

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ РАЗНЫХ ВАРИАНТАХ СЦЕПЛЕНИЯ  
МЕЖДУ СЛОЯМИ И ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ**

С.Г. КУДРЯВЦЕВ, *кан. техн. наук, доцент*

Ю.М. БУЛДАКОВА, *аспирант*

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет»

424000, Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, дом 3

*KudryavcevSG@volgatech.net*

*Представлены результаты исследования напряженного состояния двухслойной полосы, лежащей на жестком основании, при разных условиях сцепления между слоями и нижней плоскости полосы с основанием.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** напряжение, двухслойная полоса, жесткое основание, анизотропия.

При проектировании многослойных конструкций из анизотропных материалов, с целью их рациональной работы при заданных внешних нагрузках, необходимо обеспечить оптимальное соотношение между толщиной и упругими характеристиками материала каждого слоя. Для однородно-изотропных многослойных сред данный класс задач рассматривался в ряде работ, например [1], для трансверсально-изотропного материала в работах [2,3].

Рассматривается плоская задача теории упругости для полосы бесконечной длины, лежащей на жестком основании (рис. 1). Толщина полосы  $h$ , составленной, в общем случае, из двух однородных анизотропных плоскопараллельных слоев, по длине не меняется. Нумерацию слоев выбираем снизу вверх. Для каждого слоя значения упругих характеристик материала, высота, напряжения и перемещения обозначены нижним индексом  $k$  ( $k = 1, 2$ ). Ось  $x$  направлена вдоль нижней плоскости полосы,  $y$  - перпендикулярно границе основания. Статическая поверхностная нагрузка прикладывается к верхней плоскости полосы.

При определении напряжений и перемещений в произвольной точке полосы исходим из уравнений, полученных в [4]. Искомые функции напряжений и

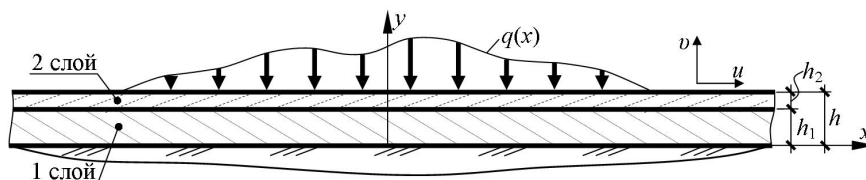


Рис. 1. Схема взаимодействия полосы и жесткого основания

перемещений на нижней плоскости каждого слоя определяются в зависимости от условий сцепления между слоями и нижней плоскости полосы с основанием. Проводится анализ напряженного состояния при следующих вариантах:

1) полоса скреплена с основанием:  $u_{(1)}(x, y = 0) = v_{(1)}(x, y = 0) = 0$ ; на границе контакта слоев выполняются условия полного сцепления:  $u_{(2)}(x, y = h_1) = u_{(1)}(x, y = h_1)$ ,  $v_{(2)}(x, y = h_1) = v_{(1)}(x, y = h_1)$ ,  $\sigma_{y(2)}(x, y = h_1) = \sigma_{y(1)}(x, y = h_1)$ ,  $\tau_{xy(2)}(x, y = h_1) = \tau_{xy(1)}(x, y = h_1)$ ;

2) полоса лежит на гладком основании:  $\tau_{(1)}(x, y = 0) = 0$ ,  $v_{(1)}(x, y = 0) = 0$ ; на границе контакта слоев выполняются условия полного сцепления:  $u_{(2)}(x, y = h_1) = u_{(1)}(x, y = h_1)$ ,  $v_{(2)}(x, y = h_1) = v_{(1)}(x, y = h_1)$ ,  $\sigma_{y(2)}(x, y = h_1) = \sigma_{y(1)}(x, y = h_1)$ ,  $\tau_{xy(2)}(x, y = h_1) = \tau_{xy(1)}(x, y = h_1)$ ;

