

Расчет тонких упругих оболочек

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК

В.А. БАЖЕНОВ *д-р техн. наук, акад. АПНУ,*

Н.А. СОЛОВЕЙ *д-р техн. наук, проф.,*

О.П. КРИВЕНКО *канд. техн. наук, ст. н. с.,*

О.А. МИЩЕНКО *ассистент*

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Воздухофлотский пр-т, 31, г. Киев, 03037, Украина; e-mail: olakor@ukr.net

Изложены основы метода решения статических задач геометрически нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения тонких упругих неоднородных оболочек, имеющих сложную форму срединной поверхности, геометрические особенности по толщине, многослойную структуру материала и находятся в условиях термосилового нагружения. Подход основан на геометрически нелинейных соотношениях трехмерной теории термоупругости и использовании моментной схемы конечных элементов. Дано численное обоснование метода. Выполнено сравнение решений с решениями других авторов и в программных комплексах ЛИРА и SCAD.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: геометрически нелинейное деформирование, устойчивость, тонкая упругая неоднородная оболочка, термосиловая нагрузка

Введение.

Современные тенденции развития строительной механики и практика проектирования тонкостенных оболочечных конструкций побуждают разрабатывать уточненные численные методы исследования нелинейного деформирования и устойчивости оболочек различного типа. Реальные оболочечные конструкции для повышения надежности, снижения материалоемкости, по технологическим соображениям проектируются в виде неоднородных систем: гладкой и ступенчато-переменной толщины, с изломами, подкрепленными ребрами и накладками, ослабленными отверстиями, выемками и каналами, гранеными, многослойными. Температурные поля могут вызывать существенные деформации и влиять на форму и момент потери устойчивости. В работе с единых позиций пространственной геометрически нелинейной теории термоупругости на основе метода конечных элементов (МКЭ) описываются метод и результаты исследований статических задач нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения широкого класса тонких упругих неоднородных оболочек различной формы и структуры при действии силовых и температурных полей [4-12,32,50-55,61-64].

Проблеме устойчивости оболочек посвящено множество работ, в которых из-за сложности решения рассматриваемых задач приняты различные упрощения [1,14,17,19,22,24,25,31]. Вопросам термоустойчивости оболочек даже простых геометрических форм посвящено небольшое число работ [2,15,16,19,22,42,46]. Проблеме использования трехмерного подхода при исследовании оболочек посвящены монографии [20,28,37,47], публикации [29,34,36] и доклады на научных конференциях [33,38,39], количество которых в последнее время увеличивается. Нелинейное деформирование и потеря устойчивости неоднородных оболочек в трехмерной постановке рассматривались в ограниченном числе работ [9,36,37]. В МКЭ данный подход связывается с созданием расчетных схем, основанных на использовании универсальных пространственных конечных элементов (КЭ) [13,29,36,37,39,52,61-64].

§1. Постановка задачи.

1.1. Исходные положения и гипотезы. Рассматриваются статические задачи исследования напряженно-деформированного состояния (НДС), устойчивости и закритического поведения широкого класса тонких неоднородных оболочек при действии внешних силовых нагрузок и неравномерного объемного нагрева. НДС оболочки и составляющих ее конструктивных элементов на всех этапах нагружения как в докритической, так и в закритической областях рассматривается с позиций геометрически нелинейных соотношений пространственной теории термоупругости с учетом всех нелинейных членов, всех компонент тензоров деформаций и напряжений. Под неоднородностью обо-

лочка понимается два вида ее особенностей: 1) геометрические особенности в виде непрерывно - и ступенчато-переменной толщины; 2) структурные неоднородности материала вдоль толщины и в плане в виде комбинации многослойных пакетов. Обшивка оболочки и подкрепляющие ее ребра могут состоять из произвольного числа слоев переменной толщины, соединенных между собой в единый пакет. Каждый слой материала может быть анизотропным и разным. Таким образом, тонкие переменной толщины многослойные оболочки сложной геометрической формы рассматриваются как трехмерные тела, которые могут быть подкреплены ребрами и накладками, ослаблены выемками, каналами и отверстиями, иметь изломы срединной поверхности (рис. 1). Соотношения, описывающие НДС оболочки, представляются в местной криволинейной x^i с базисом $\bar{e}_i = \partial \bar{r} / \partial x^i$ и глобальной декартовой x^k с базисом $\bar{e}_k = \partial \bar{r} / \partial x^k$ системе координат (рис. 2) [61,64].

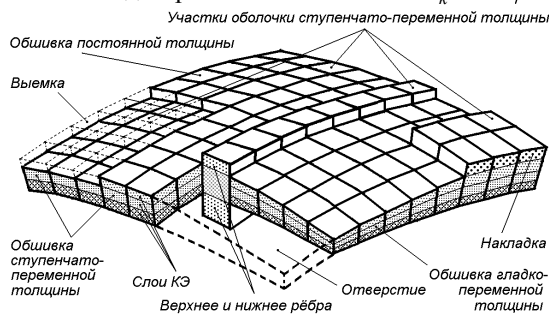


Рис. 1

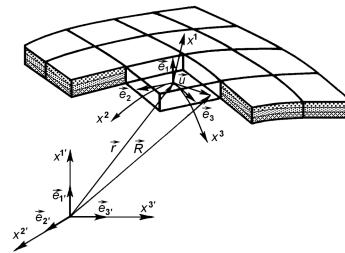


Рис. 2

Исследование процессов нелинейного деформирования оболочек выполняется шаговым методом на основе общей лагранжевой постановки вариационной задачи в приращениях, когда траектория векторов деформаций и напряжений строится на основе компонент приращений конечных деформаций и напряжений в базисе лагранжевой (отсчетной) системы координат [61,64].

Особенности НДС тонкой неоднородной оболочки учтены двумя гипотезами. Применена неклассическая кинематическая гипотеза деформируемой прямой – прямая в направлении толщины, сокращаясь или удлиняясь, остается прямой и после деформирования оболочки. Эта прямая не обязательно является нормалью к срединной поверхности оболочки. В направлении толщины распределение перемещений принято линейным, что является общепринятым в теории тонких оболочек [41]. Слои оболочки жестко соединены между собой в монолитный пакет и деформируются совместно без проскальзывания и отрыва по поверхностям контакта, на которых выполняется условие равенства компонент вектора перемещений. Принятое допущение при определенных ограничениях на свойства материалов слоев дает достаточно точные результаты в задачах устойчивости и колебаний тонких многослойных оболочек [13,45]. Гипотеза позволяет выполнять в процессе деформирования стыковку пространственных КЭ без нарушения совместности по координатам и перемещениям, а также моделировать естественным образом изломы в оболочке, наклоны стенок ребер, выемок и отверстий.

В статической гипотезе напряжения обжатия σ_n^{11} волокон n -го слоя по толщине оболочки (вдоль оси x^1) приняты постоянными

$$\frac{\partial \sigma_n^{11}}{\partial x^1} = 0. \quad (1.1)$$

Рассматривается установившийся температурный процесс, при котором температурное поле в объеме оболочки полагается известной и независимой от НДС функцией координат $T = T(x^i)$ [61,64]. Исходя из малой толщины оболочки, распределение температуры по толщине слоя принято линейным. Действие на оболочку силовых и температурных полей представляется как единый процесс нагружения, для описания которого задаются зависимости между общим параметром нагрузки и параметрами силовых и температурных полей. Используется модель упругой нелинейно деформируемой сплошной среды при больших перемещениях и малых деформациях, компоненты которых являются линейными функциями напряжений.

Материалы слоев оболочки рассматриваются как линейно-упругие, свойства которых отвечают обобщенному закону Дюамеля – Неймана [40]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C^{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T \right) = C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T) = \bar{\sigma}^{ij} - \overset{T}{\sigma}^{ij}; \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(C_j^{k'} \partial u^{k'} / \partial x^i + C_i^{k'} \partial u^{k'} / \partial x^j \right) + \frac{1}{2} \partial u^{k'} / \partial x^i \cdot \partial u^{k'} / \partial x^j, \quad (1.3)$$

где ε_{kl}^e – тензор упругих деформаций, которые связаны с появлением внутренних напряжений σ^{ij} ; ε_{kl} – тензор конечных (полных) деформаций Коши – Грина; ε_{kl}^T – тензор температурных деформаций, обусловленных изменением температуры тела на величину T по отношению к его начальной температуре T_0 ; $\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}$ – напряжения, зависящие от полных деформаций; $\overset{T}{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \alpha_{kl} T$ – напряжения, зависящие от температурных деформаций; C^{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; α_{kl} – компоненты тензора коэффициентов термического расширения; $C_i^{k'} = \partial x^{k'} / \partial x^i$ – компоненты тензора преобразования координат; $u^{k'}$ – перемещения в декартовой системе координат.

Моделирование анизотропных свойств неоднородного материала оболочки выполняется с использованием в слоях изотропной, трансверсально-изотропной и ортотропной моделей материала [51,64].

1.2. *Универсальный пространственный КЭ и его параметры.* Для разработки конечноэлементной модели оболочки (КЭМО) применен эффективный подход – аппроксимация тонкой оболочки по толщине одним пространственным КЭ [13,20,28,36,37,39,48,52,61,64]. Особенности рассматриваемых конструктивных элементов неоднородной оболочки определяют требования к универсальности КЭ: эксцентричное расположение относительно середины поверхности обшивки; возможность регулирования толщины боковых ребер КЭ; выполнение условий непрерывности контакта боковых граней соседних КЭ; возможность моделирования изломов и многослойной структуры материала оболочки.

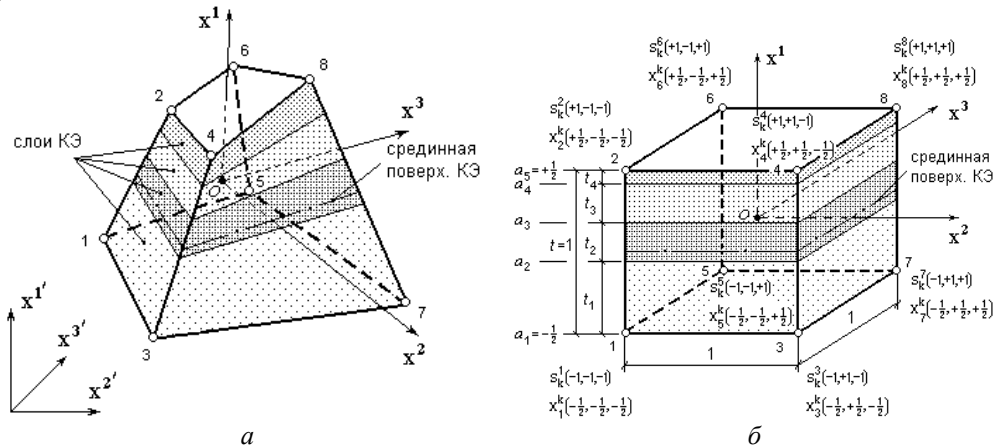


Рис. 3

Универсальный КЭ (рис. 3, а) разработан на основе изопараметрического пространственного КЭ с полилинейными функциями формы для координат и перемещений [52,61,64]. Возможности модифицированного КЭ расширены за счет введения дополнительных переменных параметров. Постоянные и переменные топологические, геометрические и физико-механические параметры КЭ характеризуют его как трехмерный, который имеет 8 узлов, 6 граней и 12 ребер с заданными константами однородных материалов слоев, с сеточными s_k , местными x^k и декартовыми $x^{i'}$ координатами узлов (рис. 3, а, б).

