

## Теория упругости

### ТРЕЩИНЫ СО СВЯЗЯМИ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЕ

М.В. МИР-САЛИМ-ЗАДЕ, к.ф.-м.н., доцент  
Институт математики и механики НАН Азербайджана  
Азербайджан, AZ1129, Баку, ул. Н. Туси, д. 14, кв. 63,  
e-mail: mir-salim-zade@mail.ru

*Рассмотрена неограниченная перфорированная пластина, усиленная регулярной системой ребер. Пластина ослаблена периодической системой поверхностных трещин. Используется модель трещины при наличии областей, в которых берега трещины взаимодействуют. Краевая задача о равновесии периодической системы трещин сводится к сингулярному интегральному уравнению. Условие предельного равновесия трещин формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** перфорированная усиленная пластина, стрингеры, периодическая система трещин, трещины со связями между берегами.

**Введение.** Чтобы листовые конструкции имели достаточную прочность и жесткость, их часто изготавливают из тонких пластин, подкрепленных ребрами жесткости. Тонкие пластины зачастую имеют технологические отверстия, являющиеся концентраторами напряжений, что способствуют росту имеющихся в пластине трещин, и тем самым ее разрушению. Использование подкрепляющих элементов жесткости на пути распространения трещины, например, системы стрингеров, является одним из способов замедления роста трещин. Многие исследователи значительное внимание уделяли изучению разрушения пластины, усиленной регулярной системой стрингеров, рассматривая при этом трещину Гриффитса, т.е. трещину с невзаимодействующими краями [1-7]. В кончиках такой трещины имеется сингулярность полей напряжений и деформаций, вызванная математическим описанием состояния пластины в окрестности вершины трещины. Модели трещин с концевыми зонами соизмеримыми с длиной трещины без сингулярности в вершине трещины впервые были предложены в работах [8-9]. В структурно-неоднородных материалах при наличии вблизи трещины зон с нарушенной структурой в процесс разрушения вовлекается значительная часть трещины. Область разрушения в этом случае можно рассматривать как некоторую полосу (концевую зону), примыкающую к трещине и с частично нарушенными межчастичными связями материала.

**Постановка задачи.** В настоящей работе принято, что берега трещины в концевых зонах взаимодействуют. Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется связями между берегами (силами сцепления), которые распределены таким образом, что кончик трещины перестает быть особой точкой напряженно-деформированного состояния. Физическая природа сил сцепления зависит от материала, размеров трещин и концевых зон. Для математического описания сил сцепления принимается [10], что силы сцепления распределены в концевых зонах непрерывно, заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения задачи. Также считается, что неизвестный размер зоны действия сил сцепления соизмерим с длиной трещины. При этом рассматриваемые краевые задачи механики оказываются задачами теории упругости с неизвестной границей, которую требуется определить в ходе решения краевой задачи. Рассмотрим бесконечную упругую изотропную среду (пластину), ослабленную периодической системой отверстий и подкрепленную поперечными стрин-

герами из упругого материала (рис. 1). Перфорированная стрингерная пластина подвергается однородному растяжению на бесконечности вдоль стрингеров напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Под действием внешней нагрузки в связях между берегами концевых зон трещины будут возникать усилия  $q(x)$ . Заранее неизвестные усилия  $q(x)$  в силу симметрии задачи относительно оси абсцисс имеют только нормальную составляющую.