3) полоса скреплена с основанием:  $u_{(1)}(x, y = 0) = v_{(1)}(x, y = 0) = 0$ ; отсутствуют силы сцепления между слоями  $\tau_{(2)}(x, y = h_1) = \tau_{(1)}(x, y = h_1) = 0$ ,  $v_{(2)}(x, y = h_1) = v_{(1)}(x, y = h_1)$ ,  $\sigma_{y(2)}(x, y = h_1) = \sigma_{y(1)}(x, y = h_1)$ ;

4) полоса лежит на гладком основании:  $\tau_{(1)}(x, y = 0) = 0$ ,  $v_{(1)}(x, y = 0) = 0$ ; отсутствуют силы сцепления между слоями:  $\tau_{(2)}(x, y = h_1) = \tau_{(1)}(x, y = h_1) = 0$ ,  $v_{(2)}(x, y = h_1) = v_{(1)}(x, y = h_1)$ ,  $\sigma_{y(2)}(x, y = h_1) = \sigma_{y(1)}(x, y = h_1)$ .

Для каждого варианта функции напряжений в первом и втором слое найдем, используя интегральное преобразование Фурье, через поверхностную нагрузку, приложенную перпендикулярно границе полосы, в виде несобственных интегралов, которые, ввиду их сложной структуры, не приводятся.

Результаты численного расчета приведены для двухслойной полосы, которая находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния (ширина полосы  $b=1$ ). На верхней плоскости в сечении  $x=0$  действует сила перпендикулярно границе полосы. Сила равномерно распределена по ширине полосы и ее интенсивность равна  $(-F)$ . Высота первого и второго слоев одинакова.

На рис. 2 представлены, для 4-го варианта, графики изменения безразмерного параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y = (\sigma_y \pi h) / F$  на линии контакта полосы с основанием в зависимости от упругих характеристик материала слоев (материал слоев принимается изотропный, коэффициент Пуассона для обоих материалов  $\nu=0,25$ ). Графики в увеличенном масштабе, когда  $\tilde{x} = (x/h) \geq 0$ , показаны на рис.3. Точками на кривых отмечены значения  $\tilde{x}$ , в которых  $\tilde{\sigma}_y = 0$ .

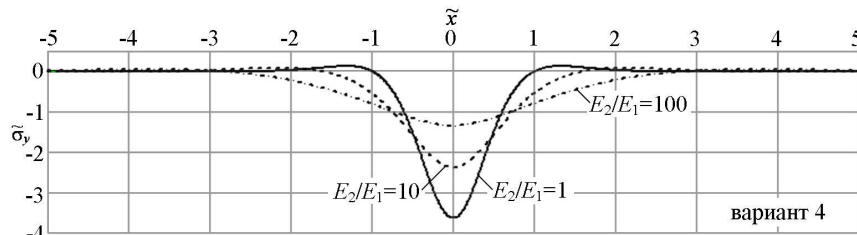


Рис. 2. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  на линии контакта полосы и основания

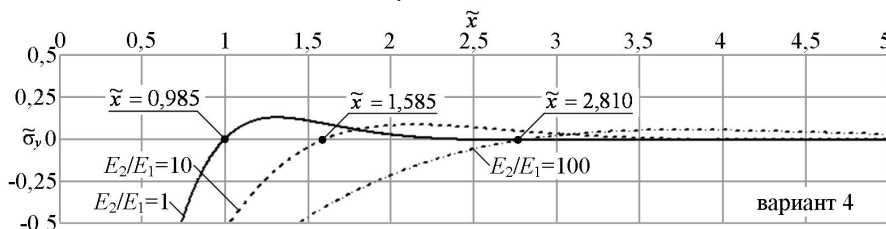


Рис. 3. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  на линии контакта полосы и основания

Из сравнения кривых на рис. 2 видно, что при увеличении модуля упругости материала верхнего слоя максимальное значение  $\tilde{\sigma}_y$  уменьшается, а размеры сжатой области по оси  $\tilde{x}$  увеличиваются. Данная закономерность характерна для всех рассматриваемых вариантов.

