

STABILITY OF OSCILLATIONS OF SYSTEM WITH FINITE DEGREES OF FREEDOM AT STOCHASTIC EXCITATION

Папаев М.А.

In the article, the stability of systems with finite of degrees of freedom is considered at the determined and stochastic action on the example of a suspension bridge. Calculations are executed on two models: the first one describes oscillations of a rigidity beam of the bridge by system of two partial differential equation and the second describes the same oscillations with help of FEM. Influence of parameters of the stochastic excitation on the value of the critical parameter is investigated.



ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЗАГЛУБЛЕНИЯ РОСТВЕРКА ПРИ КОЛЕБАНИЯХ СВАЙНОГО ФУНДАМЕНТА

А.О. КОЛЕСНИКОВ, *канд. техн. наук*

В.Н. ПОПОВ, *д-р. физ.-мат. наук*

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

Большинство свайных фундаментов под машины являются заглубленными. В настоящее время в решении задачи о влиянии заглубления фундаментов не существует единого подхода. Одной из успешных попыток разрешить эти противоречия явилась работа М.И. Забылина [1], в которой заглубление оценивалось с использованием волновой модели, и учитывалось реакцией грунта на боковой поверхности фундамента [2]. Дальнейшие исследования по учету заглубления свайных фундаментов, в постановке аналогичной [1] были предприняты в работе [3]. В ней был сделан вывод о необходимости учета заглубления свайного ростверка при прогнозировании его колебаний, а также описана методика вычисления динамических параметров заглубленного свайного фундамента, путем суммирования соответствующих параметров жесткости и демпфирования для свайного основания и ростверка. Однако, в [3] не был сделан анализ влияния заглубления ростверка на амплитуду колебаний фундамента и не были представлены формулы по определению его параметров жесткости и демпфирования.

В настоящей работе проводится исследование влияния заглубления свайного фундамента на амплитуду его колебаний, представлены используемые формулы для определения динамических параметров заглубленного ростверка, проводится сравнение данных, полученных экспериментально, с результатами расчетов без учета и с учетом ростверка, имеющего квадратную форму в плане.

При рассмотрении влияния заглубления свайного фундамента, представим его в виде стержневой системы, объединенной сверху жестким ростверком. Рассматриваются отдельно вертикальные, горизонтальные и вращательные колебания (рис. 1).

Для каждого вида колебаний (вертикальных, горизонтальных, сдвиго-вращательных) динамические параметры заглубленного свайного фундамента предлагается определять выражениями (1)-(4).

$$K_{zz} = K_{zz}^{cap} + \sum_n K_{zz}^{pile}, \quad C_{zz} = C_{zz}^{cap} + \sum_n C_{zz}^{pile}, \quad (1)$$

$$K_{xx} = K_{xx}^{cap} + \sum_n K_{xx}^{pile}, \quad C_{xx} = C_{xx}^{cap} + \sum_n C_{xx}^{pile}, \quad (2)$$

$$K_{x\varphi} = K_{x\varphi}^{cap} + \sum_n (K_{x\varphi}^{pile} - K_{xx}^{pile} h), \quad C_{x\varphi} = C_{x\varphi}^{cap} + \sum_n (C_{x\varphi}^{pile} - C_{xx}^{pile} h), \quad (3)$$

$$K_{\varphi\varphi} = K_{\varphi\varphi}^{cap} + \sum_n (K_{\varphi\varphi}^{pile} + K_{zz}^{pile} x_i^2 + K_{xx}^{pile} h^2 - 2K_{x\varphi}^{pile} h),$$

$$C_{\varphi\varphi} = C_{\varphi\varphi}^{cap} + \sum_n (C_{\varphi\varphi}^{pile} + C_{zz}^{pile} x_i^2 + C_{xx}^{pile} h^2 - 2C_{x\varphi}^{pile} h), \quad (4)$$

в которых параметры жесткости K и демпфирования C определяются с учетом взаимодействия ростверка с грунтом. В этом случае проводится суммирование соответствующих динамических параметров свайного основания K^{pile} , C^{pile} и свайного ростверка K^{cap} , C^{cap} . В формулах (1)-(4) x_i – расстояние от оси вращения ростверка до i -ой свай; n – количество свай в фундаменте