Формирование геометрии КЭМО выполняется в два этапа. На первом задаются декартовы координаты узлов на ограничивающих поверхностях КЭ обшивки (КЭО – шестигранник $ABCDEFGH$, рис. 4). На втором этапе на участках ступенчато-переменной толщины координаты узлов КЭО изменяются вдоль оси x^1 на координаты узлов модифицированного КЭ (КЭМ – шестигранник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{G}\tilde{H}$). Задача преобразования КЭО в КЭМ сводится к замене ребер КЭО (AB , CD , EF , GH) на ребра КЭМ ($\tilde{A}\tilde{B}$, $\tilde{C}\tilde{D}$, $\tilde{E}\tilde{F}$, $\tilde{G}\tilde{H}$) и смещения срединной поверхности КЭО вдоль оси x^1 на величину $\vec{S}\vec{S}$. В результате получаем эксцентрично расположенный КЭМ ступенчато увеличенной толщины (рис. 4, а) при моделировании участков оболочки с ребрами и накладками или ступенчато уменьшенной толщины (рис. 4, б) при моделировании участков оболочки с выемками и каналами.

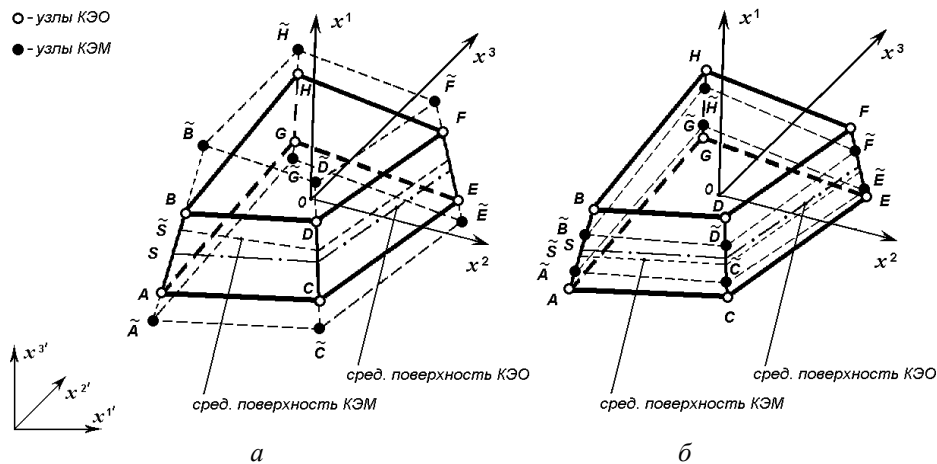


Рис. 4

За счет варьирования величинами дополнительных переменных параметров модифицированный пространственный КЭ приобрел свойства универсального КЭ, позволяющего моделировать по единой методологии широкий класс неоднородных оболочечных конструкций. Реализованная идея трансформации формы КЭО в форму КЭМ может быть примером для создания других типов универсальных КЭ на основе уже известных элементов.

1.3. Моментная схема конечных элементов в задачах термоупругого деформирования неоднородных оболочек. В работе при получении разрешающих конечноэлементных соотношений в форме метода перемещений использована разработанная и теоретически обоснованная А.С. Сахаровым моментная схема конечных элементов (МСКЭ) [37,49]. МСКЭ распространена на задачи геометрически нелинейного деформирования тонких многослойных оболочек ступенчато-переменной толщины при действии термосиловых нагрузок [8,9,11,32,55,61,64]. Согласованные с МСКЭ аппроксимации перемещений и деформаций гарантируют правильный учет жестких смещений КЭ, что повышает сходимость и точность решений при редких сетках.

Согласно МСКЭ функции полных деформаций (1.3) представлены в виде отрезка ряда Маклорена в окрестности центра КЭ. Деформации определены в пределах КЭ как линейные функции от x^i . Удержаны только те члены ряда, которые при полилинейном законе для перемещений могут быть точно вычислены.

Температурные деформации ε_{ij}^T , которые зависят как от температуры, так и от свойств материала слоя, приняты в пределах КЭ как линейные функции координат x^2 , x^3 и ступенчато-линейные по координате x^1 [9,11,61,64]. Они представлены в виде рядов Тейлора в окрестности центра n -го слоя КЭ.

Напряжения представлены в виде линейных частей рядов Тейлора по местным координатам x^j в окрестности центра n -го слоя КЭ.

§2. Соотношения МКЭ в задачах геометрически нелинейного деформирования упругих неоднородных оболочек.

2.1. *Соотношения МКЭ для тонких неоднородных оболочек.* Процесс нелинейного деформирования оболочки рассматривается как последовательность равновесных состояний на приращениях нагрузки. На текущем шаге нагружения предыстория НДС и геометрия оболочки предполагаются известными. Равновесное состояние КЭМО определяется на основе принципа возможных перемещений вариационным уравнением Лагранжа

$$\delta\Pi = \sum_{FE} (\delta W_{FE} - \delta A_{FE}) = 0, \quad (2.1)$$

где Π – потенциальная энергия деформирования КЭМО; W_{FE} и A_{FE} – работы внутренних и внешних сил КЭ; \sum_{FE} – сумма по конечным элементам КЭМО.

Виртуальная работа внутренних сил КЭ, учитывая (1.2), равняется:

$$\begin{aligned} \delta W_{FE} &= \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) dv = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv = \\ &= \int_{V_{FE}} \bar{\sigma}^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv - \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv = \delta\bar{W}_{FE} - \delta\bar{W}_{FE}^T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Учитывая (2.2), представляем (2.1) как

$$\delta\Pi = \sum_{FE} (\delta\bar{W}_{FE} - \delta P_{FE}) = 0; \quad \delta P_{FE} = \delta A_{FE} + \delta\bar{W}_{FE}^T. \quad (2.3)$$

Интегрирование (2.3) выполнено обычным для МКЭ образом. Из выражения для виртуальной работы внутренних сил от полных деформаций, зависящих от искомым узловых перемещений, получена матрица реакций КЭ. Из виртуальной работы внутренних сил от температурных деформаций получена матрица эквивалентных температурных нагрузок КЭ, которая добавляется к матрице силовых узловых нагрузок КЭ.

Обычно для пространственного КЭ в качестве искомым неизвестных принимают декартовы перемещения узлов КЭ $u_{s_1 s_2 s_3}^{t'}$. Для тонких оболочек более целесообразно в качестве разрешающих функций принимать совокупность перемещений узловых точек на срединной поверхности $v_{s_2 s_3}^{t'}$ и разности узловых перемещений на ограничивающих поверхностях КЭ $v_{s_2 s_3}^{t'}$

$$v_{s_2 s_3}^{t'} = \frac{u_{s_1=+1s_2s_3}^{t'} + u_{s_1=-1s_2s_3}^{t'}}{2}; \quad v_{s_2 s_3}^{t'} = u_{s_1=+1s_2s_3}^{t'} - u_{s_1=-1s_2s_3}^{t'}. \quad (2.4)$$

Замена (2.4) трактуется, как переход от восьмиузловому пространственному КЭ с 3-мя узловыми перемещениями к четырехузловому оболочечному КЭ с 6-ю обобщенными перемещениями узлов, которые отнесены к срединной поверхности КЭ. Примененная тройная линейная аппроксимация параметров НДС КЭ (функций перемещений, деформаций, напряжений) позволила выполнить интегрирование в (2.2) аналитически и получить в явном виде матрицы реакций, жесткости, геометрической жесткости и эквивалентных температурных нагрузок, что значительно уменьшило трудоемкость их вычисления. Полученные для пространственного КЭ соотношения являются универсальными, так как они инвариантны по отношению к узловым координатам и перемещениям, количеству слоев и техническим постоянным материалов слоев КЭ. Характеристики КЭ и связанные с ними дополнительные параметры определенным образом входят в эти соотношения. Это дало возможность применять соотношения МКЭ для всех рассмотренных конструктивных элементов неоднородной оболочки при формировании разрешающей системы геометрически нелинейных уравнений.

Шаговые итерационные алгоритмы решения систем нелинейных уравнений МКЭ основываются на процедурах многократного решения линеаризованных систем уравнений [23,37,54]. Линеаризация нелинейных уравнений МКЭ позволила получить в аналитическом

виде матрицу жесткости и матрицу геометрической жесткости для разработанного пространственного КЭ. Добавление к матрице жесткости матрицы геометрической жесткости позволило более точно предусмотреть в итерационной процедуре начальные приближения и привело к уменьшению почти в два раза числа итераций на шаге нагружения. При этом появилась возможность увеличения размера шага.

2.2. *Корректировка соотношений МКЭ для модифицированного КЭ.* Формирование системы разрешающих нелинейных уравнений КЭМО связано с объединением различных комбинаций КЭО и КЭМ в единый ансамбль элементов. При этом возникает проблема согласования для них узловых обобщенных перемещений, которые отнесены к различным срединным поверхностям КЭО и КЭМ. Эта проблема решается за счет определения зависимостей между обобщенными перемещениями КЭО и КЭМ и соответствующими коэффициентами матриц КЭО и КЭМ.

В качестве единых неизвестных системы разрешающих нелинейных уравнений приняты обобщенные узловые перемещения срединной поверхности обшивки (поверхности отсчета) КЭМО $v_{s_2s_3}^{i'}$ и $v_{s_2s_3}^{i'}$. Обозначим обобщенные перемещения для КЭМ как $\tilde{v}_{s_2s_3}^{i'}$ и $\tilde{v}_{s_2s_3}^{i'}$. На основе принятых положений связь обобщенных узловых перемещений КЭО и КЭМ определяется как

$$\tilde{v}_{s_2s_3}^{i'} = v_{s_2s_3}^{i'} + a_{s_2s_3} v_{s_2s_3}^{i'}; \quad \tilde{v}_{s_2s_3}^{i'} = b_{s_2s_3} v_{s_2s_3}^{i'}, \quad (2.5)$$

где $b_{s_2s_3}$ – коэффициент изменения длины ребра КЭ, а $a_{s_2s_3}$ – отношение величины смещения ребра КЭ к его длине. Эти величины являются дополнительными параметрами универсального КЭ. Зависимости (2.5) обеспечивают условие совместности и неразрывности перемещений между всеми конечными элементами КЭМО на разных участках оболочки гладко-перемеженной и ступенчато-перемеженной толщины.