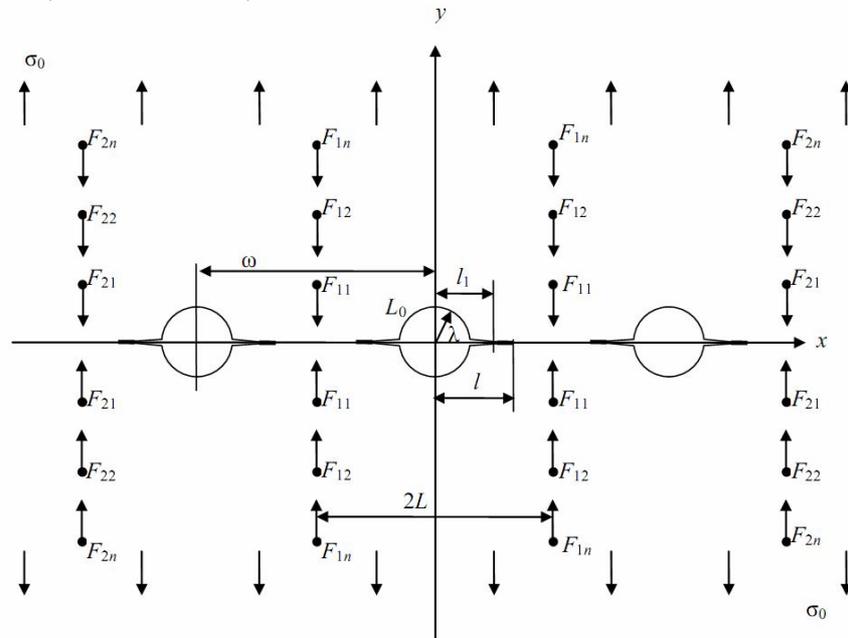


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Толщина стрингеров при деформации считается неизменной, также принимается, что стрингеры не подвергаются изгибу и работают лишь на растяжение; напряженное состояние в стрингерах является одноосным. Ослабление стрингеров вследствие наличия точек крепления не учитывается. Точки крепления расположены по всей длине стрингера на одинаковом расстоянии друг от друга и симметрично относительно поверхности пластины. Принимается, что точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с расстоянием между ними и другими характерными размерами. Листовой элемент и стрингеры взаимодействуют в одной плоскости и только в точках крепления. Действие стрингеров заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер со средой.

В пластине реализуется плоское напряженное состояние. Из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины. Центры отверстий расположены в точках

$$P_m = m\omega, \quad \omega = 2 \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Берега трещин вне концевых зон свободны от внешних нагрузок. Из-за симметрии граничных условий и с учетом геометрии области, занятой средой, напряжения являются периодическими функциями с периодом равным  $\omega$ . Граничные условия имеют вид

$$\text{на берегах трещин вне концевых зон} \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad (1)$$

$$\text{в концевых зонах} \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = q(x);$$

$$\text{на контурах круговых отверстий} \quad \sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0.$$

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим перемещения раскрытия трещины и усилия в связях. Это уравнение, без потери общности, можно представить в виде [10, 11]

$$v^+(x) - v^-(x) = C(x, q)q(x), \quad l_1 \leq |x - m\omega| \leq l, \quad (2)$$

где  $x$  – аффикс точек берегов трещины в концевой зоне;  $C(x, q)$  представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей.

На основании формул Колосова-Мусхелишвили [12] и граничных условий (1) решение задачи сводится к определению двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = 0, \quad (3)$$

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\Phi'(x) + \overline{\Psi(x)} = f(x),$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ;  $f(x) = q(x)$  в концевых зонах,  $f(x) = 0$  вне концевых зон.

**Метод решения краевой задачи.** Решение краевой задачи (3) ищется в виде:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z). \quad (4)$$

Комплексные потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  определяют напряжения в сплошной подкрепленной пластине, находящейся под действием растягивающей нагрузки  $\sigma_0$  и сосредоточенных сил  $F_{mn}$  [12]:

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right),$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right) + \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{\overline{C_3}}{C_2^2} - \frac{C_3}{C_1^2} \right).$$

Здесь  $h$  – толщина пластины;  $\kappa$  – постоянная Мусхелишвили:  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала пластины;  $C_1 = z - mL + iny_0$ ;  $C_2 = z - mL - iny_0$ ;  $C_3 = mL + iny_0$ ; штрих у знака суммы означает, что при суммировании исключается индекс  $m = n = 0$ .

Функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$ , соответствующие неизвестным нормальным смещениям вдоль трещины, ищутся в явном виде [13]:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt, \quad (5)$$

$$\Psi_1(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt.$$

Здесь  $L_1 = [-l, -\lambda] + [\lambda, l]$ ; функция  $g(x)$  характеризует производную раскрытия берегов трещины:

$$\frac{1+\kappa}{2\mu} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)],$$

где  $\mu$  – модуль сдвига стрингерной пластины.

Комплексные потенциалы  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  будем искать [13] в следующем виде:

$$\Phi_2(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (6)$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

где  $\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega}z\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ ;  $S(z) = \sum'_m \left(\frac{P_m}{(z-P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m}\right)$ .

Так как выполняются условия периодичности, краевые условия, из которых определяются неизвестные коэффициенты  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$ , вырождаются в одно функциональное уравнение на контуре  $\tau = |\lambda|$ . Из условий симметрии относительно координатных осей находим

$$\text{Im} \alpha_{2k+2} = 0, \quad \text{Im} \beta_{2k+2} = 0 \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Из условия постоянства главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области, занятой средой, имеем

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2 \beta_2 \lambda^2}{24}.$$

Граничное условие (3) представим в виде:

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\tau \Phi'_2(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = f_1(\theta) + if_2(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta), \quad (7)$$

где

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_0(\tau) - \overline{\Phi_0(\tau)} + [\tau \Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta},$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \overline{\Phi_1(\tau)} + [\tau \Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}.$$

Чтобы построить уравнения относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$ , функции  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  разлагаются в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ . Подставляя в (6) вместо функций  $\Phi_2(z)$ ,  $\overline{\Phi_2(z)}$ ,  $\Phi'_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  их разложения в ряды Лорана, а вместо функций  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$  и  $\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)$  их разложения в ряды Фурье на контуре  $|\tau| = \lambda$  и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $e^{i\theta}$ , получаем две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$ :

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j, \quad (8)$$

$$\beta_{2k} = \frac{1}{K_1} \left( -M_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right),$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3) \alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - M_{-2j-2}.$$

Потребовав, чтобы функции (4)-(6) удовлетворяли краевому условию (3) на берегах трещин в концевых зонах, после ряда преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $g(x)$ :

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \text{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dx + H(x) = f(x), \quad (9)$$

где

$$H(x) = \Phi_*(x) + \overline{\Phi_*(x)} + x \Phi'_*(x) + \Psi_*(x),$$

$$\Phi_*(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x), \quad \Psi_*(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x).$$

Функции (4) и сингулярное интегральное уравнение (9) содержат неизвестные величины сосредоточенных сил  $F_{mn}$ . Для их определения используем закон Гука и метод «склеивания» двух асимптотик искомого решения. Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы  $F_{mn}$ , действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, равна

$$F_{mn} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{m,n} \quad (m, n=1, 2, \dots),$$

где  $E_s$  – модуль Юнга материала стрингера;  $A_s$  – площадь поперечного сечения стрингера;  $2y_0 n$  – расстояние между точками крепления;  $\Delta v_{m,n}$  – относительное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Примем что, относительное упругое смещение точек  $z = mL + i(y_0 n - a_0)$  и  $z = mL - i(y_0 n - a_0)$ , где  $a_0$  – радиус точек крепления (площадки сцепления), равно относительному смещению точек крепления  $\Delta v_{m,n}$ . Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет найти решение поставленной задачи. С помощью комплексных потенциалов и формулы Колосова-Мусхелишвили для перемещений находим относительное смещение  $\Delta v_{p,r}$ :

$$\Delta v_{p,r} = \Delta v_{p,r}^{(0)} + \Delta v_{p,r}^{(1)} + \Delta v_{p,r}^{(2)}.$$