В таблице 1 приведены значения  $\tilde{\sigma}_y$  для сечения  $\tilde{x} = 0$  на линии контакта полосы с жестким основанием, в зависимости от отношения  $E_2/E_1$  и разных вариантов условий сцепления. Из данных следует, что параметр  $\tilde{\sigma}_y$  достигает наибольшего значения при отсутствии сил сцепления между слоями и нижней плоскости полосы с основанием. При отношении  $(E_2/E_1)=200$  значения  $\tilde{\sigma}_y$  практически совпадают для всех рассматриваемых вариантов.

Таблица 1. Значения параметра  $\tilde{\sigma}_y$  в сечении  $\tilde{x} = 0$ , на линии контакта полосы с основанием в зависимости от отношения  $E_2/E_1$  и разных условий сцепления

$E_2/E_1$	1	2	5	10	100	200
1 вариант						
$-\tilde{\sigma}_y$	2,558	2,392	2,142	1,934	1,243	1,065
2 вариант						
$-\tilde{\sigma}_y$	2,889	2,703	2,408	2,153	1,318	1,115
3 вариант						
$-\tilde{\sigma}_y$	3,359	3,077	2,632	2,285	1,329	1,120
4 вариант						
$-\tilde{\sigma}_y$	3,632	3,294	2,774	2,379	1,341	1,122

На рис. 4 показаны, для 4-го варианта, графики изменения параметра  $\tilde{\sigma}_y$  на линии контакта полосы и основания, когда  $(E_2/E_1) \leq 1$ , а в таблице приведены значения  $\tilde{\sigma}_y$  в сечении  $\tilde{x} = 0$ . На рис. 5, для  $\tilde{x} \geq 0$ , графики изображены в увеличенном масштабе. Из сравнения кривых и данных таблицы заключаем, что при уменьшении модуля упругости материала верхнего слоя значения  $\tilde{\sigma}_y$ , в сечении  $\tilde{x} = 0$ , возрастают, а сжатая зона вдоль оси  $\tilde{x}$  уменьшается.

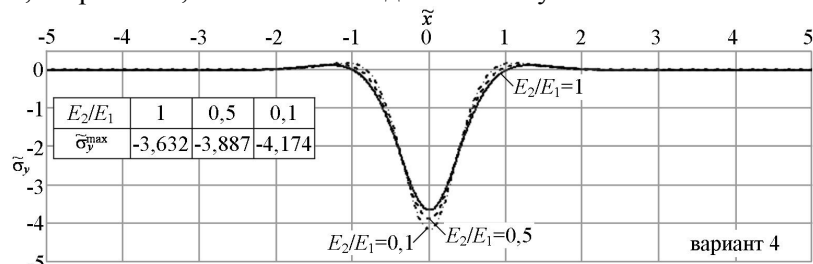


Рис. 4. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  на линии контакта полосы и основания

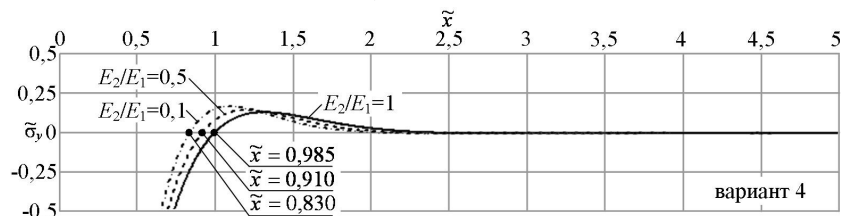


Рис. 5. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  на линии контакта полосы и основания

Характер изменения безразмерного параметра касательного напряжения  $\tilde{\tau}_{xy} = (\tau_{xy}\pi h)/F$  по высоте полосы  $\tilde{y} = (y/h)$  и разных значений  $\tilde{x}$ , для 4-го варианта, показан на рис. 6. Видно, что увеличение модуля упругости материала верхнего слоя приводит к увеличению значения  $\tilde{\tau}_{xy}$  в верхнем слое полосы и уменьшению - в нижнем.