§3. Алгоритм решения задач нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек в процессах термосилового нагружения.

3.1. *Комбинированный алгоритм решения нелинейной задачи устойчивости.* Проблема построения эффективных алгоритмов решения задач нелинейного деформирования и устойчивости неоднородных оболочек посвящено ограниченное число работ [37,44,54,58,61,64]. Решение нелинейных задач устойчивости оболочек часто представляет собой процесс получения сложно прогнозируемых результатов. Они зависят от большого количества параметров системы, которые связаны с геометрией, граничными условиями, нагрузкой, материалами, наличием разнообразных конструктивных элементов.

Главные требования, которые ставились к разрабатываемому алгоритму, были сформулированы следующим образом: универсальность и эффективность при решении широкого класса задач; автоматизированное управление процессом нелинейного расчета; автоматизированное прохождение диаграммы «нагрузка – прогиб» независимо от сложности ее формы; уменьшение трудоемкости решения задачи за счет самокорректировки параметров алгоритма; сбор статистической информации при прохождении диаграммы «нагрузка – прогиб» с последующим анализом и усовершенствованием алгоритма для отдельных классов оболочек; возможность реализации сложных процессов термосилового нагружения; наличие комплекса процедур обработки, визуализации и документирования входной информации и результатов решения нелинейной задачи.

Решение задачи нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения неоднородных оболочек выполняется комбинированным алгоритмом, в котором применены шаговый метод продолжения решения по параметру, модифицированный итерационный метод Ньютона – Канторовича и разработанная методика автоматизированной корректировки параметров алгоритма [54,61,64]. Каждому шагу отвечает приращение (положительное или отрицательное) параметра внешних нагрузок P , который связан с параметрами силового Q и температурного T полей. Решение нелинейной задачи представляет собою установление связи параметра внешних нагрузок P с полем перемещений КЭМО U , которое определяется на каждом шаге приращения нагрузки ΔP . Эта связь обычно представляется диаграммами «нагрузка-прогиб» (« $P - U$ ») в характерных точках оболочки.

3.2. *Самокорректировка параметров алгоритма.* Для эффективной автоматизации алгоритма решения задачи потребовалась реализация таких процедур: выбор параметра продолжения решения; определение его рациональной величины; изменение знака параметра продолжения решения; определение приращения нагрузки по заданному приращению перемещения характерного узла; изменение точности решения системы нелинейных уравнений; изменение законов и режимов термосилового нагружения на текущем шаге; запись в файлы исходных данных и результатов расчета для дальнейшего документирования, анализа, обработки и визуализации. Опыт решения задач при действии силовых и температурных нагрузок показал, что для последних точность решения должна быть повышена на 4-5 порядков.

При построении алгоритма в качестве обобщенной принята диаграмма « $P - U$ » в виде петли с точкой ветвления g и особыми точками a, b, e, f (рис. 5). В окрестности этих точек вырождается линеаризованная матрица разрешающих уравнений. Регуляризация уравнений и прохождение особых точек достигается сменой в определенных алгоритмом точках $s_1 \div s_5$ параметров продолжения решения – P на U и наоборот. Для уменьшения компьютерного времени решения задачи определяются величины рациональных шагов параметра спуска.

В алгоритме решения задачи устойчивости определяются точки ветвления с возможностью построения в их окрестности смежных форм деформирования. Для выявления точки ветвления применена качественная теория, согласно которой появление хотя бы одного отрицательного собственного числа линеаризованной матрицы жесткости КЭМО отвечает появлению новой равновесной формы оболочки. Определение смежной формы деформирования осуществляется за счет внесения в идеальную исходную форму оболочки соответствующего несовершенства, величина которого определяется параметром λ . При малых значениях λ его влияние проявляется на кривой « $P - U$ » в окрестности точки ветвления, которая может превратиться в критическую.

Эффективность метода расчета существенно зависит от его реализации в виде программного комплекса (ПК). Можно отметить, что в известных ПК слабо разработаны алгоритмы исследования геометрически нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек [65,66]. Очевидно, это связано с тем, что решение этих задач из-за их сложности и возможной неоднозначности трудно реализовать в виде стандартной вычислительной процедуры для использования широким кругом пользователей.

Разработанный ПК имеет научную ориентацию и отвечает современным требованиям к сервисным возможностям программных средств для представления исходной информации, построения расчетных схем, обеспечения эффективной работы нелинейного алгоритма решения задачи, обработки, анализа и визуализации результатов расчета.

Проблема задания координат узлов трехмерных КЭМО произвольной геометрической формы и регулярной топологической структуры решена за счет специально разработанного генератора сеток [3,59,61,64].

§4. Численное исследование сходимости и точности решений в задачах нелинейного деформирования и устойчивости.

В развитии МКЭ большое значение имеют вопросы его теоретического обоснования [26,27,37,43,56]. Однако, одного теоретического обоснования схем МКЭ недостаточно для оценки их эффективности и области применения, поскольку асимптотические оценки точности решения не дают представления об их поведении при реальных, редких сетках. Не менее важной проблемой является численное исследование свойств КЭ,

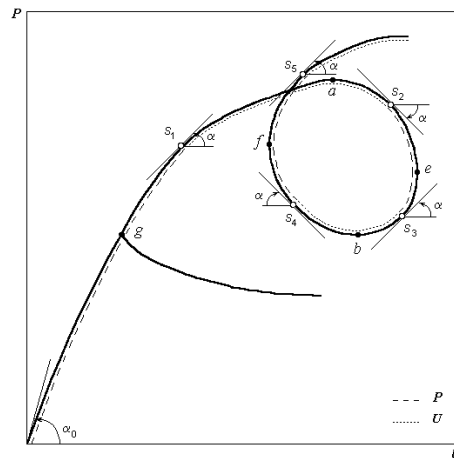


Рис. 5

что достигается сравнением решений МКЭ с известными, полученными аналитически, численными или экспериментальными методами.

Эффективность, точность и границы использования разработанной методики исследовались на серии специально подобранных линейных и нелинейных тестовых задач [6,32,50,61,64]. Рассмотрим ряд характерных примеров.

4.1. Исследование линейных решений. Результаты исследований точности решений, полученные для однородных и неоднородных стержней, балок, рам, колец, которые нагружались как трехмерные тела равномерными и неравномерными объемными температурными полями, показали быструю сходимость результатов уже при редких сетках [6,64]. Полученные на стержневых конструкциях результаты и выявленные эффекты термоупругого деформирования можно обобщить на тонкостенные конструкции, что подтверждается исследованиями на пластинах и оболочках.

Далее на примере нагруженных равномерным давлением интенсивностью q однородных и слоистых квадратных пластин определены величины погрешностей и возможных изменения упругих постоянных материалов.

4.1.1. Изгиб однослойной защемленной по контуру квадратной пластины. Для защемленной по контуру однослойной изотропной пластины получена быстрая сходимость величины прогиба центра по отношению к аналитическому решению [57]. Сравнение с результатами, которые получены в известных ПК (ЛИРА, SCAD, ФРОНТ, ANSYS, NASTRAN, COSMOS) и в работах других авторов, позволило сделать некоторое обобщение – сходимость решений для прямоугольных плоских КЭ выполняется «сверху», для пространственных КЭ – «снизу». Этот же эффект выявлен при исследовании ортотропной пластины. Для двухслойной и трехслойной свободно опертых по контуру пластин рассмотрена точность вычисления прогиба в ее центре [64]. Сравнение результатов выполнено с решениями, полученными в ПК SCAD, где использовался многослойный четырехугольный конечный элемент № 73 [66]. В ПК ЛИРА многослойные КЭ отсутствуют [65].

4.1.2. Изгиб двухслойной свободно опертой по контуру квадратной пластины. Рассмотрена двухслойная пластина, нагруженной давлением интенсивностью $q = 0.06$ МПа. Проведено сравнение прогиба центра пластины с решениями, полученными в ПК SCAD, по уточненной итерационно-аналитической теории [21], экспериментально-теоретическим методом [35] и с данными эксперимента [35] (табл. 1). Исходные данные: размер пластины в плане $a = 0.3$ м; первый слой (сталь) – толщина 0.0003 м, модуль упругости $E = 2.03 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; второй слой (бетон) – толщина 0.0258 м, $E = 0.0657 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.2$. Расчетный фрагмент – четверть пластины. Результаты расчета прогиба пластины w в центре, выполненные по разным методикам, сравнивались с данными эксперимента. Решения по МКЭ и ПК SCAD быстро сходятся. Расчеты по МКЭ и по итерационно-аналитической теории сходятся к данным эксперимента сверху, а по ПК SCAD и экспериментально-теоретическим методом – снизу. Ошибка для всех расчетов не превышает 10%.

Данные результаты получены при отношении модулей упругости первого и второго слоя 31, что следует принимать во внимание при решении вопроса об области возможного применения методик.

Таблица 1

Сравнение прогиба центра свободно опертой двухслойной квадратной пластины

Метод расчета	МКЭ, 8×8 КЭ	SCAD, 8×8 КЭ	Итерационно-аналитический [21]	Экспериментально-теоретический [35]	Эксперимент [35]
$w \cdot 10^2, \text{ м}$	0.0120	0.0109	0.0115	0.0102	0.0110
$\Delta, \%$	9.10	-0.91	4.5	-7.3	0

4.1.3. Изгиб трехслойной свободно опертой по контуру квадратной пластины Рассматривается трехслойная пластина [18], нагруженная давлением интенсивностью $q = 0.1$ МПа. Исходные данные: размер пластины в плане $a = 0.2768$ м; первый и третий слои пластинки толщиной 0.001 м выполнены из изотропного материала

($E = 6.8 \cdot 10^4$ МПа, модуль сдвига $G = 2.615 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.3$); второй слой толщиной 0.015 м выполнен из трансверсально-изотропного материала с модулями упругости, равными $0.48 \cdot 10^4$ МПа, коэффициентами Пуассона – 0.3, модулем сдвига – $0.038 \cdot 10^4$ МПа. Расчетный фрагмент – четверть пластины.