Здесь

$$\Delta v_{p,r}^{(0)} = \frac{1}{2\pi\mu h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \kappa \ln \frac{(p-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p-m)^2 L^2 + C^2} + \frac{2(r-n)y_0 C(2p(p-m)L^2 + a_0 C)}{((p-m)^2 L^2 + C^2)((p-m)^2 L^2 + a_0^2)} \right) + \frac{\sigma_0}{4\mu} (1+\kappa)(ry_0 - a_0),$$

$$\Delta v_{p,r}^{(1)} = \frac{1+\kappa}{\mu} \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left[ \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - pL) \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} C) - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{\pi pL}{\omega} \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} C) \right] dt -$$

$$- \frac{C}{\mu} \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left[ \frac{\sin^2 \alpha_1 (\operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1)}{\sin^2 \alpha_1 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} \right] dt,$$

$$\Delta v_{p,r}^{(2)} = \frac{1}{\mu} \left( (\kappa - 1)(ry_0 - a_0)a_0 + (1+\kappa) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} + \right.$$

$$+ (\kappa - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{(2j+1)} \rho_2^{2k+1} \sin(2j+1)\alpha -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{(2j+1)} \rho_2^{2k+1} \sin(2j+1)\alpha +$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+2k+2}{(2j+1)} r_{j,k} \rho_2^{2k+1} \sin(2j+1)\alpha \right),$$

где  $C = (r-n)y_0 - a_0$ ;  $\alpha_1 = \frac{\pi}{\omega}(t - pL)$ ;  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{ry_0 - a_0}{pL}$ ;

$$\rho_2^2 = (pL)^2 + (ry_0 - a_0)^2; r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}}; r_{0,0} = 0.$$

Зная относительное смещение  $\Delta v_{m,n}$ , искомые величины сосредоточенных сил определяем из системы

$$F_{pr} = \frac{E_s A_s}{2y_0 r} \Delta v_{p,r} \quad (p,r=1,2,\dots), \quad (10)$$

которая вследствие периодичности задачи вырождается в одну бесконечную алгебраическую систему.

Алгебраические системы (8), сингулярное интегральное уравнение (9) и уравнение (10) связаны и должны решаться совместно. Из их решения с учетом ограниченности напряжений в пластине находятся искомая функция  $g(x)$ , величины сосредоточенных сил  $F_{mn}$  и длина концевой зоны трещин.

**Численное решение и анализ результатов.** Сингулярное интегральное уравнение (9) с помощью разложений функций

$$\frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z = \frac{1}{z} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{z^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}$$

в основной полосе периодов можно привести к виду:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \left( \frac{1}{t-x} + K(t-x) \right) g(t) dt + H(x) = f(x), \quad \text{где } K(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}. \quad (11)$$

После замены переменных и некоторых преобразований, с учетом того, что функция  $g(x)$  нечетная, интегральное уравнение (11) можно привести к стандартному виду на отрезке  $[-1,1]$ . Для построения решения сингулярного интегрального уравнения (11) используется метод прямого решения таких уравнений [14, 15].

Сингулярное интегральное уравнение (11), кроме особенности в ядре Коши, имеет также неподвижную особенность в точке выхода трещины на поверхность кругового отверстия. Функция  $g(x)$  имеет в таких точках  $x=\pm\lambda$  особенность, отличающуюся от корневой. Характер этой особенности можно установить из анализа интегрального уравнения (11) [16]. Интеграл  $\int_{\lambda}^l g(t) dt$ , в от-

личие от случая внутренней трещины, равен постоянной отличной от нуля, которая выражается через раскрытие трещины на поверхности кругового отверстия и должна быть определена после решения сингулярного интегрального уравнения (11).