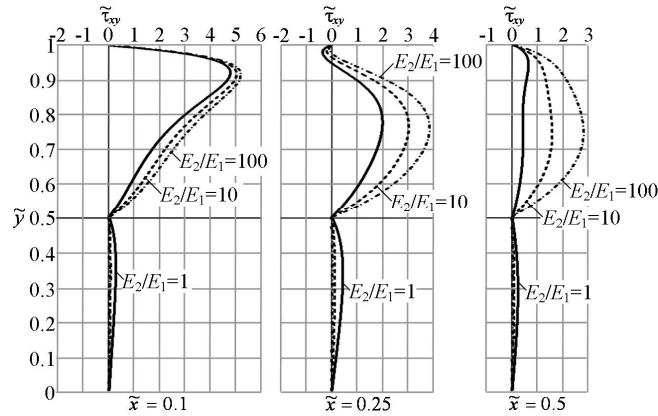


Рис. 6. Изменение параметра  $\tilde{\tau}_{xy}$  по высоте двухслойной полосы (вариант 4)

Результаты расчета параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_x = (\sigma_x\pi h)/F$ , для варианта 4, в зависимости от характеристик материала слоев и параметров  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  сведены в таблицу 2. Данные показывают, что наибольшие значения  $\tilde{\sigma}_x$ , по абсолютной величине, возникают в точках верхней плоскости полосы. В области, примыкающей к линии действия силы и  $\tilde{y}=1.0$ , параметр  $\tilde{\sigma}_x$  имеет отрицательное значение, которое при удалении от линии действия силы меняется на положительное. При увеличении отношения  $E_2/E_1$  область отрицательных значений параметра  $\tilde{\sigma}_x$  возрастает.

Таблица 2. Значения параметра  $\tilde{\sigma}_x$  в зависимости от упругих характеристик материала слоев и параметров  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  для варианта 4

	$\tilde{x} = 0.1$			$\tilde{x} = 0.25$			$\tilde{x} = 0.5$		
$E_2/E_1$	1	10	100	1	10	100	1	10	100
$\tilde{y}$	$\tilde{\sigma}_x$ во 2-м слое								
1.0	-7.80	-12.87	-22.95	2.54	-1.49	-10.84	2.62	1.16	-5.97
0.9	-3.54	-6.26	-12.22	-0.91	-3.18	-8.63	0.62	-0.28	-4.49
0.8	0.00	-0.97	-2.93	-0.88	-1.63	-3.43	-0.02	-0.29	-1.67
0.7	1.26	2.05	3.93	-0.02	0.70	2.47	-0.33	0.03	1.43
0.6	2.11	4.93	10.79	0.74	3.03	8.48	-0.55	0.35	4.56
0.5	3.35	8.94	19.19	1.24	5.31	14.72	-0.95	0.25	7.34
$\tilde{y}$	$\tilde{\sigma}_x$ в 1-м слое								
0.5	-1.68	-0.58	-0.13	-0.68	-0.35	-0.10	0.47	-0.02	-0.05
0.4	-0.50	-0.20	-0.05	-0.32	-0.15	-0.04	-0.07	-0.04	-0.03
0.3	0.08	0.01	0.00	-0.01	-0.01	0.00	-0.06	-0.02	0.00
0.2	0.36	0.13	0.03	0.19	0.09	0.03	-0.08	0.01	0.01
0.1	0.50	0.20	0.05	0.29	0.15	0.04	-0.07	0.03	0.02
0.0	0.53	0.22	0.05	0.33	0.16	0.05	-0.07	0.04	0.03

В табл. 3 приведены результаты расчета параметра  $\tilde{\sigma}_x$ , в точках верхней плоскости полосы ( $\tilde{y}=1.0$ ), в зависимости от вариантов сцепления между слоями и отношения  $E_2/E_1$ . Из анализа данных можно установить: при постоянной

величине отношения  $E_2/E_1$  и  $\tilde{y}=1.0$  условия сцепления между слоями несущественно влияют на значения  $\tilde{\sigma}_x$ .