Таблица 2

Сравнение прогиба центра свободно опертой трехслойной квадратной пластины

Метод расчета	МСКЭ, 12×12 КЭ	МСКЭ, 16×16 КЭ	SCAD, 12×12 КЭ	SCAD, 16×16 КЭ	Рейсснер	Варвак	Технич. теория
$w \cdot 10^3, \text{ м}$	0.2354	0.2369	0.3469	0.3475	0.3160	0.3050	0.2160
$\Delta, \%$	-25.5	-25.0	9.78	9.97	0	-3.5	-31.6

Прогиб пластины w в центре, рассчитанный по МСКЭ, сравнивался с аналитическими решениями [18], полученными на основе: теории Рейсснера (гипотеза прямой), теории Варвака (гипотеза, учитывающая действие касательных напряжений на искажение сечения), технической теории (гипотеза прямой нормали), а также с расчетами в ПК SCAD (табл. 2). За эталонное решение принято решение, полученное по теории Рейсснера. Для МСКЭ и ПК SCAD увеличение сетки с 12×12 КЭ практически не улучшает результат – погрешность, соответственно, остается в пределах 25 и 10%. Отношение модулей упругости материалов слоев (несущего к заполнителю) составляет 14.2, а отношение модулей сдвига – 68.8. Эти данные необходимо принять во внимание при решении вопроса об области возможного применения данных методик.

Рассмотренные примеры указывают на ориентировочную границу применения разработанной методики, что отвечает известным положениям: при применении единой гипотезы прямой для всего многослойного пакета величины упругих констант материалов слоев не должны отличаться более чем на один – два порядка.

4.2. *Исследование решений в геометрически нелинейных задачах устойчивости и закритического поведения.* Приведены результаты исследования нелинейного деформирования, потери устойчивости и закритического поведения на примере ряда неоднородных изотропных оболочек. Точность решений в задачах устойчивости подтверждена сравнительным анализом [15,17,19,30,31,60] с нелинейными решениями, полученными другими авторами и в программных комплексах ЛИРА, SCAD, где использовались плоский треугольный КЭ №342 и плоский четырехугольный КЭ №344. При аппроксимации участков оболочки с ребрами, каналами и выемками, где КЭ эксцентрично стыкуются, использовались «абсолютно жесткие вставки пластин» [65,68] и «абсолютно жесткие твердые тела» [44,66].

4.2.1. Квадратная в плане сферическая панель постоянной толщины. Панель шарнирно оперта вдоль контура и нагружена равномерным нормальным давлением интенсивностью q [64]. Результаты исследований представлены на рис. 6 в безразмерных параметрах $\bar{q} = a^4 q / (Eh^4)$, $\bar{u}^1 = u^1 / h$. Кривизна панели определяется параметром $K = 2a^2 / (Rh) = 32$, где: $h = 1$ см – толщина, $a = 60h$ – размер панели в плане, $R = 225h$ – радиус срединной поверхности, модуль упругости $E = 2.1 \cdot 10^6$ кг/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Расчетный фрагмент – четверть панели с сеткой 30×30 КЭ. Сравнение выполнено с решением работ [30,60] по диаграммам “ $\bar{q} - \bar{u}^1$ ” центра панели (рис. 6, а). Решение задачи в каждом ПК (ЛИРА и SCAD) выполнялось по трем своим нелинейным алгоритмам. В ПК ЛИРА получено хорошее совпадение по величине $\bar{q}_{кр}^6$: два варианта метода последовательных нагружений (ПН) дали расхождение меньше 3%, метод Ньютона-Рафсона (Н-Р) дал расхождение в -1,8%. В ПК SCAD эта проблема решалась методами Ньютона-Канторовича (Н-К) и Ньютона-Рафсона с расхождением в -4,9%. Расхождение с решением по МСКЭ составило -3,15%. Во всех решениях равновесные формы деформированных панелей в докритической и в закритической областях имеют простой вид и хорошо совпадают между собой (рис. 6, б).

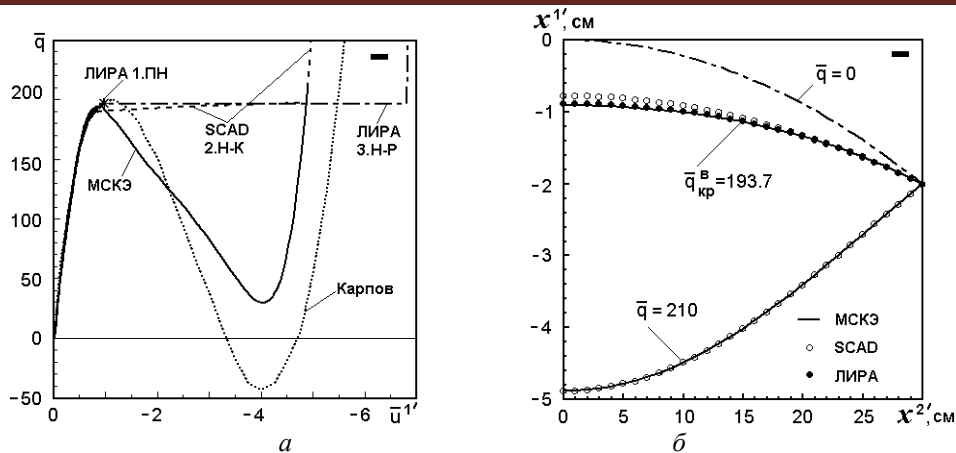


Рис. 6

4.2.2. Оболочки линейно-переменной толщины. С целью поиска рациональных законов распределения материала в объеме конструкции исследовалось влияние на устойчивость пологих сферических панелей линейного изменения толщины по меридиану [61,64]. Оболочка вращения защемлена вдоль контура и нагружена равномерным нормальным давлением интенсивностью q (рис. 7, а). Приняты следующие исходные данные: стрела подъема $H = 0.05$ м, радиус срединной поверхности $R = 10.025$ м, радиус опорного контура $a = 1$ м, “базовая” толщина $h^* = 0.01$ м, $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.3$.

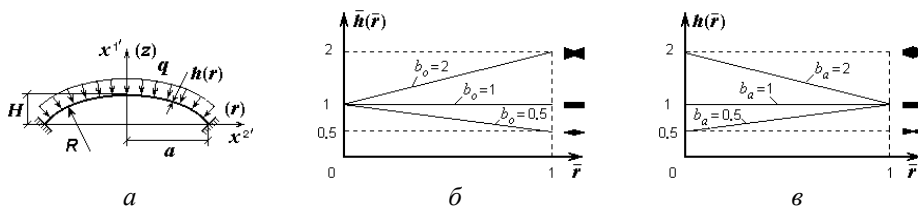


Рис. 7

Закон линейного распределения толщины вдоль меридиана панели был представлен в общем виде через толщину панели в центре $h_{\bar{r}=0}$ и на контуре $h_{\bar{r}=1}$: $h(\bar{r}) = h_{\bar{r}=0} + (h_{\bar{r}=1} - h_{\bar{r}=0})\bar{r}$, где $\bar{r} = r/a$.

Рассмотрено три закона линейного распределения толщины $h(\bar{r})$ по меридиану (рис. 7, б, в; тип переменной толщины обозначен соответствующим значком):

$$1) h(\bar{r}) = h^* [1 + (b_o - 1)\bar{r}]; \quad 2) h(\bar{r}) = h^* [1 + (b_a - 1)(1 - \bar{r})]; \quad 3) h(\bar{r}) = h^* b_v,$$

где $b_o = h_{\bar{r}=1}/h_{\bar{r}=0}$, $b_a = h_{\bar{r}=0}/h_{\bar{r}=1}$, $b_v = h_v/h^*$ – параметры, характеризующие степень линейной изменяемости толщины. Толщина панели h_v определялась по формуле: $h_v = V/(2\pi HR)$, где V – объем панели. Значению $b_o = b_a = b_v = 1$ соответствует панель постоянной “базовой” толщины h^* .

Исследована устойчивость оболочек одинаковых объемов V для ряда параметров b_o , b_a , b_v . Решения, полученные по МСКЭ [61,64], сравнены с решениями ПК ЛИРА и SCAD. Результаты исследований представлены с помощью безразмерных параметров: $\bar{q} = a^4 q / (E h^{*4})$, $\bar{u}^1 = u^1 / h^*$, $\bar{h}(\bar{r}) = h(\bar{r}) / h^*$. Для всех диаграмм “ $\bar{q} - \bar{u}^1$ ” (рис. 8) наблюдается хорошее совпадение решений как в докритической области, так и в районе верхней критической точки.

4.2.3. Граненые панели ступенчато-переменной толщины. Рассматриваются граненые оболочки, образованные из рассмотренных выше гладких сферических панелей линейно-переменной толщины [61,64]. Срединная поверхность сферической оболочки вращения заменена вписанной в нее граненой с 16 плоскими гранями (4×4 для

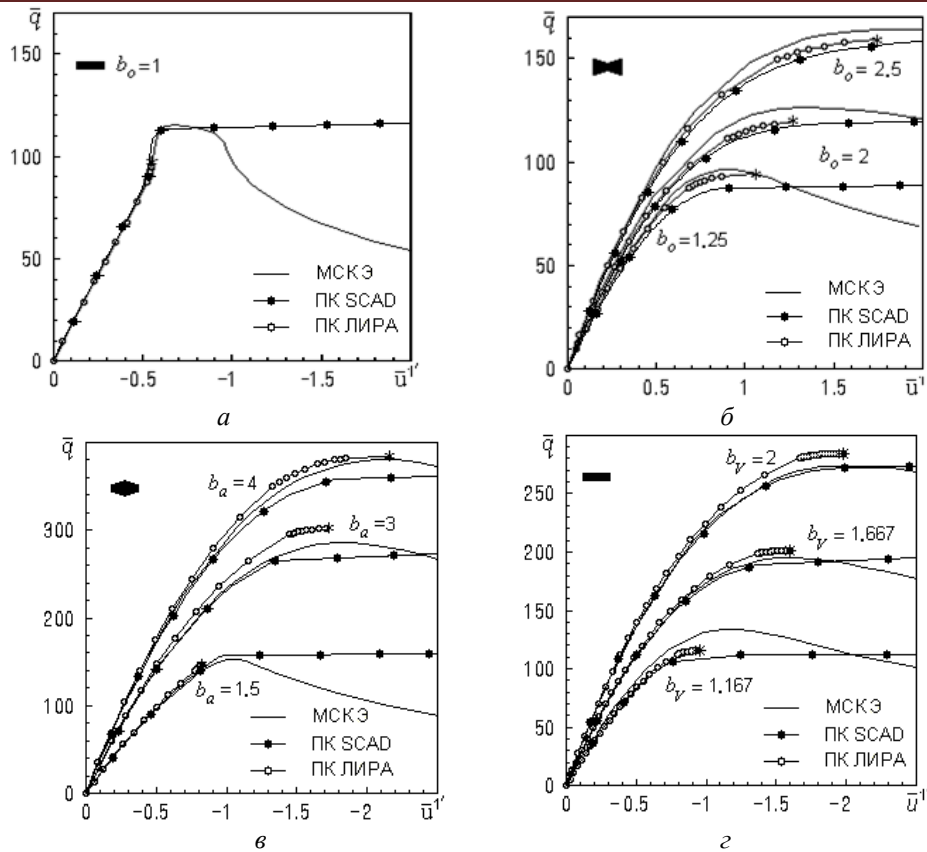


Рис. 8

четверти оболочки, рис. 9, а). Линейно-переменная толщина $\bar{h}(\bar{r})$ заменена близкой ступенчато-переменной толщиной \bar{h}_i (рис. 9, б) согласно сортаменту стального листового проката [67] при допустимой в инженерных расчетах разности объемов этих типов оболочек $(-4,3 \div +0,2\%)$.

