

**Геометрия поверхностей и кривых**

**ОВАЛ КАССИНИ, ЛЕМНИСКАТА И ЛЕМНИСКАТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ**

В.Н. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*  
 Российский университет дружбы народов, 117198, Москва,  
 ул. Миклухо-Маклая, 6. Тел. (495) 955-098-21; E-mail: [i.v.ivn@mail.ru](mailto:i.v.ivn@mail.ru)

В статье рассматриваются вопросы геометрии овала Кассини, лемнискаты и образования поверхностей с образующими или направляющими кривыми в форме лемнискаты, в том числе геометрия односторонней лемнискатной поверхности.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Овал Кассини, лемниската, направляющие и образующие кривые поверхности, лемнискатный цилиндр, лемнискатный конус, односторонняя лемнискатная поверхность.

Лемниската (Лемниската Бернулли) является частным случаем семейства кривых "овала Кассини". Овал Кассини - геометрическое место точек  $M$  произведение расстояний которых  $F_1M$  и  $F_2M$  ( $F_1, F_2$  - фиксированные точки с координатой  $\pm c$  - фокусы овала) есть постоянная величина  $F_1M \times F_2M = a^2$  ( $a = \text{const}$ ) (рис. 1) [1]. Уравнение овала Кассини в полярной системе координат получаем в виде:

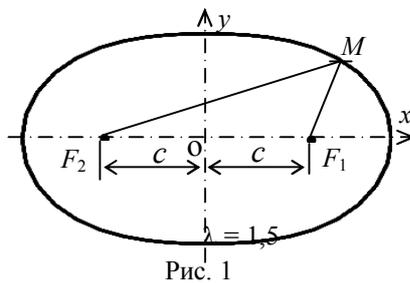


Рис. 1

$$r^2(\theta) = c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\theta + (a^4 - c^4)} = c^2 \left( \cos 2\theta + p \sqrt{\cos^2 2\theta + (\lambda^4 - 1)} \right), \quad (1)$$

где  $\lambda = a/c$  - параметр определяющий форму овала Кассини,  $p = \pm 1$

Овалы Кассини с различными значениями параметра  $\lambda$  представлены на рис. 2.

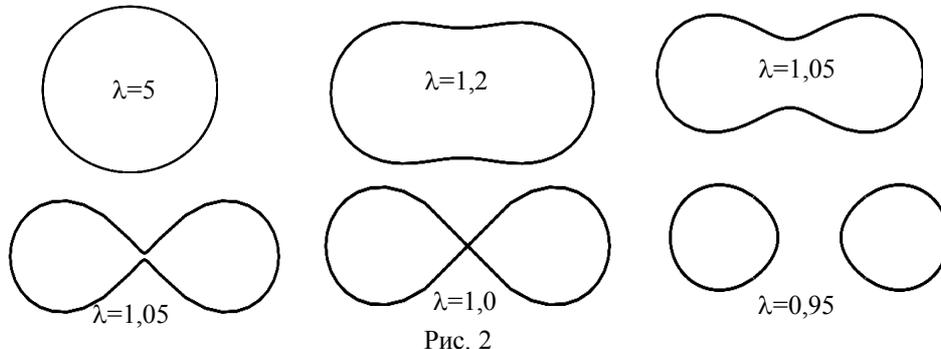


Рис. 2

При больших значениях параметра  $\lambda$  форма овала приближается к форме круга, при  $\lambda < 1,4$  средние точки овала на оси  $Oy$  сближаются. При значении параметра  $\lambda = 1$  ( $a = c$ ) получаем замкнутую самопересекающуюся кривую называемую Лемнискатой. Лемниската разделяет овалы Кассини на два семейства:

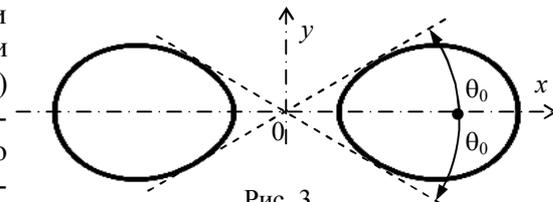


Рис. 3

семейство однополостных замкнутых овалов Кассини  $\lambda > 1$  и семейство двуполостных (раздельных замкнутых) овалов Кассини  $\lambda < 1$ .

