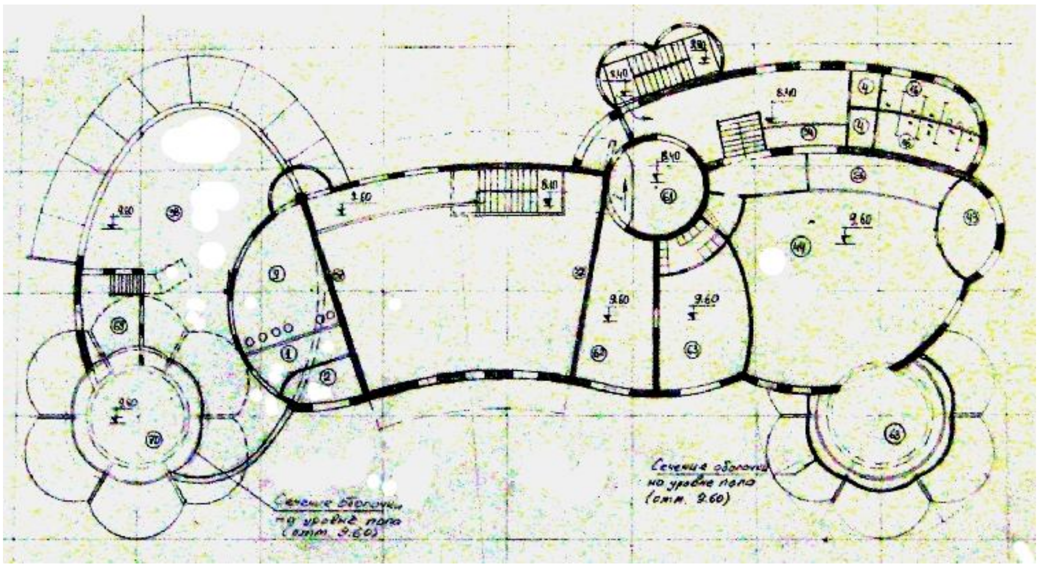
г

Затем было решено, оставляя поверхность зонтичной, упростить ее формообразование, принимая за опорные кривые линии меридианы базовой сферы, а за горизонтальные кривые – окружности постоянного радиуса, равного радиусу круглого отверстия в вершине. В результате получилось сооружение, изображенное на рис. 3.

Параметрические уравнения поверхностей, представленных на рис. 1 и 2, приведены в энциклопедии [1].



Фасад сооружения в осях А - А



План третьего этажа на отм. 9.60

Рис. 3

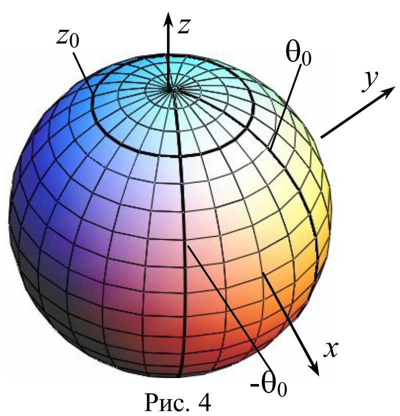


Рис. 4

Выведем уравнение новой циклической поверхности с плоскостью параллелизма, предложенной для внедрения.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса a, заданную параметрическими уравнениями:

$$x(u,\theta) = a\sin(u)\cos(\theta);$$
$$y(u,\theta) = a\sin(u)\sin(\theta);$$
$$z(u,\theta) = a\cos(u). \qquad (1)$$

Зададим на сфере сечение

$$z_0 = a\cos(u_0),$$

параллельное плоскости xOy. В сечении получаем окружность радиуса

$$R_0 = a\sin(u_0).$$

Зададим, также, на сфере сектор, образуемый меридианами $\theta = \pm\theta_0$ (рис. 4).