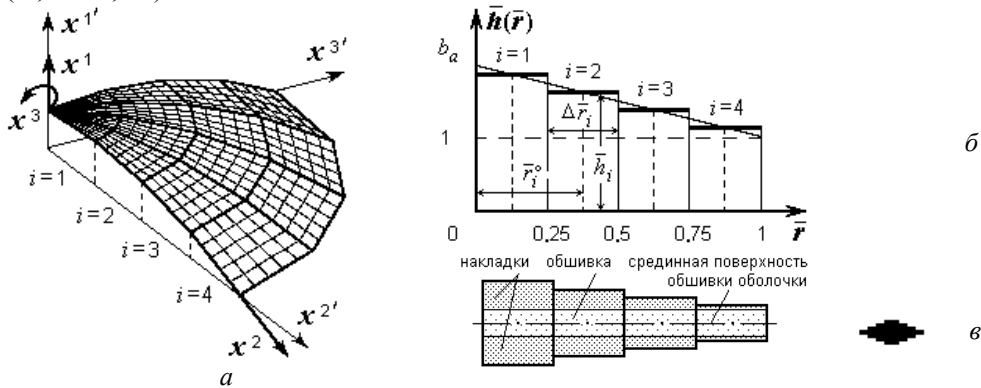


Рис. 9

Сравнение нелинейных решений, полученных по МСКЭ, с решениями ПК ЛИРА и SCAD проведено для рациональных оболочек [64], имеющих утолщение в центральной части. Сравнивались оболочки с параметрами толщины $b_o = 0.55, 1$ и $b_a = 1, 2, 4$ с соединением по срединным поверхностям граней (рис. 9, в). Для всех решений (рис. 10) наблюдается хорошее совпадение диаграмм “ $\bar{q} - \bar{u}$ ” в докритической области. В точке ветвления для панелей с параметрами $b_o = 0.55$ и $b_o = b_a = 1$ расхождение по нагрузке составляет соответственно -0.18 и $+1.98\%$, по прогибу центра панели $+1.01$ и $+3.5\%$.

Для панелей с параметрами $b_a = 2$ и 4 получено хорошее совпадение по верхней критической нагрузке $\bar{q}_{кр}^6$ (расхождение находится в пределах -1.91 и 4.17%). Для оценки влияния граненности на рис. 10 пунктирной линией приведены решения, полученные по МСКЭ для гладких панелей линейно-переменной толщины.

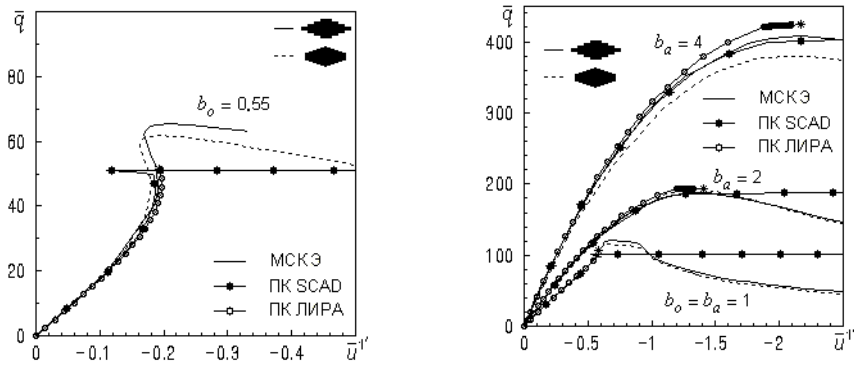


Рис. 10

4.2.4. Ребристые квадратные в плане сферические панели. Исследование устойчивости оболочек, подкрепленных ребрами [61,64], представлено примером непологий квадратной в плане сферической панели ($K = 64$, $a = 120h$, $R = 450h$) шарнирно опертой по контуру при действии равномерного нормального давления (рис. 11, 12). Рассмотрено два варианта подкрепления оболочки ребрами, расположенными со стороны вогнутости (высотой $h_p = 3h$ и шириной $b_p = 2h$): парой центральных перекрестных ребер (при сетке 21×21 КЭ) и четырьмя парами равномерно расположенных перекрестных ребер (при сетке 22×22 КЭ).

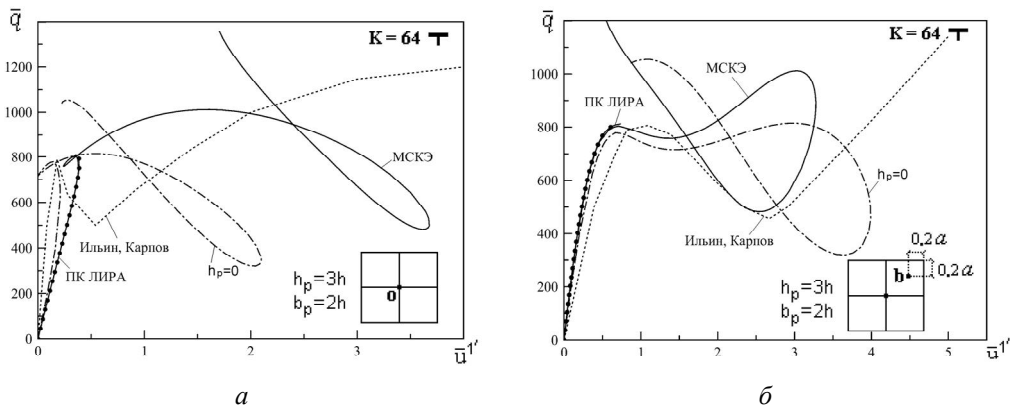


Рис. 11

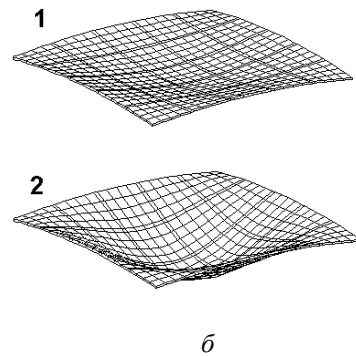
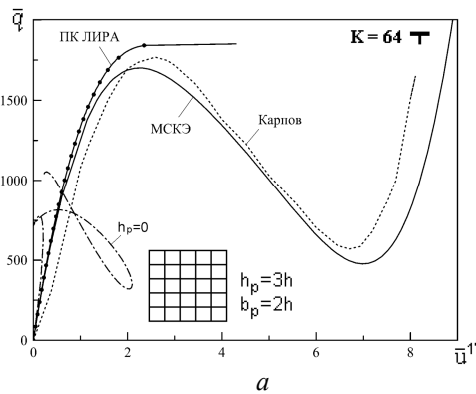


Рис. 12

Решения, полученные с помощью МСКЭ и ПК ЛИРА, сравнены с результатами работ [30,60]. Анализировались диаграммы «нагрузка – прогиб»: в первом варианте в точках “о” (рис. 11,а) и “б” (рис. 11,б), а во втором - в центре пластины (рис. 12, а). Для сравнения штрихпунктирной линией приведены решения для гладкой панели ($h_p = 0$). В первом варианте диаграммы МСКЭ и ПК ЛИРА полностью совпадают в докритической области и в момент потери устойчивости (рис. 11). Расхождение по величине $\bar{q}_{кр}^6$: между [30,60] и МСКЭ не превышает 0.5%; между МСКЭ и ПК ЛИРА - 1.1%.

Во втором варианте, для панели, подкрепленной восемью ребрами, на всех участках диаграммы наблюдается хорошее совпадение решений. По величине $\bar{q}_{кр}^6$ расхождение между решениями работ [30,60] и МСКЭ составляет -3.8%, между решениями МСКЭ и ПК ЛИРА - 7.7%. Формы деформирования в докритической (1) и закритической (2) областях - однотипны (рис. 12, б).

4.2.5. Квадратные в плане сферические панели с каналами и выемками. Исследование устойчивости оболочек ослабленных каналами и выемками выполнено на примере описанной выше квадратной в плане пологой сферической панели с кривизной $K = 32$ [61,64]. Рассмотрена оболочка с двумя вариантами несквозных ослаблений: 1) четыре перекрестные каналы шириной $b_k = 2h$ и глубиной $h_k = 0.3h$; 2) четыре квадратные выемки шириной $b_k = 6h$ и глубиной $h_k = 0.7h$. Выполнено сравнение трех способов эксцентричного расположения каналов и выемок относительно срединной поверхности обшивки оболочки (рис. 13). Расположению их на обшивке отвечают соответствующие значки. Расчётный фрагмент – четверть панели с сеткой 30×30 КЭ.

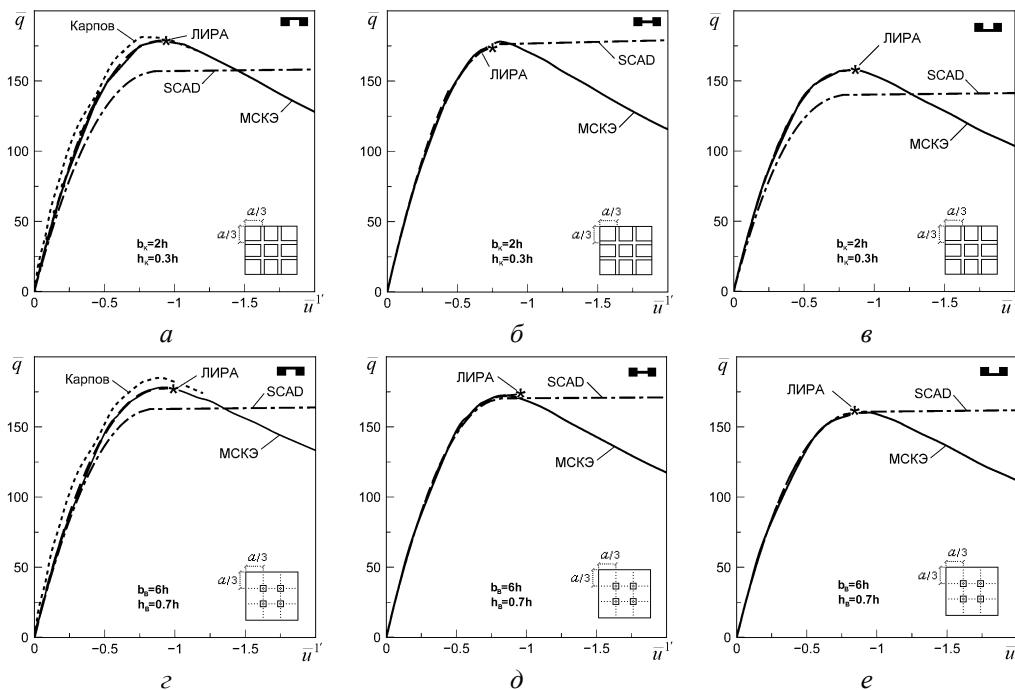


Рис. 13

4.2.6. Оболочки при совместном действии силового и температурного полей. Исследование нелинейных решений при совместном действии на оболочку температурных и силовых нагрузок выполнено на примерах осесимметричной конической панели и квадратной в плане сферической панели с отверстием [64]. В расчетах по МСКЭ и в ПК ЛИРА принято, что действие на конструкцию термосиловой нагрузки происходит в два этапа. На первом этапе оболочка постепенно нагревается равномерным температурным полем, параметр которого t возрастает от 0°C до $T^\circ\text{C}$; на втором – догружается равномерным нормальным давлением.