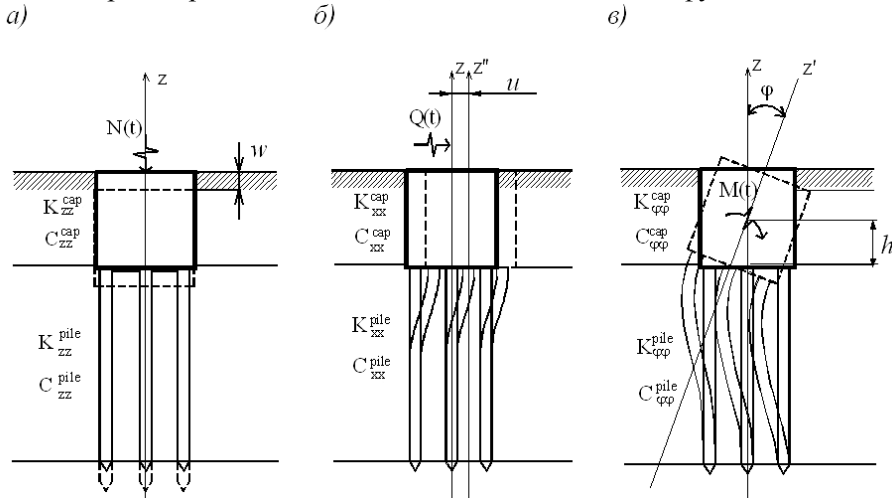


Рис. 1. Расчетная схема свайного фундамента с заглубленным ростверком при а) вертикальных, б) горизонтальных и в) вращательных колебаниях

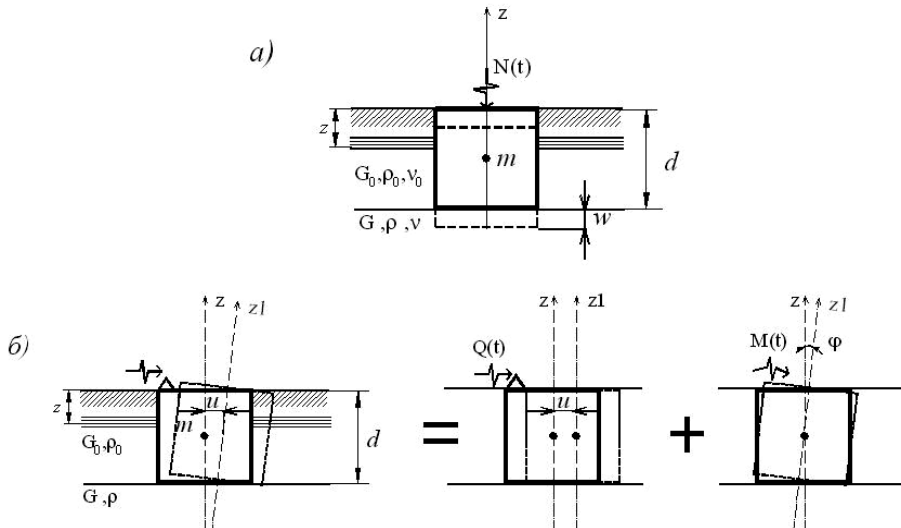


Рис.2. Расчетные схемы заглубленного ростверка для определения параметров жесткости демпфирования вертикальных (а) и сдвига-вращательных (б) колебаний

Для определения K^{cap} и C^{cap} ростверк рассматривается в виде призматического тела, не теряющего контакта с окружающим грунтом в процессе колебаний (рис.2). Грунт в пределах его боковой поверхности моделируется совокупностью бесконечно тонких независимых пластин, по которым в различных

направлениях распространяются упругие волны. На рис.2.а показана схема системы «основание – заглубленный свайный ростверк» при вертикальных колебаниях. Грунт, контактирующий с боковой поверхностью ростверка, имеет характеристики: ν_0 – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность грунта, $G_0 = V_{s0}^2 \rho_0$ – модуль сдвига, V_{s0} – скорость поперечных волн в грунте. Грунт основания имеет соответствующие характеристики: ν, ρ, G, V_s . Запишем уравнение вертикальных колебаний с учетом боковой реакции S_w и реакции под подошвой ростверка R_z в виде [4]

$$m \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} + R_z(t) + S_w(t) = N(t), \quad (5)$$

где $w(t)$ – амплитуда перемещений, $N(t)$ – возмущающая сила. При использовании принципа суперпозиции, реакции на ростверк определяются отдельно. Каждая реакция имеет жесткостную и демпфирующую составляющие. Динамическая реакция под подошвой ростверка определяется

$$R_z(t) = GrF_{1z} w(t) + \sqrt{G\rho} r^2 \frac{F_{2z}}{a_0} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (6)$$

где r – характерный радиус: для круглого в плане тела $r = r_0$, где r_0 – радиус круга, для прямоугольного $r = \sqrt{ab/\pi}$, где a и b – стороны прямоугольника;

$$F_{1z} = \frac{-f_{1z}}{f_{1z}^2 + f_{2z}^2} \text{ и } F_{2z} = \frac{f_{2z}}{f_{1z}^2 + f_{2z}^2}$$

– функции жесткости и демпфирования; $a_0 = r\omega\sqrt{\rho/G}$ – безразмерная частота колебаний.