При  $\lambda < 1$  овал Кассини распадается на две несовпадающие замкнутые симметрично расположенные кривые  $r(\theta) = \pm\sqrt{\dots}$ . При  $\lambda > 1$  координатный параметр  $\theta$  (полярный угол) изменяется в пределах  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , изменение знака параметра  $p$  повторяет ту же кривую. При  $\lambda < 1$  имеем  $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ , где  $\theta_0 = 0,5 \arccos \sqrt{1 - \lambda^4}$ . Угол  $\pm\theta_0$  определяет направление касательных, проведенных из начала координат к кривой овала. Точка касания разделяет овал на две части определяемых знаком параметра  $p$  (рис.3).

Рассмотрим лемнискату, которую также называют лемнискатой Бернулли, в честь швейцарского ученого Я. Бернулли, впервые опубликовавшего работу с уравнением этой кривой в 1694 году, хотя общие исследования овала были проведены итальянским ученым Д. Кассини на 14 лет раньше. Уравнение лемнискаты с учетом  $\lambda = 1, a = c$  получаем в полярной системе координат в виде:

$$r(\theta) = a\sqrt{2 \cos 2\theta} = b\sqrt{\cos 2\theta}, \quad b = a\sqrt{2}. \quad (2)$$

Параметр  $\pm a$  определяет положение полюсов лемнискаты,  $\pm b$  определяет координаты наиболее удаленных точек лемнискаты на оси  $x$ . Координатный параметр  $\theta$  изменяется в пределах  $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$  для правой ветви лемнискаты и  $3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$  для левой ветви. Нетрудно получить характеристики лемнискаты:

$$r' = b \sin 2\theta / \sqrt{\cos 2\theta}, \quad s' = b / \sqrt{\cos 2\theta}, \quad k = 3\sqrt{\cos 2\theta} / b, \quad k_s = s'k = 3, \quad (3)$$

где  $k$  - кривизна лемнискаты.

Переходя от полярной системы координат к прямоугольным координатам получаем неявное уравнение лемнискаты в виде

$$x^2 + y^2 = b^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = b^2(x^2 - y^2), \quad (4)$$

откуда следует что лемниската является алгебраической кривой 4-го порядка.

Введем соотношение  $y = x \sin v$ . Подставляя данное соотношение в уравнение (4), получаем параметрические уравнения лемнискаты:

$$x(v) = b \frac{\cos v}{1 + \sin^2 v}, \quad y(v) = x \sin v = x(v) \sin v = b \frac{\cos v}{1 + \sin^2 v} \sin v, \quad (5)$$

Параметрические уравнения (4) определяют лемнискату как непрерывную замкнутую самопересекающуюся кривую при изменении координатного параметра  $v$  в пределах  $0 \leq v \leq 2\pi$ . Если вдоль лемнискаты как направляющей кривой будет перемещаться прямая линия, то получим лемнискатный цилиндр, параметрические уравнения которого получим в виде (рис. 4)

$$X(u, v) = x(v) + u \sin \varphi \cos \psi; \quad Y(u, v) = x(v) + u \sin \varphi \sin \psi, \quad z(u) = u \cos \varphi, \quad (6)$$

где  $\varphi = \text{const}$  - угол отклонения образующей прямой от вертикальной оси;  $\psi = \text{const}$  - угол поворота плоскости образующей прямой вокруг вертикальной оси  $Oz$ . При  $\varphi = \psi = 0$ , получаем прямой цилиндр [2], в противном случае - наклонный цилиндр. На рис. 4,а представлен прямой цилиндр, на рис. 4,б - наклонный цилиндр  $\varphi = \pi/6, \psi = 0$ ; на рис. 4,в - наклонный цилиндр  $\varphi = \pi/6, \psi = \pi/4$ .

Отметим, что лемнискатный цилиндр является двухсторонней поверхностью. Двигаясь по внешней стороне левой ветви поверхности можно перейти во внутреннюю сторону правой ветви поверхности, двигаясь по которой мы вновь возвращаемся на внешнюю сторону левой ветви (рис. 5) и наоборот. Ниже будет рассмотрена односторонняя лемнискатная поверхность.