Таблица 3. Значения параметра  $\tilde{\sigma}_x$  при  $\tilde{y}=1.0$  в зависимости от отношения  $E_2/E_1$  и разных вариантах сцепления между слоями

	$\tilde{x}=0.1$			$\tilde{x}=0.25$			$\tilde{x}=0.5$		
$E_2/E_1$	1	10	100	1	10	100	1	10	100
1 вариант									
$\tilde{\sigma}_x$	-7,78	-12,43	-22,44	2,32	-1,25	-10,39	2,05	0,95	-5,68
2 вариант									
$\tilde{\sigma}_x$	-7,61	-12,32	-22,61	2,51	-1,11	-10,53	2,27	1,19	-5,74
3 вариант									
$\tilde{\sigma}_x$	-7,72	-12,64	-22,55	2,60	-1,28	-10,45	2,63	1,28	-5,64
4 вариант									
$\tilde{\sigma}_x$	-7,80	-12,87	-22,95	2,54	-1,49	-10,84	2,62	1,16	-5,97

Графики изменения параметра  $\tilde{\sigma}_x$ , для 2-го варианта граничных условий, на линии контакта слоев показаны: для верхней полосы на рис. 7, нижней - на рис. 8. В таблицах приведены значения  $\tilde{\sigma}_x$  в сечении  $\tilde{x}=0$ . Точками на кривых обозначены значения  $\tilde{x}$ , в которых происходит смена знака. Сравнение кривых на рис. 6 и 7 показывает, что в двухслойной полосе, выполненной из разных материалов и полном сцеплении между слоями, нормальное напряжение  $\sigma_x$  терпит разрыв на линии контакта слоев.

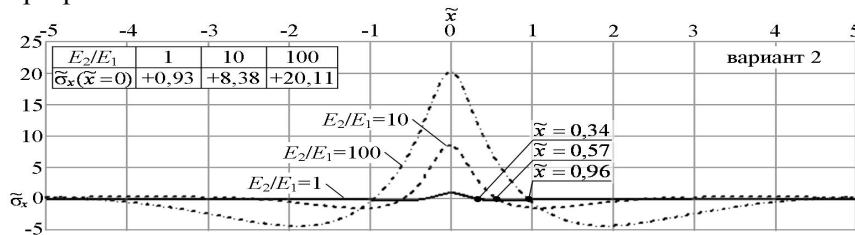


Рис. 7. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_x$  на линии контакта слоев для верхнего слоя

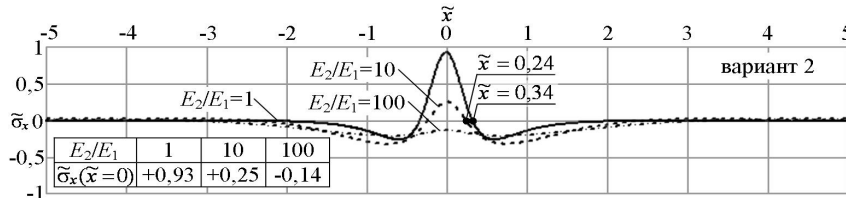


Рис. 8. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_x$  на линии контакта слоев для нижнего слоя

На рис. 9 представлены графики изменения параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$  на линии контакта полосы и основания, когда слой состоит из анизотропных материалов при условиях сцепления, соответствующих варианту 3. Кривая 1 построена для полосы, слой которой выполнены из одного изотропного материала (коэффициент Пуассона  $\nu=0,25$ ). Кривые 2 и 3 построены при значениях упругих характеристик материала верхнего слоя  $E_1 = 19,6$  ГПа,  $E_2 = 30,5$  ГПа,  $G_{12} = 4,75$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,14$ , нижнего –  $E_1 = 5,3$  ГПа,  $E_2 = 28,06$  ГПа,  $G_{12} = 2,16$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,33$ , приведенных в работе [5]. Цифрой 2 обозначена кривая, когда наибольшее значение модуля упругости материала обоих слоев направлено по оси  $y$ , цифрой 3 – по оси  $x$ . Высота первого и второго слоя одинакова.