Для численного решения сингулярного интегрального уравнения (11) используется упрощенный численный метод [14, 15, 17, 18], использование метода основанного на базе квадратурной формулы Гаусса-Якоби для решения сингулярного интегрального уравнения (11) не оправдывает себя, так как из-за громоздкости выражений для функций, входящих в интегральное уравнение, установление истинной особенности функции  $g_*(\eta)$  на конце затруднительно. Представим решение в виде:

$$g_*(\eta) = g_0(\eta) \sqrt{1-\eta^2},$$

где  $g_0(\eta)$  – неизвестная регулярная функция. С помощью квадратурных формул уравнение (11) можно свести к системе  $M+1$  алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[ \frac{1}{\tau_m - \eta_r} + B(\tau_m, \eta_r) \right] = \pi [H(\eta_r) + f_*(\eta_r)]. \quad (12)$$

Здесь  $\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1}$  ( $m=1,2,\dots,M$ ),  $\eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)}\pi$  ( $r=1,2,\dots,M+1$ ).

Полученная алгебраическая система (12) обеспечивает удовлетворение дополнительного условия, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций [16].

В правую часть системы (12) входят неизвестные значения напряжений в узловых точках, принадлежащих концевым зонам трещин. Для определения неизвестных напряжений в связях, возникающих на берегах концевых зон, используется условие (2). Его можно записать в виде:

$$g(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [C(x,q)q(x)], \text{ или } -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_l^x g(x)dx = C(x,q)q(x). \quad (13)$$

Требую выполнения условий (13) в узловых точках, содержащихся в концевой зоне трещины, получаем алгебраическую систему из  $M_1$  ( $M_1$  – число узловых точек) уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 g_0(\eta_1) &= C(\eta_1, q(\eta_1))q(\eta_1), \\ C_1 (g_0(\eta_1) + g_0(\eta_2)) &= C(\eta_2, q(\eta_2))q(\eta_2), \\ &\dots\dots\dots, \\ C_1 \sum_{m=1}^{M_1} g_0(\eta_m) &= C(\eta_{M_1}, q(\eta_{M_1}))q(\eta_{M_1}), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $C_1 = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi(l-\lambda)}{M}$ .

Так как размер концевой зоны неизвестен, объединенная алгебраическая система (14) нелинейна даже при линейном деформировании межчастичных связей. Поэтому целесообразно применить обратный способ решения нелинейной алгебраической системы, а именно принимаем размер концевой зоны заданным и находим соответствующий ему параметр нагружения  $\sigma_0$ . Параметр нагружения входит в алгебраическую систему линейным образом. В случае нелинейного деформирования связей используем итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [19]. При этом принимается, что закон деформирования связей является линейным при  $v^+ - v^- \leq v_*$ , где  $v_*$  – характеристика материала пластины. Вначале решается система уравнений для линейно-упругих связей. Если на части концевой зоны трещины справедливо условие  $v^+ - v^- > v_*$ , выполняются последующие итерации.

Система уравнений решается в каждом приближении для квазиупругих связей с эффективной податливостью, переменной вдоль берегов концевой зоны трещины и зависящей от полученной на предыдущей итерации величины усилий в связях. Эффективная податливость находится подобно текущему модулю в методе переменных параметров упругости [20]. Как только найденные на двух последовательных итерациях усилия будут достаточно близки, процесс последовательных приближений останавливается. Нелинейная часть кривой деформирования представлялась в форме билинейной зависимости [21], восходящий участок которой соответствует деформированию связей с их максимальным натяжением ( $0 < v^+ - v^- \leq v_*$ ). В случае  $v^+ - v^- > v_*$  закон деформирования связей описывается нелинейной зависимостью, определяемой точками

$(v_*, \sigma_*)$  и  $(\delta_{cr}, \sigma_c)$ . При  $\sigma_c \geq \sigma_*$  имеется возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Для определения предельно равновесного состояния трещины, при котором происходит ее рост, используется условие:

$$v^+ - v^- = \delta_{cr},$$

где  $\delta_{cr}$  – предельная вытяжка связи.