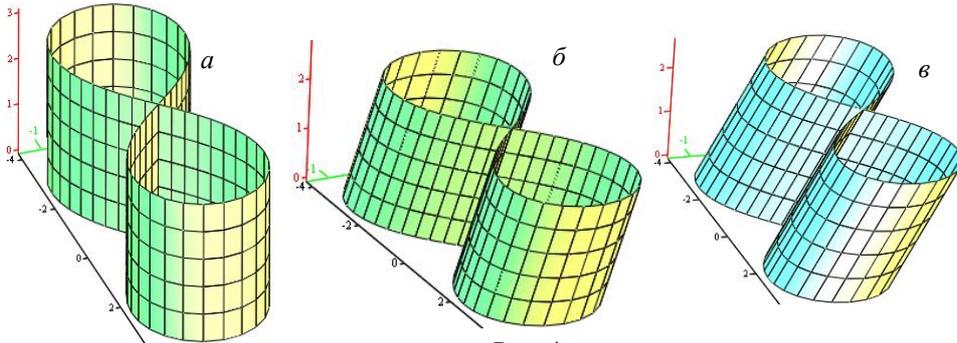


Рис. 4

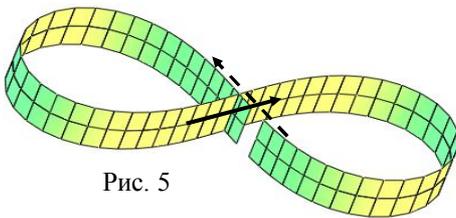


Рис. 5

Если для направляющей лемнискаты цилиндрической поверхности использовать полярное уравнение лемнискаты (1), заменив в уравнениях (5) функции  $x(v)$ ,  $y(v)$  на  $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$  и  $y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$ , тогда вид поверхности не изменяется, но правую и левую ветви

цилиндрической поверхности строятся в пределах ветвей лемнискаты. Коэффициенты квадратичных форм и кривизны для лемнискатной цилиндрической поверхности получаем в виде:

$$A = s'; \quad B = 1; \quad F = [r'(\theta)\cos(u - \psi) - r(\theta)\sin(u - \psi)]\sin\varphi;$$

$$L = \frac{\cos\varphi}{\Sigma} [r(r - r'') + 2r'^2]; \quad M = 0; \quad N = 0; \quad \Sigma = \sqrt{A^2 - F^2}.$$

$$r(r - r'') + 2r'^2 = s'^3 k; \quad k_1 = \frac{L}{A^2} = k_s \frac{\cos\varphi}{\Sigma} = 3 \frac{\cos\varphi}{\Sigma}; \quad k_2 = 0. \quad (6)$$

$s'$ ,  $k$ ,  $k_s$  определяются по формулам (3).

Для прямого лемнискатного цилиндра  $F = 0$ ,  $\Sigma = s'$ ,  $k_1 = k$ .