Окружность сферы в сечении z_0 принимаем в качестве образующей окружности циклической поверхности переноса. Поверхность переноса получаем движением образующей окружности параллельно плоскости xOy так, чтобы точки образующей окружности скользили по направляющим меридианам $\pm\theta_0$ на базовой сфере (рис. 5), т.е. образующая окружность при движении пересекается с направляющими меридианами сферы. Очевидно, при движении образующей окружности вдоль оси z происходит смещение центра образующей окружности вдоль оси x. На рис 5, *б* показано сечение циклической поверхности переноса при смещении образующей окружности вдоль оси z в положение $z(u)$. При этом центр образующей окружности поверхности переноса смещается по оси x на расстояние $x = r(u)$. Положение центра образующей окружности определяется из условия равенства в сечении $z(u)$ хорд сектора сферы и сектора образующей окружности

$$R(u)\sin(\theta_0) = R_0 \sin(V(u)) \quad \text{или}$$

$$\sin(u)\sin(\theta_0) = \sin(u_0)\sin(V(u)),$$

откуда

$$V(u) = \arcsin\left[\frac{R(u)\sin(\theta_0)}{R_0}\right] = \arcsin\left[\frac{\sin(\theta_0)}{\sin(u_0)}\sin(u)\right]. \qquad (2)$$

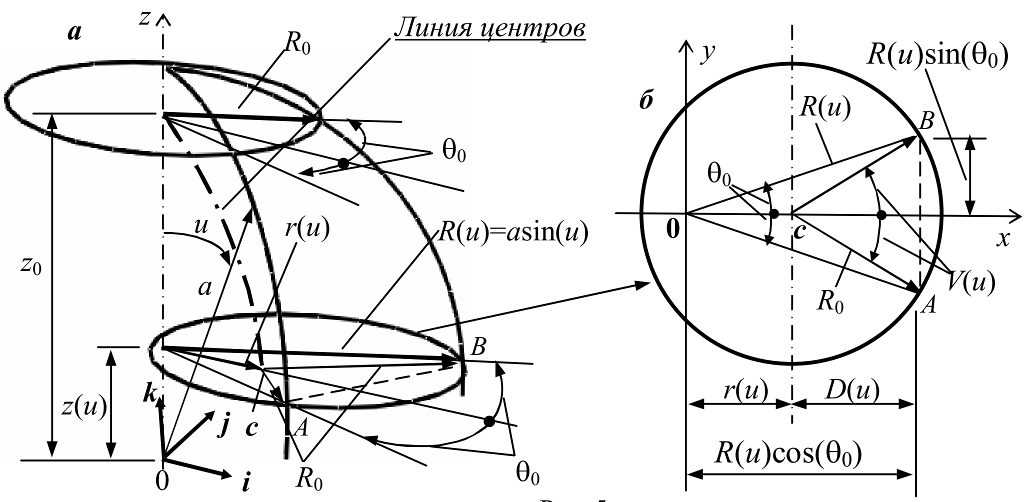


Рис. 5

Из рис. 5, *б* получаем

$$D(u) = \sqrt{R_0^2 - R^2(u)\sin^2(\theta_0)} = a\sqrt{\sin^2(u_0) - \sin^2(u)\sin^2(\theta_0)}\,, \qquad (3)$$

$$r(u) = R(u)\cos(\theta_0) - D(u). \qquad (4)$$

Из формулы (3) следует, что $R(u)\sin(\theta_0) = a\sin(u)\sin(\theta_0)$ не должно превышать радиуса образующей окружности $R_0 = a\sin(u_0)$, откуда

$$u \le \arcsin(\sin(u_0)/\sin(\theta_0)). \qquad (5)$$

Из формул (5) и (2) следует, что предельному значению координаты u соответствует значение углового параметра $V(u) = \pi/2$ и, следовательно, хорда AB равна диаметру образующей окружности $2R_0$. Ограничение (5) действует, если

$u_0 <\ \theta_0$**.** Экватор базовой сферы определяет плоскость симметрии поверхности переноса. Если $\theta_0 <\ u_0$**,** то в верхней и нижней частях базовой сферы получаем не соединяющиеся симметричные отсеки поверхности.