Находим смещение  $v(x,0)$  на берегах концевой зоны:

$$v(x,0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l}^x g(x) dx.$$

Раскрытие берегов трещин при  $x=l_1$  будет определяться выражением:

$$v(-l_1,0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l}^{-l_1} g(x) dx.$$

Предельная нагрузка, при которой происходит рост трещины, определяется из условия:

$$C(l_1, q(l_1))q(l_1) = \delta_{cr}. \quad (15)$$

При проведенных расчетах было принято  $M = 40$ . Число точек крепления и стрингеров принималось равным семи. Пластина считалась выполненной из сплава В95 ( $E=7,1 \cdot 10^4$  МПа), а стрингеры из композита алюминий-сталь ( $V_f=40\%$ ,  $E_s=11,5 \cdot 10^4$  МПа). На рис. 2 показаны зависимости безразмерной длины концевой зоны  $(l-l_1)/2L$  от безразмерной нагрузки  $\sigma_0/\sigma_s$  для следующих значений свободных параметров  $\nu=0,3$ ;  $A_s/y_0h = 1$ ;  $r/L = 0,01$ ;  $y_0/L = 0,25$ ;  $l/L = 0,75$ ;  $\lambda = 0,3$  (кривая 1),  $\lambda = 0,4$  (кривая 2),  $\lambda = 0,5$  (кривая 3). На рис. 3 показаны зависимости безразмерной предельной нагрузки  $\sigma_* = \sigma_0/\sigma_s$  от безразмерной длины трещины  $l_* = 8\sigma_s l / \pi E \delta_c$  (диаграмма остаточной прочности) для следующих значений свободных параметров  $\nu = 0,3$ ;  $r/L = 0,01$ ;  $\lambda = 0,4$ ;  $y_0/L = 0,15$  (кривая 1),  $0,25$  (кривая 2);  $0,5$  (кривая 3).

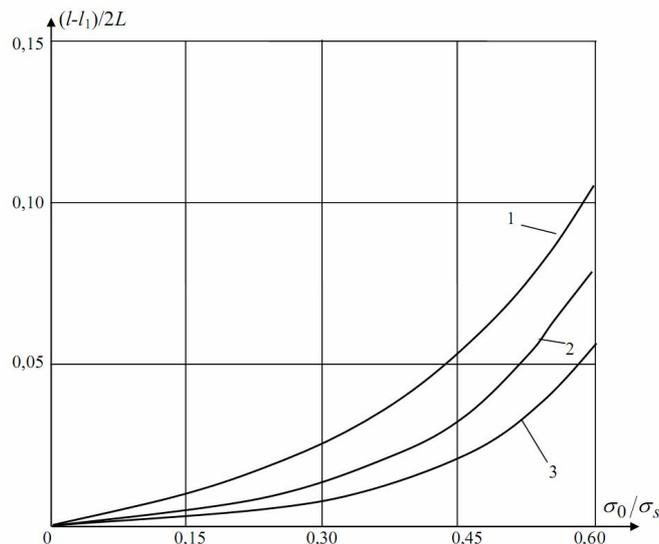


Рис. 2. Зависимости безразмерной длины концевой зоны  $(l-l_1)/2L$  от безразмерной нагрузки  $\sigma_0/\sigma_s$  для значений свободных параметров  $\nu = 0,3$ ;  $A_s/y_0h = 1$ ;  $r/L = 0,01$ ;  $y_0/L = 0,25$ ;  $l/L = 0,75$ ;  $\lambda = 0,3$  (кривая 1),  $\lambda = 0,4$  (кривая 2),  $\lambda = 0,5$  (кривая 3).