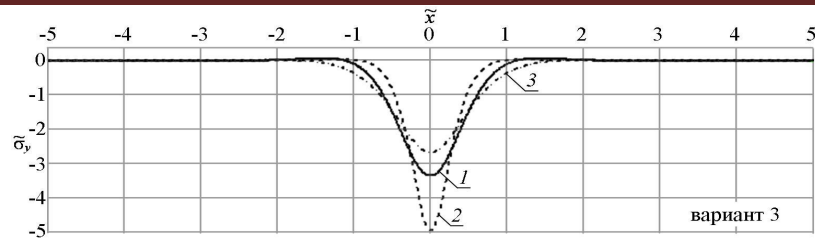


Рис. 9. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  на линии контакта полосы и основания

В табл. 4 приведены, для сечения  $\tilde{x}=0$  и разных параметрах  $\tilde{y}$ , значения  $\tilde{\sigma}_y$  в зависимости от вариантов сцепления между слоями. Нумерация кривых в таблице и последующих рисунках соответствует обозначениям на рис. 9. Сравнение данных показывает, что с увеличением  $\tilde{y}$  условия сцепления оказывают незначительное влияние на величину значений  $\tilde{\sigma}_y$ .

Таблица 4. Значения параметра  $\tilde{\sigma}_y$  в сечении  $\tilde{x}=0$  при разных вариантах сцепления и значениях  $\tilde{y}$

кривая	$\tilde{y} = 0$			$\tilde{y} = 0.25$			$\tilde{y} = 0.5$		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1 вариант									
$-\tilde{\sigma}_y$	2,558	4,803	2,457	3,096	5,453	2,900	4,233	6,288	3,865
2 вариант									
$-\tilde{\sigma}_y$	2,889	5,081	2,597	3,156	5,339	2,822	4,229	6,149	3,790
3 вариант									
$-\tilde{\sigma}_y$	3,359	4,947	2,662	3,928	5,653	3,182	4,544	6,346	3,999
4 вариант									
$-\tilde{\sigma}_y$	3,632	5,209	2,827	3,928	5,507	3,105	4,510	6,178	3,921

Характер изменения параметра напряжения  $\tilde{\tau}_{xy}$ , для 3-го варианта, на линии контакта полосы с основанием, показан на рис.10. Видно, что область распространения  $\tilde{\tau}_{xy}$  по длине полосы больше, когда слои состоят из анизотропных материалов. Графики изменения параметра  $\tilde{\sigma}_x$  на линии контакта слоев, для 3-го варианта, показаны: для верхнего слоя на рис. 11, нижнего – на рис. 12. Сравнивая кривые на рис. 7 и 11, 8 и 12 для изотропного материала при отношении  $E_2/E_1=1$ , можно отметить качественное и количественное отличия в характере распределения параметра  $\tilde{\sigma}_x$  на линии контакта слоев, в зависимости от вариантов сцепления между слоями.