4.2.6.1. *Осесимметричная коническая панель.* Рассмотрена защемленная по контуру пологая коническая панель (рис. 14) с радиусом опорного контура $a=100h$ и стрелой подъема $H=3h$. На первом этапе нагружения оболочка нагревается до $T=20^\circ\text{C}$ [31]. Исходные данные: $h=0.01\text{ м}$, $E=19.6\cdot 10^4\text{ МПа}$, $\nu=0.3$, коэффициент термического расширения $\alpha=0.125\cdot 10^{-4}\text{ град}^{-1}$. Результаты исследований представлены с использованием

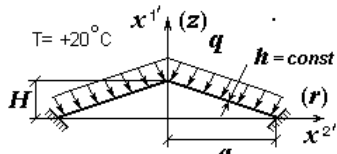


Рис. 14

безразмерных параметров $k=H/h$, $\bar{t}=\alpha(a/h)^2$. Расчетная модель – половина панели с сеткой 20×40 КЭ. Сравнены решения работы [31], МСКЭ и ПК ЛИРА.

Для рассмотренных методик имеем хорошее совпадение диаграмм “ $\bar{q}-\bar{u}^1$ ” (рис. 15, а) и форм деформирования (рис. 15, б) на всех этапах нагружения. В зоне верхней критической нагрузки наблюдается расхождение диаграмм относительно решения МСКЭ по величине $\bar{q}_{кр}^6$: -10.8% для ПК ЛИРА и -3.6% для [31].

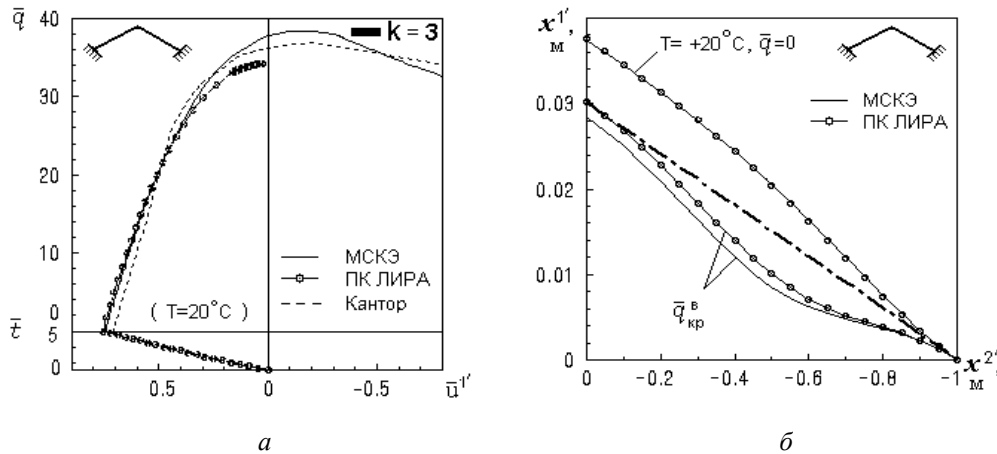


Рис. 15

4.2.6.2. *Квадратная в плане сферическая панель с отверстием.* Рассмотрена пологая шарнирно опертая по контуру панель ($K=32$, $a=60h$), имеющая центральное квадратное отверстие шириной $b_0=12h$. Исходные данные: $h=0.01\text{ м}$, $\nu=0.3$, $E=20.59\cdot 10^4\text{ МПа}$, $\alpha=0.12\cdot 10^{-4}\text{ град}^{-1}$. Расчетная модель – четверть панели с сеткой 30×30 КЭ. Рассмотрено влияние на потерю устойчивости оболочки трех вариантов предварительного нагрева на $T=-20^\circ$, 0° , 20°C .

На рис. 16, а проведено сравнение диаграмм “ $\bar{q}-\bar{u}^1$ ”, полученных по МСКЭ, в ПК ЛИРА и в работе [30] для оболочек без отверстия (■) и с отверстием (■:■) при нагружении их только давлением ($T=0^\circ\text{C}$). Для панели без отверстия рассматривался прогиб в ее центре, для панели с отверстием - прогиб в точке А. Наблюдается хорошее совпадение решений МСКЭ и ПК ЛИРА в докритической области и в момент потери устойчивости: для величины $\bar{q}_{кр}^6$ расхождение составляет соответственно -1.9 и 2.9%. Имеем расхождение диаграмм МСКЭ, ПК ЛИРА и [30] в зоне верхней критической нагрузки, которое для МСКЭ и [30] составляет соответственно 3.3 и -9.9%.

Для всех вариантов нагрева решения по МСКЭ и ПК ЛИРА хорошо совпадают по всей диаграмме “ $\bar{q}-\bar{u}^1$ ” (рис. 16, б). Для величины $\bar{q}_{кр}^6$ расхождение находится в пределах 3.0 – 3.5%, для прогиба панели $\bar{u}_{кр}^1$ в точке А - в пределах 0.3 – 4.1%. После предварительного охлаждения до $T=-20^\circ\text{C}$ (рис. 17, а) и предварительного нагрева до $T=+20^\circ\text{C}$ (рис. 17, б) для обеих методик наблюдается полное совпадение форм де-

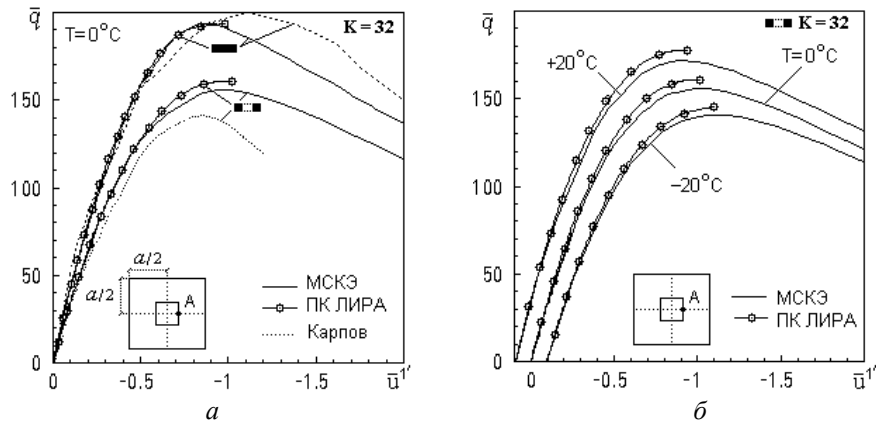


Рис. 16

формирования, мало отличающиеся от исходной формы ($T = 0^\circ\text{C}$, $\bar{q} = 0$). Формы потери устойчивости также хорошо согласуются. Потеря устойчивости панели происходит с прищелкиванием ее центральной части (рис. 17, в).

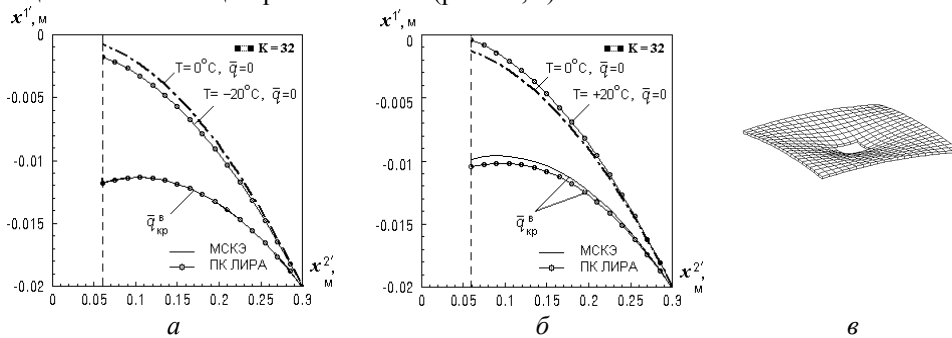


Рис. 17

Заключение.

Разработан на базе метода конечных элементов метод исследования тонкостенных оболочечных конструкций, который основан на использовании для всех конструктивных элементов неоднородной оболочки геометрически нелинейных соотношений пространственной теории термоупругости с учетом всех нелинейных членов, компонент тензоров деформаций и напряжений. Применена моментная схема конечных элементов, которая распространена на задачи нелинейного термоупругого деформирования тонких неоднородных оболочек.

На базе универсального пространственного КЭ разработана единая расчетная модель, учитывающая многослойную структуру материала и геометрические особенности конструктивных элементов неоднородной оболочки: обшивку переменной толщины, ребра и накладку, выемки, каналы и отверстия, изломы срединной поверхности.

Построен эффективный шаговый алгоритм решения задач нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения тонких неоднородных оболочек при действии термосиловых нагрузок.

Для широкого класса неоднородных оболочек выполнено численное обоснование достоверности получаемых линейных и нелинейных решений путем исследования их сходимости и сравнения с результатами других авторов и программных комплексов ЛИРА, SCAD.