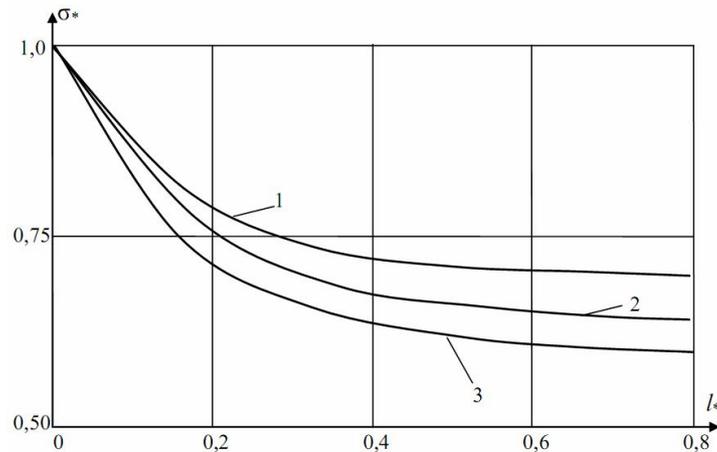


Рис. 3. Зависимости безразмерной предельной нагрузки  $\sigma_* = \sigma_0/\sigma_s$  от безразмерной длины трещины  $l_* = 8\sigma_s/l/\pi E\delta_c$  для свободных параметров  $\nu = 0,3$ ;  $r/L = 0,01$ ;  $\lambda = 0,4$ ;  $y_0/L = 0,15$  (кривая 1); 0,25 (кривая 2); 0,5 (кривая 3).

Как показывают расчеты, чем чаще расположены точки крепления, тем выше предельные разрушающие нагрузки.

Исследование перфорированной стрингерной пластины, ослабленной периодической системой прямолинейных трещин, исходящих из контуров отверстий, с помощью модели трещины с взаимодействующими берегами сводится к параметрическому анализу алгебраических систем (8), (9), (12), (15).

**Заключение.** Модель трещины со связями между берегами дает возможность исследовать основные закономерности распределения усилий в концевых зонах, оценить повышение прочности перфорированной стрингерной пластины связанное с учетом взаимодействия берегов в концевых зонах, провести анализ предельно равновесного состояния трещины с помощью деформационного критерия. Проведенный анализ позволил определить предельный размер концевых зон трещины, допустимую внешнюю нагрузку, зависимость остаточной прочности перфорированной стрингерной пластины. Модель трещины с концевыми зонами, в которых берега трещины взаимодействуют, позволяет с единых позиций рассматривать процесс разрушения, включая стадии зарождения дефекта типа трещины, формирования и роста трещины.

#### Л и т е р а т у р а

1. Брок Д. Основы механика разрушения. М.: Высшая школа, 1980. 368 с.
2. Партон В.З. Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. Мирсалимов В.М. Некоторые краевые задачи конструкционного торможения трещин // Физико-химическая механика материалов. 1986. Т. 22, №1, с. 84-88.
5. Максименко В.Н. Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия // ПМТФ. 1988, №2, с. 133-140.
6. Мир-Салим-заде М.В. Разрушение изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров // Механика композитных материалов. 2007. Т. 43, №1, с. 59-72.
7. Мир-Салим-заде М.В. Разрушение перфорированной стрингерной пластины // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. №4, с. 59-62.
8. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. 1959. Т. 5. №4, с. 391-401.
9. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. V.8, №2, p. 100-108.

10. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. 2003. V.70, №14. P. 1741-1987.
11. *Mir-Salim-zadeh M.V.* Fracture of an elastic rib reinforced plate weakened by a circular cracked hole // Int. J. of Fracture. 2003, Vol. 122, №1-2, p. 113-117.
12. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
13. *Мир-Салим-заде М.В.* Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // ПМТФ. 2010. Т. 51, №2, с. 269-279
14. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
15. *Мирсалимов В.М.* Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
16. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 551 с
17. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. К.: Наук. думка, 1991. 416 с.
18. *Мирсалимов В.М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку.: ЭЛМ, 1984. 124 с.
19. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат., 1948. 376 с.
20. *Биргер И.А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Механика. 1965. №2. с.113-119.
21. *Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н.* Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычисл. мех. сплош. сред. 2009. Т. 2, №2. с. 22-39.