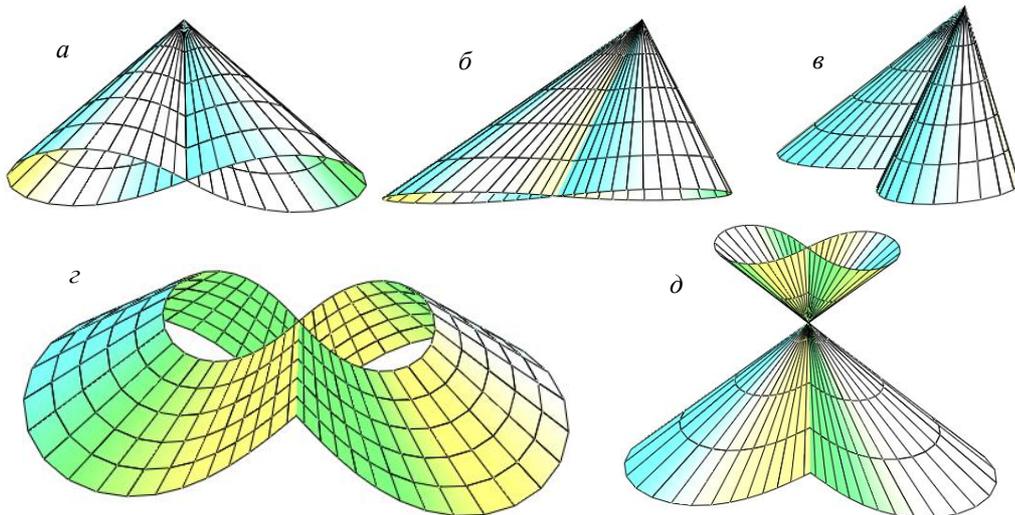


Рис. 6.  $b = 1$ ;  $z_0 = 1$ .

- а)  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ; б)  $x_0 = 0,5$ ,  $y_0 = 0$ ; в)  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0,5$ ;  $0 \leq u \leq 1$ ;  
 г)  $0,6 \leq u \leq 1$  - усеченный лемнискатный конус;  
 д)  $-0,3 \leq u \leq 1$  - двуполостный лемнискатный конус;

Рассмотрим поверхность лемнискатного конуса. Задаваясь положением вершины конуса не лежащей в плоскости лемнискаты, получим векторное уравнение поверхности конуса в виде:

$$\rho(u, v) = r_0(1 - u) + u[x(v)\mathbf{i} + y(v)\mathbf{j}], \quad (7)$$

где  $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$  - радиус вектор вершины конуса ( $z_0 \neq 0$ );  $x(v), y(v)$  - параметрические уравнения направляющей лемнискаты (5); координатный параметр  $u$  определяет прямолинейную образующую конуса перемещаясь от вершины конуса ( $u=0$ ) до направляющей лемниската ( $u=1$ ) В тоже время параметр  $u$  может изменяться от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

При  $x_0 = y_0 = 0$  получаем прямой лемнискатный конус, в противном случае наклонный цилиндр. Примеры лемнискатных цилиндров приведены на рис. 6.

Если совместить движение образующей прямой по направляющей лемнискате с одновременным движением по некоторому закону начальной точки  $r_0$ , то получим линейчатую лемнискатную поверхность общего типа.

Пусть  $x_0 = x_0(v) = c \sin(pu), y_0 = y_0(v) = d \cos(pu), z_0 = const$ , т.е точка  $r_0$  описывает эллипс  $p$ -кратный эллипс в плоскости  $z=z_0$  при обходе образующей прямой направляющей лемнискаты (рис. 7). Если коэффициент  $p = 0,5$  точка  $r_0$  описывает половину эллипса и поверхность получается самопересекающейся, но незамкнутой по образующим линиям, за исключением точки на направляющей лемнискате (рис. 7,в).

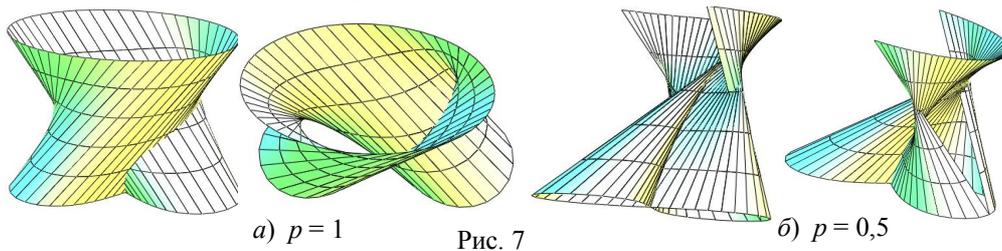


Рис. 7

Если один из коэффициентов движения вершины  $r_0$   $c$  или  $d$  равен нулю, то эллипс вырождается в прямую линию. Формы лемнискатных поверхностей представлены на рис. 8.