Уравнение линии центров циклической поверхности переноса, построенной на базе сферы $\boldsymbol{r}_c(u)$, получаем в виде

$$\boldsymbol{r}_c(u) = r(u)\boldsymbol{i} + z(u)\boldsymbol{k}\,. \tag{6}$$

Тогда, векторное уравнение циклической поверхности переноса с направляющими меридианами базовой сферы получаем в виде

$$\boldsymbol{\rho}(u,\theta) = \boldsymbol{r_c}(u) + R_0\boldsymbol{e}(\theta), \tag{7}$$

где $\boldsymbol{e}(\theta) = \boldsymbol{i}\cos(\theta) + \boldsymbol{j}\sin(\theta)$ – уравнение окружности единичного радиуса в плоскости xOy. Циклическая поверхность переноса на фоне базовой сферы представлена на рис. 6, *а* ($u_0 = \pi/6$; $\theta_0 = \pi/8$; $u = \pi/6 \div \pi/2$. На рис.6, *б* представлена циклическая поверхность переноса только с направляющими меридианами базовой сферы.

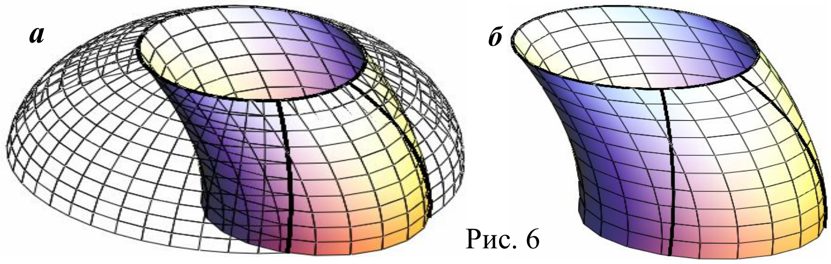


Рис. 6

Опорные меридианы базовой сферы не совпадают с системой координатных линий переноса, определяемых системой координат $\theta = const$ из уравнения циклической поверхности переноса в формуле (7).

Введем систему координат, включающую опорные меридианы базовой сферы. Для этого в сечении $u = const$ введем переменную $v(u,\theta)$:

$$v = v(u,\theta) = p(u)\theta\,; \qquad p(u) = V(u)/\,\theta_0 = \arcsin\left[\frac{\sin(\theta_0)}{\sin(u_0)}\sin(u)\right]/\,\theta_0\,. \tag{8}$$

Векторное уравнение циклической оболочки переноса в координатной системе, включающей опорные меридианы базовой сферы, получаем в виде:

$$\boldsymbol{\rho}(u,\theta)v = \boldsymbol{r_c}(u) + R_0\boldsymbol{e}(u,v)\,. \tag{9}$$

Здесь $\boldsymbol{e}(u,v) = \boldsymbol{e}[p(u)\theta] = \boldsymbol{i}\cos[p(u)\theta] + \boldsymbol{j}\sin[p(u)\theta]$.

При изменении угловой координаты θ в пределах $-\theta_0 \le \theta \le \theta_0$ получаем отсек циклической оболочки переноса, ограниченный направляющими меридианами базовой сферы (рис. 7, *а*). Если параметр $\theta_0 = \pi/\kappa$ (κ – целое число), то последовательно добавляя отсеки оболочки путем поворота исходного отсека на угол $\varphi = 2\theta_0 i$ (i = 1, 2,…, κ-1), получаем замкнутую оболочку зонтичного типа (рис. 7, *б, в*) ($u_0 = \pi/6$; $\theta_0 = \pi/6$).