#### References

1. *Broek D.*(1980). Elementary engineering fracture mechanics. Leyden: Noordhoff international publishing, 368 p.
2. *Parton VZ, Morozov EM.*( 1985). Elastic-plastic fracture mechanics. Moscow: Nauka, 504 p.
3. *Cherepanov GP.* (1979). Mechanics of brittle fracture. New York: Mc Graw-Hill.
4. *Mirsalimov VM.* (1986). Some problems of structural arrest of cracks. Materials Science, Vol. 22, Issue 1, January–February, p. 81-85.
5. *Maksimenko VN.* (1988). Influence of riveted stiffeners on crack development around a hole. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 29, Issue 2, March–April, p. 287-293.
6. *Mir-Salim-zada MV.* (2007). Fracture of an Isotropic Medium Strengthened with a Regular System of Stringers. Mechanics of composite materials, Vol. 43, N. 1, January-February, p. 41-50.
7. *Mir-Salim-zada MV.* (2011). Fracture of perforated stringer plate // Mechanics of machines, mechanisms and materials, No. 4 (17), p. 59-62.
8. *Leonov MYa, Panasyuk VV.* (1959). The development of the smallest cracks in the solid. Applied Mechanics, Vol. 5. No 4. p. 391-401.
9. *Dugdale DS.* (1960). Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. and Phys. Solids, V. 8. №2, p. 100-108.
10. The special issue: Cohesive models. Eng. Fract. Mech. 2003. V.70, №14. p. 1741-1987.
11. *Mir-Salim-zada MV.* (2003). Fracture of an elastic rib reinforced plate weakened by a circular cracked hole. Int. J. of Fracture., Vol. 122, № 1-2, p. 113-117.
12. *Muskhelishvili NI.* (1977). Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Amsterdam: Kluwer, 700 p.
13. *Mir-Salim-zada MV.* (2010). Modeling of partial closure of cracks in a perforated isotropic medium reinforced by a regular system of stringers. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 51, Issue 2, March, p. 269-279.
14. *Panasyuk VV, Savruk MP, Datsyshyn AP.* (1976). The stress distribution around cracks in plates and shells. Kiev Naukova Dumka, 443 p.
15. *Mirsalimov VM.* (1987). Non-one-dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 256 p.
16. *Muskhelishvili NI.* ( 1968). Singular integral equation. Moscow: Nauka, 551 p.
17. *Panasyuk VV*(1991). Mechanics of quasibrittle fracture of material. Kiev: Nauk. Dumka, 416 p.
18. *Mirsalimov VM.* (1984). Fracture of elasto-and-elastoplastic bodies with cracks. Baku: Science, 124 p.
19. *Il'yushin AA.* (1948). Plasticity. Moscow and Leningrad. Gostekhizdat, 376 p.
20. *Birger IA.* (1965). The design of structures allowings for plasticity and creep. Izv. Akad. Nauk SSSR Mekhanika, No2, p. 113 – 119.
21. *Goldstein RV, Perelmuter MN.* (2009). Modeling of fracture toughness of composite materials. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred., Vol. 2, No 2, p. 22-39.

---

**CRACKS WITH INTERFACIAL BONDS IN A PERFORATED STRINGER PLATE**

M.V. Mir-Salim-zade

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

An unlimited perforated plate, reinforced by a regular system of ribs is considered. Plate weakened by a periodic system of surface cracks. The model of a crack with end zones in which crack surfaces interact is used. The boundary value problem for the equilibrium of the periodic system of cracks is reduced to a singular integral equation. The condition of the limit equilibrium cracks is formulated taking account to the criterion of the limit traction of bonds.

**KEYWORDS:** perforated reinforced plate, stringers, periodic system of cracks, cracks with interfacial bonds.