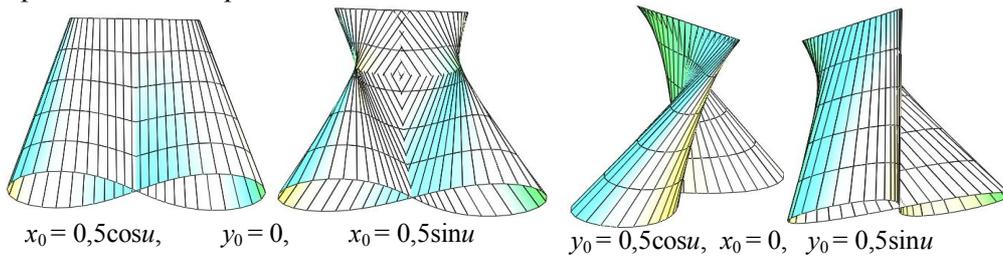


Рис. 8

Рассмотрим поверхности с произвольной направляющей кривой и образующей в форме лемнискаты в нормальной плоскости направляющей кривой. Векторное уравнение поверхности получаем в виде [3]

$$\rho(u, v) = r(u) + x(v)\mathbf{e}(u) + y(v)\mathbf{g}(u), \quad (8)$$

где  $r(u)$  - радиус вектор направляющей кривой;  $\mathbf{e}(u) = \mathbf{v} \cos \theta(u) + \mathbf{\beta} \sin \theta(u)$ ;  $\theta(u)$  - функция, определяющая поворот координатной системы образующей кривой относительно нормали  $\mathbf{v}$  и бинормали  $\mathbf{\beta}$  направляющей кривой;  $\mathbf{g}(u)$  - вектор перпендикулярный вектору  $\mathbf{e}(u)$  в нормальной плоскости направляющей кривой -  $\mathbf{g}_0(u) = -\mathbf{v} \sin \theta(u) + \mathbf{\beta} \cos \theta(u)$ .

Для плоской направляющей кривой вектор бинормали совпадает с направлением оси  $Oz$  ( $\beta = k$ ). Если для плоской направляющей кривой плоская и образующая лемниската не вращается в нормальной плоскости направляющей кривой  $\theta = \text{const}$ , то получим лемнискатную поверхность Монжа.

На рис. 9 приведены лемнискатные поверхности с направляющей циклоидой:  $r = a[(u - \sin u)i + (1 - \cos u)j]$ :

- а) горизонтальная лемниската  $\theta = 0$ ;
- б) вертикальная лемниската  $\theta = \pi/2$ ;
- в) наклонная лемниската  $\theta = \pi/4$  - поверхность "диван";
- г) закрученная циклоидально-лемнискатная поверхность - лемниската вращается по линейному закону  $\theta(u) = \pi/4 + u$ .

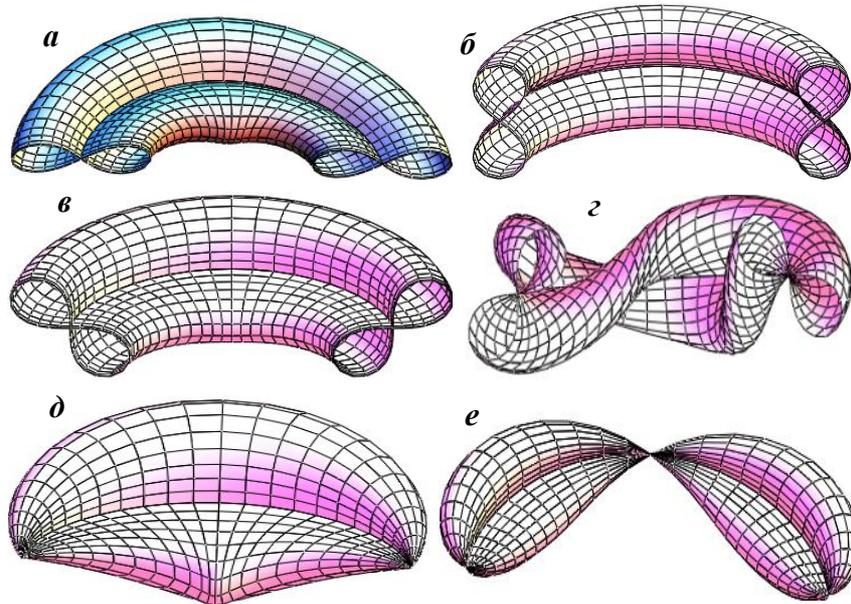


Рис. 9. Циклоидально-лемнискатные поверхности

На рис. 9, д, е построены циклоидально-лемнискатные поверхности с переменным размерным параметром лемнискаты  $b = b(u)$ :