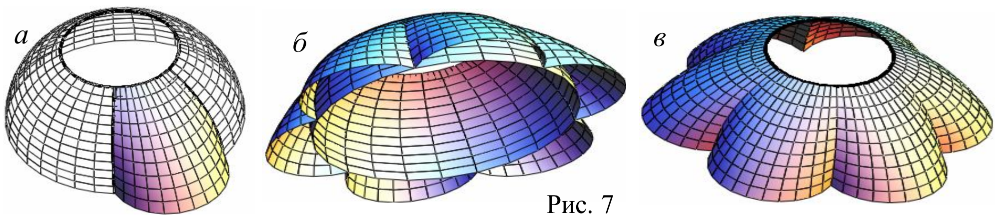


Рис. 7

Рассмотрим построение циклической поверхности переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базового тора. Параметрические уравнения тора (рис. 9):

$$x(u,\theta)=(b-a\sin(u))\cos(\theta);\quad y(u,\theta)=(b-a\sin(u))\sin(\theta);\quad z(u,\theta)=a\cos(u),\qquad (10)$$

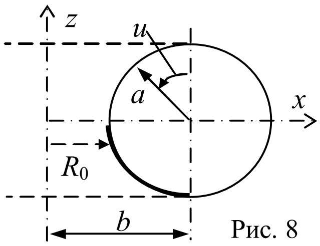


Рис. 8

где a – радиус образующей окружности тора; b – расстояние от оси вращения до центра образующей окружности.

За базовую поверхность при построении циклической поверхности переноса принимаем часть тора, образованную нижней частью вогнутой дуги окружности $u = \pi/2 \div \pi$. При этом базовая часть поверхности вращения является поверхностью отрицательной гауссовой кривизны.

Задаваясь сечением $u = u_0$, получаем образующую окружность циклической поверхности переноса

$$R_0 = b - a\sin(u_0).$$

Как и в случае базовой сферы, задаваясь сектором на $\pm\theta_0$ и перемещая образующую окружность радиуса R_0 по направляющим меридианам тора, получаем циклическую поверхность переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базового тора.

Проводя анализ образования циклической поверхности переноса на базовом торе по аналогии с образованием поверхности переноса на базовой сфере, можно отметить идентичность всех формул, если формулу

$$R(u) = a\sin(u)$$

для базовой сферы заменить для базового тора на формулу

$$R(u) = b - a\sin(u).$$

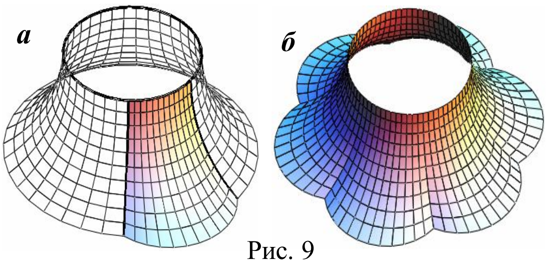


Рис. 9

На рис. 9 приведены: *а* – отсек циклической поверхности переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базового тора; *б* – зонтичная поверхность из циклически повторяющихся отсеков при

$$a = 1;\ b = 1{,}5;\ u_0 = \pi/2;\ \theta_0 = \pi/6;\ u = (\pi/2 \div \pi).$$

Литература

1. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.

DESIGN OF UMBRELLA SURFACES FROM THE PARTS OF TRANSLATIONAL SURFACES FORMED BY THE CIRCLE OF CONSTANT RADIUS

Ivanov V.N. and Krivoshapko S.N.

The geometrical research of translational surface formed by the circle of constant radius supported by two meridians of the sphere or the torus is presented.

The vector equations are derived in lines of translation and in lines two of which coincide with the given meridians. The opportunity of design of umbrella shells is illustrated by the example of the real building.

The umbrella surfaces of positive and negative Gauss curvatures are presented.

KEY WORDS: sphere, translational surface formed by the circle of constant radius, a meridian on the sphere, a vector equation of the surface, umbrella surfaces of positive and negative Gauss curvatures.