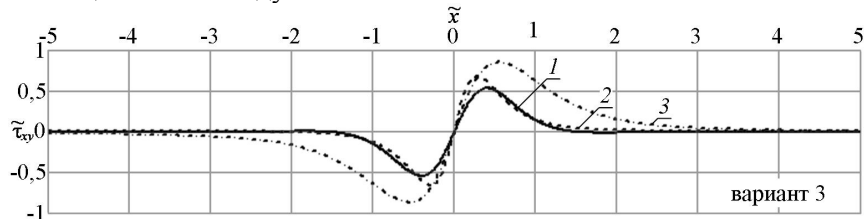


Рис. 10. Изменение параметра  $\tilde{\tau}_{xy}$  на линии контакта полосы и основания

В заключение отметим, что граничные условия для первого и третьего вариантов, при значении  $h_1 \rightarrow \infty$ , соответствуют задаче о расчете бесконечно длинной полосы, лежащей на упругом основании под действием поверхностной

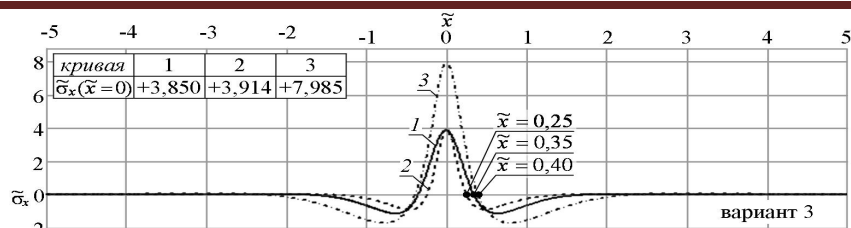


Рис. 11. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_x$  на линии контакта слоев для верхнего слоя

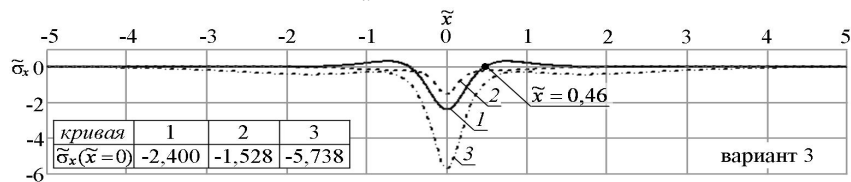


Рис. 12. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_x$  на линии контакта слоев для нижнего слоя

нагрузки. В первом варианте полоса скреплена с основанием, в третьем - сцепление отсутствует. Граничные условия для второго и четвертого вариантов аналогичны условиям, когда трехслойная полоса сжимается с двух сторон симметричной нагрузкой. Во втором варианте верхний и нижний слои одинаковой высоты скреплены со средним слоем, в четвертом – между слоями сцепление отсутствует.

#### Л и т е р а т у р а

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 492 с.
2. Fabrikant V.I. Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation // Journal of Engineering Mathematics. – 2011. – Vol. 70. – Issue 4. – P. 363 - 388.
3. Fabrikant V.I. Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation // Journal of Engineering Mathematics. – 2013. – Vol. 81. – Iss. 1. – P. 93-126.
4. Кудрявцев С.Г., Булдакова Ю.М. Взаимодействие анизотропной полосы и жесткого основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – №4. – С. 29-35.
5. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

#### References

1. Vlasov VZ, Leontyev NN. (1960). Beams, plates and envelopment on the elastic basis. M: State publishing house of physical and mathematical literature, 492 p.
2. Fabrikant VI. (2011). Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation. Journal of Engineering Mathematics. Vol.70, Iss. 4, p. 363 - 388.
3. Fabrikant VI. (2013). Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation. Journal of Engineering Mathematics. Vol.81, Iss. 1, p. 93 -126.
4. Kudryavtsev SG, Buldakova JM. (2012). Interaction of an anisotropic strip and rigid basis. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, №4, p. 29-35.
5. Vasilyev VV. Mechanics of designs from composite materials. M: Mechanical engineering, 1988. 272 p.

#### STRESS STATE RESEARCH OF TWO-LAYER STRIP AT DIFFERENT OPTIONS OF COUPLING BETWEEN LAYERS AND THE RIGID BASE

Kudryavtsev S.G., Buldakova J.M.

Results of research of a tension of the two-layer strip lying on the rigid base are presented, under different conditions of coupling between layers and the bottom plane of a strip with the base.

KEY WORDS: tension, two-layer strip, rigid base, anisotropy.