- д)  $b = 1 - \cos u$  - поверхность "софа";
- е)  $a = \sin u$  - поверхность "двойное кресло";

Рассмотрим лемнискатные поверхности с замкнутой направляющей кривой - эллипсом:  $r = a \cos u i + c \sin u j$  (рис. 10). В верхнем ряду параметр лемнискаты  $b = \text{const}$ , лемниската повернута относительно плоскости направляющего эллипса на угол: а)  $\theta = 0$ ; б)  $\theta = \pi/2$ ; в)  $\theta = \pi/4$ .

В нижнем ряду поверхности с переменным параметром лемнискаты:

- г)  $\theta = \pi/4$ ;  $b = 1,5u$  - линейное изменение размера образующей лемнискаты;
- д, е)  $\theta = -\pi/3$ ;  $b = b_0(1 - b_1 \sin pu)$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 0,5$ ; д)  $p = 1$ ; е)  $p = 4$ .

Пусть образующая лемниската вращается в нормальной плоскости эллипса  $\theta = pu$  (см. формулу (8), вектор-функции  $e(u) = e(u, \theta(u))$  б)). На рис. 11 представлены поверхности с параметром  $p = 0,25$ .

При полном обходе направляющего эллипса  $0 \leq u \leq 2\pi$  образующая лемниската поворачивается на  $90^\circ$ , поверхность получается незамкнутой. Однако если продолжать движение лемнискаты с той же скоростью вращения, то полу-

чается вторая ветвь поверхности перпендикулярная первой ветви и при повторном полном обходе эллипса  $0 \leq u \leq 4\pi$  получается замкнутая поверхность.

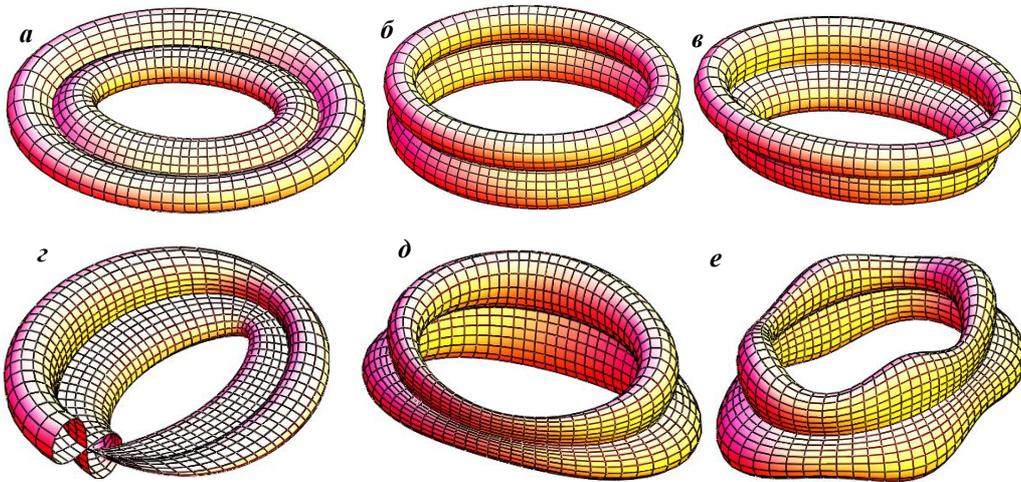


Рис. 10

При  $p = m/2$ ,  $m$  - целое число, при обходе направляющего эллипса  $0 \leq u \leq 2\pi$  получаем замкнутую лемнискатную поверхность.

При  $m$  четном происходит полный поворот (или несколько полных поворотов) лемнискаты и ветви лемнискаты занимают исходное положения. В этом случае получается двухсторонняя поверхность.