Л и т е р а т у р а

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Бабич Д.В. Устойчивость неравномерно нагретых по толщине термочувствительных оболочек // Докл. АН Украины. – 1993. – N 4. – С. 41 – 45.
3. Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П. Формирование конечноэлементных моделей оболочек сложной формы // Архитектура оболочек и прочностной расчет тон-

- костенных и машиностроительных конструкций сложной формы: Тр. Международ. науч. конф. – М.: Изд-во РУДН, 2001. – С. 30 – 34.
4. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Вплив режимів термосилового навантаження на стійкість і позакритичну поведінку оболонок сталюї та ступінчато-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 77. – С. 30 – 42.
5. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Стійкість кінцевих оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 78. – С. 46 – 51.
6. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Збіжність і точність розв'язків для просторового скінченного елемента в задачах нерівномірного нагріву стержнів і балок // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 80. – С. 54 – 65.
7. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Оценка влияния кривизны на устойчивость и закритичное поведение ребристых панелей // Проблемы прочности. – 2007. – № 6. – С. 128 – 133.
8. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности. – 1999. – № 5. – С. 96 – 102.
9. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатошарових поребрих оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КДТУБА, 1998. – Вип. 64. – С. 116 – 127.
10. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П., Аят Н.* Стійкість гнучких оболонок в умовах складного термосилового навантаження // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КДТУБА, 1999. – Вип. 65. – С. 75 – 90.
11. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінчених елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 1999. – Вип. 66. – С. 22 – 25.
12. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – N 2. – С. 18 – 25.
13. *Белостоцкий А.М.* Конечноэлементные модели пространственных пластин, оболочек и массивов: построение, программная реализация и исследования: Сб. науч. тр. Гидропроекта. – 1985. – Вип. 100. – С. 24 – 35.
14. *Болотин В.В.* Нелинейная теория упругости и устойчивость в "большом" // Расчеты на прочность. – 1958. – Вип. 3. – С. 310 – 354.
15. *Бушнелл Д., Смит С.* Прочность и устойчивость равномерно нагретых цилиндрических и конических оболочек // Ракетная техника и космонавтика. – 1971. – № 12. – С. 14 – 23.
16. *Вайнберг Д.В., Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И.* Термосиловая неустойчивость деформируемой среды // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1972. – Вип. 16. – С. 153 – 156.
17. *Валишвили Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение. – 1976. – 278 с.
18. *Варвак П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С. и др.* Метод конечных элементов. – К.: Высшая школа, 1981. – 176 с.
19. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
20. *Голованов А.И., Корнишин М.С.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / Казан. физико-техн. ин-т КФ АН СССР. – Казань, 1990. – 269 с.
21. *Гондляр А.В.* Итерационно-аналитическая теория деформирования многослойных оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1988. – Вип. 53. – С. 33 – 37.
22. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
23. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
24. *Григоренко Я.М., Гуляев В.И.* Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 3 – 23.
25. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища шк., 1982. – 255 с.
26. *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976. – 95 с.
27. *Джонсон, Мак-Лей.* Сходимость метода конечных элементов в теории упругости // Прикл. механика. Сер. Е. – 1968. – № 2. – С. 68 – 73.
28. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир. – 1975. – 541 с.
29. *Зинкевич О.К., Айронс Б.М., Скотт Ф.К., Кемпбел Дж. С.* Анализ трехмерного напряженного состояния // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Часть I. – Л.: Судостроение, 1974. – С. 293 – 305.
30. *Ильин В.П., Карпов В.В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. – Л.: Стройиздат, 1986. – 168 с.

31. Кантор Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. – К.: Наук. думка, 1974. – 136 с.
32. Кислюкий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А. Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек // Проблемы прочности. – 1977. – № 7. – С. 25 – 32.
33. Колдунов В.А., Кудинов А.Н., Черепанов О.И. Расчет устойчивости оболочек с общих трехмерных позиций // Труды 6 Межд. науч. симпозиума "Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. – Тверь, 1 – 3 марта, 2006. – Тверь: ТГТУ, 2006. – С. 31 – 39.
34. Колдунов В.А., Черепанов О.И. Численная модель расчета оболочек и оболочечных конструкций с трехмерных позиций нелинейной теории упругости // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация: Сб. науч. трудов. Твер. гос. ун-т. – Тверь: ТвГУ, 2002. – С. 48 – 59.
35. Кучерюк В.И., Дорогин А.Д., Боцагов В.П. Расчет многослойных пластин экспериментально-теоретическим методом // Строит. механика и расчет сооружений. – 1983. – №2. – С. 72–74.
36. Лиан К.Л., Редди Дж. Н. Анализ геометрических нелинейных задач с помощью конечного элемента подкрепленной композитной оболочки, подчиняющегося законам механики сплошной среды // Аэрокосмическая техника. – 1989. – № 8. – С. 117 – 124.
37. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С.Сахаров, В.Н.Кислюкий, В.В.Киричевский и др. – К.: Вища шк. Головн. изд-во, 1982. – 480 с.
38. Николаев А.П., Киселев А.П. Использование теории упругости трехмерного тела в расчетах оболочек // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Тезисы докл. Международ. науч. конф. – М.: Изд-во РУДН, 2001. – С. 29 – 30.
39. Николаев А.П., Киселев А.П. Расчет оболочек с использованием трехмерных конечных элементов в виде треугольной призмы и восьмиугольника // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Тр. Международ. науч. конф. – М.: Изд-во РУДН, 2001. – С. 319 – 323.
40. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
41. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.
42. Огибалов П.М., Грибанов В.Ф. Термостойчивость пластин и оболочек. – М.: Изд-во МГУ, 1968. – 520 с.
43. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
44. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
45. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – К.: Будівельник, 1986. – 176 с.
46. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 343 с.
47. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 191 с.
48. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
49. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) учетом жестких смещений // Соппротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1974. – Вып. XXIV. – С. 147 – 156.
50. Сахаров А.С., Соловей Н.А. Исследование сходимости метода конечных элементов в задачах пластин и оболочек // Пространственные конструкции зданий и сооружений. Вып. 3. – М.: Стройиздат, 1977. – С. 10 – 15.
51. Соловей М.О. Моделивання термопружних властивостей багатощарових матеріалів у задачах стійкості неоднорідних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 73. – С. 17 – 30.
52. Соловей М.О. Модифікований просторовий скінченний елемент для моделювання тонких неоднорідних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 80. – С. 96 – 113.
53. Соловей М.О., Кривенко О.П. Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості гнучких оболонок при різних законах нерівномірного нагріву // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2002. – Вип. 70. – С. 104 – 109.
54. Соловей М.О., Кривенко О.П. Вплив нагріву на стійкість гладких пологих сферичних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 60 – 73.

55. Соловей М.О., Кривенко О.П. Вплив нагріву на стійкість гранованих пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2004. – Вип. 75. – С. 80 – 86.
56. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
57. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
58. ANSYS User's Manual for revision 5.6. Vol. I. Procedure; Vol. II. Command; Vol. III. Elements; Vol. IV. Theory.
59. Solovey N.A. Geometrical modelling of shells with complex form by finite element system for strength analyses // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2001. – Вип. 69. – С. 245 – 251.
60. Карнов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х частях. Ч.2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 248 с.
61. Bazhenov V. A., Solovei N. A. Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // International Applied Mechanics, 2009. – Vol. 45. – № 9. – Pp. 923-953.
62. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
63. Баженов В.А., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Успехи механики. В 6-ти томах / Под. ред. А.Н. Гузя. Том 6 (книга 2). – К.: Літера ЛТД, 2012. – С. 609-645.
64. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
65. ЛИРА 9.4 Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие. / Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Гераймович Ю.Д. и др. – К.: изд-во «Факт», 2008. – 164 с.
66. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD. / Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. – М.: изд-во «СКАД СОФТ», 2009. – 656 с.
67. ГОСТ 82-70 (СТ СЭВ 2884-81). Сталь прокатная широкополосная универсальная. Сор-тамент. – Взамен ГОСТ 82-57; Введ. 01.01.72. – М.: Изд-во стандартов, 1983. – 6 с.
68. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. – К: из-во "Факт", 2007. – 394 с.

References

1. Alfutov NA. (1978) Fundamentals of Stability Analysis of Elastic Systems [in Russian], Mashinostroenie, Moscow, 312 p.
2. Babich DV. (1993). Stability of thermosensitive shells nonuniformly heated throughout the thickness. Dokl. AN Ukrainy, No. 4, 41–45.
3. Bazhenov VA, Dekhtyaryuk ES, Solovei NA, Krivenko OP. (2001). Generating finite-element models of complex shells. In: Proc. Int. Sci. Conf. on Architecture of Shells and Strength Design of Thin-Walled and Engineering Structures of Complex Shape, Izd. RUDN, Moscow, pp. 30–34.
4. Bazhenov VA, Krivenko OP, Solovei MO. (2005) Effect of thermomechanical loading conditions on the stability and postbuckling behavior of shells with constant and stepwise-varying thickness. Opir Mater. Teor. Sporud, 77, pp. 30–42.
5. Bazhenov VA, Krivenko OP, Solovei MO. (2006). Stability of conical shells with linearly varying thickness. Opir Mater. Teor. Sporud, 78, pp. 46–51.
6. Bazhenov VA, Krivenko OP, Solovei MO. (2006). Convergence and accuracy of solutions for a spatial finite element in problems of nonuniform heating of rods and beams. Opir Mater. Teor. Sporud, 80, pp. 54–65.
7. Bazhenov VA, Krivenko OP, Solovei NA. (2007). Assessment of the curvature effect on the stability and postbuckling behavior of ribbed panels. Strength of Materials, 39, No. 6, pp. 658–662.
8. Bazhenov VA, Sakharov AS, Solovei NA, Krivenko OP, Ayat N. (1999). Moment scheme of the finite-element method in problems of the strength and stability of flexible shells subjected to the action of forces and thermal factors. Strength of Materials, 31, No. 5, pp. 499–504.
9. Bazhenov VA, Solovei MO, Krivenko OP. (1998). Nonlinear equations of deformation of ribbed thin multilayer shells under thermomechanical loading. Opir Mater. Teor. Sporud, 64, pp. 116–127.
10. Bazhenov VA, Solovei MO, Krivenko OP, Ayat N. (1999). Stability of flexible shells under combined thermomechanical loading. Opir Mater. Teor. Sporud, 65, pp. 75–90.
11. Bazhenov VA, Solovei MO, Krivenko OP. (1999). Equations of the moment finite-element scheme in buckling problems for inhomogeneous shells under thermomechanical loading. Opir Mater. Teor. Sporud, 66, pp. 22–25.
12. Bazhenov VA, Solovei NA, Krivenko OP. (2004). Stability of shallow shells of revolution with linearly varying thickness. Aviats.-Kosmich. Tekh. Tekhnol., No. 2, pp. 18–25.
13. Belostotskii AM. (1985). Finite-element models of spatial plates, shells, and solids: Creation, program implementation, and research. Sb. Nauch. Trudov Gidroproekta, 100, pp. 24–35.