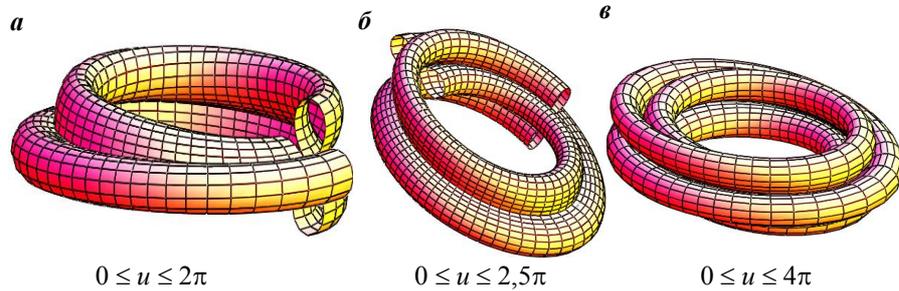


Рис. 11.  $p = 0,25$

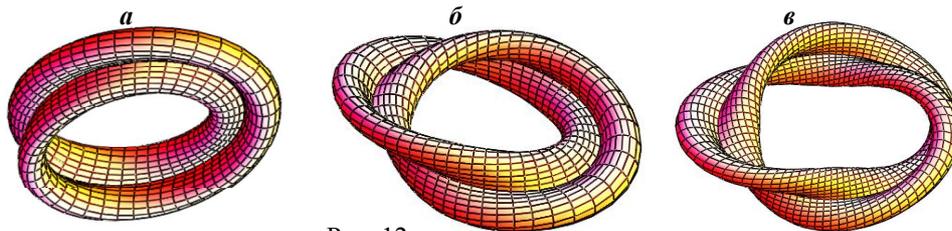


Рис. 12

При нечетном  $m$  ветви лемнискаты меняют взаимное положение (поворот лемнискаты на  $180^\circ$  или кратно  $2\pi + 180^\circ$ ), получаем одностороннюю поверхность. При обходе поверхности вдоль направляющего эллипса с внутренней (или внешней стороны поверхности) попадаем из одной ветви образующей лемнискаты в другую ветвь. Как было показано выше, двигаясь по внутренней (внешней) стороне одной ветви лемнискаты, переходим во внешнюю (внутреннюю) сторону второй ветви лемнискаты. Невозможно было попасть с внутренней (внешней) одной ветви лемнискаты стороны на внутреннюю (внешнюю) стороны другой ветви (см. лемнискатный цилиндр). Теперь, когда за счет вра-

щения образующей лемнискаты мы попадаем с внутренней (внешней) стороны одной полости лемнискатной поверхности мы попадаем во внутреннюю (внешнюю) сторону стороны другой полости поверхности, а при обходе по образующей лемнискате мы выходим внешнюю и внутреннюю стороны поверхности. Лемнискатно-эллипсоидальная поверхность при нечетном целом значении параметра  $m$  ( $p = /m.2$ ) является односторонней поверхностью. Замкнутая лемнискатная поверхность на рис. 11, в также является односторонней поверхностью.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Lawrence J. D.* A Catalog of Special Plane Curves. NY: Dover, 1972. – Pp. 153-155.
2. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. - М.: Книжный дом «Либроком», 2010. – 556 с.
3. *Иванов В.Н.* Геометрия и формообразование нормальных поверхностей с семейством плоских координатных линий// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 4. – С. 6-14.

#### References

1. *Lawrence J D.* (1972). *A Catalog of Special Plane Curves*. New York: Dover, pp. 153-155.
2. *Krivoshapko SN, Ivanov VN.* (2010). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Moscow: Knizhniy Dom "LIBROCOM", 556 p.
3. *Ivanov VN.* (2011). Geometry and forming of the normal surfaces with the family of the plane coordinate lines. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. № 4, p. 6-14.

### CASSINI OVAL, LEMNISCATE CURVE AND LEMNISCATE SURFACES

V.N. Ivanov

*Peoples' Friendship University of Russia, Russia, Moscow*

The article concerns the geometry of Cassini oval, lemniscates, lemniscate surfaces on the base of lemniscate and, as partial, the one-sided lemniscate surfaces.

KEY WORDS: Cassini oval, lemniscate, generatrix and director of the surfaces, lemniscate cylinder, lemniscate cone, one-sided lemniscate surface.