14. *Bolotin VV.* (1958). Nonlinear theory of elasticity and stability in large. *Rasch. Prochn.*, 3, pp. 310–354.
15. *Bushnell D. and Smith S.* (1971). Stress and buckling of nonuniformly heated cylindrical and conical shells. *AIAA J.*, 9, No. 12, pp. 2314–2321.
16. *Vainberg DV, Gotsulyak EA, Gulyaev VI.* (1972). Thermomechanical instability of a deformable medium. *Sopr. Mater. Teor. Sooruzh.*, 16, pp. 153–156.
17. *Valishvili NV.* (1976). Methods for Computer Design of Shells of Revolution [in Russian], Mashinostroenie, Moscow, 278 p.
18. *Varvak PM, Buzun IM, Gorodetskii AS, et al.* (1981). Finite-Element Method [in Russian], Vysshaya Shkola, Kyiv, 176 p.
19. *Vol'mir AS.* (1967). Stability of Deformable Systems [in Russian], Nauka, Moscow, 984 p.
20. *Golovanov AI and Kornishin MS.* (1990). Introduction to the finite-element method in statics of thin shells, "Kazan. Fiz.-Tekh. Inst. KF AN SSSR, Kazan, 269 p.
21. *Gondlyakh AV.* (1988). Iterative analytical theory of deformation of multilayer shells. *Sopr. Mater. Teor. Sooruzh.*, 53, pp. 33–37.
22. *Grigolyuk EI and Kabanov VV.* (1978). Stability of Shells. M.: "Nauka", 360 p.
23. *Grigolyuk EI and Shalashilin VI.* (1988). Problems of Nonlinear Deformation: Parameter Continuation Method in Nonlinear Problems of Solid Mechanics, M.: "Nauka", 232p.
24. *Grigorenko YaM. and Gulyaev VI.* (1991). Nonlinear problems of shell theory and their solution methods (review). *Int. Appl. Mech.*, 27, No. 10, pp. 929–947.
25. *Gulyaev VI, Bazhenov VA, and Gotsulyak EA.* (1982). Stability of Nonlinear Mechanical Systems [in Russian], Vyshcha Shkola, Lviv, 255 p.
26. *Descloux J.* (1973). Méthode des Éléments Finis, Suisse, Lausanne, 95 p.
27. *Johnson MW, Jr. and McLay RW.* (1968). Convergence of the finite element method in the theory of elasticity" // *ASME, J. Appl. Mech.*, 35, No. 2, pp. 274–278.
28. *Zienkiewicz OC* (1971). The Finite-Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, NY
29. *Zienkiewicz OC, Irons BM, Scott FC, and Campbell JS.* (1971). Three-dimensional stress analysis," in: B. F. de Veubeke (ed.), High Speed Computing of Elastic Structures, Universite de Liege.
30. *Il'in VP and Karpov VV.* (1986). Stability of Ribbed Shells against Large Displacements [in Russian], Stroizdat, Leningrad, 168 p.
31. *Kantor BYa.* (1974). Nonlinear Problems in the Theory of Inhomogeneous Shallow Shells [in Russian], Kyiv: Naukova Dumka, 136 p.
32. *Kislookii VN, Sakharov AS, and Solovei NA.* (1977). Moment scheme of the finite-element method in geometrically nonlinear problems regarding the strength and stability of shells. *Strength of Materials*, 9, No. 7, pp. 808–817.
33. *Koldunov VA, Kudinov AN, and Cherepanov OI.* (2006). Three-dimensional stability analysis of shells. In: Proc. 6th Int. Sci. Symp. on Modern Problems of Plasticity and Stability in Solid Mechanics (Tver, March 1–3, 2006) [in Russian], Tver: TGTU, pp. 31–39.
34. *Koldunov VA and Cherepanov O I.* (2002). Numerical model for design of shells and shell structures using three-dimensional nonlinear theory of elasticity. In: Complex Systems: Data Processing, Modeling, and Optimization [in Russian], Tver: TvGU, pp. 48–59.
35. *Kucheryuk VI, Dorogin AD, and Bochagov VP.* (1983). Design of multilayer plates by an experimental-theoretical method. *Sroit. Mekh. Rasch. Sooruzh.*, No. 2, pp. 72–74.
36. *Liao C.-L. and Reddy JN.* (1989). Analysis of anisotropic stiffened, composite laminates using a continuum-based shell element. *Comput. Struct.*, 34, No. 6, pp. 805–815.
37. *Sakharov AS, Kislookii VN, Kirichevskii VV, et al.* (1982). Finite-Element Method in Solid Mechanics [in Russian], Kyiv: Vyshcha Shkola, 480 p.
38. *Nikolaev AP and Kiselev AP.* (2001). Using the three-dimensional theory to design shells. In: Proc. Int. Sci. Conf. on Architecture of Shells and Strength Analysis of Thin-Walled Building and Engineering Structures of Complex Shape [in Russian], Izd. RUDN, Moscow, pp. 29–30.
39. *Nikolaev AP and Kiselev AP.* (2001). Design of shells based on three-dimensional finite elements in the form of a triangular prism and octagon. In: Proc. Int. Sci. Conf. on Architecture of Shells and Strength Analysis of Thin-Walled Building and Engineering Structures of Complex Shape [in Russian], Izd. RUDN, Moscow, pp. 319–323.
40. *Nowacki W.* (1970). Theory of Elasticity [in Polish], PWN, Warsaw, 872 p.
41. *Novozhilov VV.* (1962). Theory of Thin Shells [in Russian], Sudpromgiz, Leningrad, 431 p.
42. *Ogibalov PM and Griбанov VF.* (1968). Thermal Stability of Plates and Shells [in Russian], Moscow: Izd. MGU, 520 p.
43. *Oden JT.* (1971). Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York.
44. *Perel'muter AV and Slivker VI.* (2007). Design Models of Structures and Possibility to Analyze Them [in Russian], Moscow: Izd. DMK Press, 600 p.
45. *Piskunov VG and Verizhenko VE.* (1986). Linear and Nonlinear Problems for Layered Structures [in Russian], Kyiv: Budivel'nyk, 176 p.

46. *Podstrigach YaS and Shvets RN.* (1983). Thermoelasticity of Thin Shells [in Russian], Kyiv: Naukova Dumka, 343 p.
47. *Rasskazov AO, Sokolovskaya II, and Shul'ga NA.* (1986). Theory and Design of Layered Orthotropic Plates and Shells [in Russian], Kyiv: Naukova Dumka, 191 p.
48. *Rikards RB.* (1988). Finite-Element Method in the Theory of Shells and Plates [in Russian], Riga: Zinatne, 284 p.
49. *Sakharov AS.* (1974). A moment finite-element scheme (MFES) that allows for rigid-body displacements. *Sopr. Mater. Teor. Sooruzh.*, 24, pp. 147–156.
50. *Sakharov AS and Solovei NA.* (1977). Convergence analysis of the finite-element method in problems of plates and shells. In: *Spatial Structures of Buildings and Installations* [in Russian], Issue 3, Moscow: Stroizdat, pp. 10–15.
51. *Solovei MO.* (2003). Modeling the thermoelastic properties of multilayer materials in buckling problems for inhomogeneous shells. *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 73, pp. 17–30.
52. *Solovei MO.* (2006). A modified three-dimensional finite element for modeling thin inhomogeneous shells. *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 80, pp. 96–113.
53. *Solovei NA, Krivenko OP.* (2002). Comparative analysis of solutions to buckling problems for flexible shells subject to different laws of nonuniform heating. *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 70, 104–109.
54. *Solovei NA and Krivenko OP.* (2004). Influence of heating on the stability of smooth shallow spherical shells with linearly varying thickness. *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 74, pp. 60–73.
55. *Solovei NA and Krivenko OP.* (2004). Influence of heating on the stability of faceted shallow spherical shells. *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 75, pp. 80–86.
56. *Strang G and Fix G.* (1973). *An Analysis of the Finite-Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
57. *Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S* (1959). *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, NY.
58. ANSYS User's Manual for revision 5.6. Vol. I. Procedure; Vol. II. Command; Vol. III. Elements; Vol. IV. Theory.
59. *Solovei NA.* (2001). Geometrical modelling of shells with complex form by finite element system for strength analysis. *Prikl. Geometr. Inzhen. Grafika*, 69, pp. 245–251.
60. *Karpov VV.* (2011). Strength and stability of reinforced shells of revolution. In two parts. Part 2. Computer experiment in static mechanical action [in Russian], Moscow: FIZMATLIT, 248 p.
61. *Bazhenov VA, Solovei NA.* (2009). Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads. *International Applied Mechanics*, Vol. 45, № 9, 923-953.
62. *Bazhenov VA, Krivenko OP, Solovei NA.* (2010). Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure [in Ukraine]. Kyiv: ZAT «Vipol», 316 p.
63. *Bazhenov VA, Solovei NA.* 2012. Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads. *Mechanics successes in 6 volumes. Vol. 6 (Book 2)*, Kyiv: Litera LTD, pp. 609-645.
64. *Bazhenov VA, Krivenko OP, Solovei NA.* 2013. Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure: Models, Methods, Algorithms, Poorly Studied and New Problems [in Russian]. Moscow: Book House "LIBRIKOM", 336 p.
65. LIRA 9.4 User Guide. Basics. Textbook. *Strelets- Streletsky EB, Bogovis VE, Genzersky YV, Geraymovich YD, et al.* Kyiv: Izd. "Fact", 2008, 164 p.
66. SCAD Office. Software SCAD. *Karpilovsky VS, Kriksunov EZ, Perel'muter AV, Perel'muter MA.* Moscow: Izd. "SCAD SOFT", 2009 [in Russian], 656 p.
67. GOST 82-70 (ST SEV 2884-81). Steel mill universal broadband. Assortment. (Instead of GOST 82-57); introduced. 1.1.72. Moscow: Publishing House of Standards, 1983, 6 p.
68. *Gorodetski AS, Evzerov ID.* (2007). Computer models of structures. Kyiv: Izd. "Fact", 394 p.

MODELING OF NONLINEAR DEFORMATION AND BUCKLING OF ELASTIC INHOMOGENEITIES SHELLS

Bazhenov V. A., Solovei N.A., Krivenko O.P., Mishchenko O. A.
Kyiv National University of Building and Architecture, Kyiv, Ukraine

The paper outlines the fundamentals of the method of solving static problems of geometrically nonlinear deformation, buckling, and postbuckling behavior of thin thermoelastic inhomogeneous shells with complex-shaped mid-surface, geometrical features throughout the thickness, and multilayer structure under complex thermomechanical loading. The method is based on the geometrically nonlinear equations of three-dimensional thermoelasticity and the moment finite-element scheme. The method is justified numerically. Comparing solutions with those obtained by other authors and by software LIRA and SCAD is conducted.

KEY WORDS: geometrically nonlinear deformation, buckling, thin elastic inhomogeneous shell, thermomechanical load