При гармонических колебаниях с частотой ω имеем

$$w(t) = we^{i\omega t}, \text{ а } \frac{\partial w}{\partial t} = i\omega we^{i\omega t}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$R_z = Gr(F_{1z} + iF_{2z})w(t). \quad (8)$$

Динамическую реакцию, действующую по боковой поверхности ростверка, можно также представить функцией, учитывающей жесткостную и демпфирующую составляющую [2]

$$S_w(t) = \int_0^d s_w(w, t) dw, \quad (9)$$

где d – величина заглубления, $s_w(t) = G_0(S_{w1} + iS_{w2})w(t)$ – динамическая реакция слоя единичной толщины, действующая по боковой грани, в которой S_{w1} и S_{w2} – функции жесткости и демпфирования грунта. При определении этих функций могут использоваться выражения для круглых в плане ростверков [2]. Однако, ввиду того, что ростверки имеют прямоугольную конфигурацию и достаточно большие линейные размеры в плане, существует необходимость учитывать геометрию заглубленного ростверка с помощью выражений [4]. Использование этих выражений для ростверков уточняет расчет по сравнению с [2] до 20%.

Далее, вычисляя интеграл (9) получаем

$$S_w(t) = G_0 d (S_{w1} + iS_{w2}) w(t), \quad (10)$$

Динамическую нагрузку можно представить в виде

$$N(t) = Ne^{i\omega t} = N(\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Таким образом, уравнение (5) с учетом (8) и (10) можно записать

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C_{zz}^{cap} \frac{\partial w}{\partial t} + K_{zz}^{cap} w = Ne^{i\omega t}, \quad (11)$$

где
$$K_{zz}^{cap} = K_{zz}^s + K_{zz}^d, \quad C_{zz}^{cap} = C_{zz}^s + C_{zz}^d. \quad (12)$$

Параметры жесткости и демпфирования для подошвы ростверка при вертикальных колебаниях можно представить в виде

$$K_{zz}^s = V_s^2 \rho r F_{1z}, \quad C_{zz}^s = \frac{V_s^2 \rho r}{\omega} F_{2z}, \quad (13)$$

а для боковой поверхности

$$K_{zz}^d = V_{s0}^2 \rho_0 d S_{w1}, \quad C_{zz}^d = \frac{V_{s0}^2 \rho_0}{\omega} d S_{w2}. \quad (14)$$

Оценка влияния заглубления ростверка свайного фундамента при рассмотрении сдвиго-вращательных колебаний проводится так же, как и в рассмотренном выше случае. Схема показана на рис.2.б. Реакции по боковым поверхностям можно представить как сумму от горизонтального перемещения S_u и поворота S_φ . Реакции в основании принимаются такими же, как для фундамента, расположенного на поверхности грунта. Согласно [1], система уравнений, описывающая колебания ростверка записывается в виде

$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + R_x(t) + S_u(t) = Q(t) \\ \theta \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} + R_\varphi(t) + S_\varphi(t) = M(t), \end{cases} \quad (15)$$

где $R_{x,\varphi}(t)$ и $S_{u,\varphi}(t)$ – составляющие реакций по подошве и по боковым поверхностям ростверка при сдвиговой (u) и вращательной (φ) формах колебаний, $Q(t)$, $M(t)$ – возмущающие силы; $u(t)$, $\varphi(t)$ – амплитуды перемещений. Реактивные моменты и момент внешних сил определяются относительно центра тяжести системы. Для решения дифференциальных уравнений принимаются следующие условия: реакции под подошвой ростверка определяются без учета заглубления, а по его боковой поверхности – без учета реакций под подошвой. Исходя из этого, реакции под подошвой определяются как для незаглубленного ростверка

$$R_x(t) = Gr (F_{1x} + iF_{2x}) [u(t) - h\varphi(t)],$$

$$R_\varphi(t) = Gr^3 (F_{1\varphi} + iF_{2\varphi}) \varphi(t) - Gr (F_{1x} + iF_{2x}) [u(t)h - h^2\varphi(t)] \quad (16)$$

где
$$F_{1x,\varphi} = \frac{-f_{1x,\varphi}}{f_{1x,\varphi}^2 + f_{2x,\varphi}^2}, \quad F_{2x,\varphi} = \frac{f_{2x,\varphi}}{f_{1x,\varphi}^2 + f_{2x,\varphi}^2}.$$

Горизонтальная реакция и реактивный момент на боковой поверхности ростверка определяются в соответствии со схемой на рис.2.б.

$$S_u(t) = G_0 r d (S_{u1} + iS_{u2}) \left[u(t) + \left(\frac{d}{2} - h \right) \varphi(t) \right], \quad (17)$$

$$S_\varphi(t) = G_0 r^3 d \left\{ \left[(S_{\varphi1} + iS_{\varphi2}) + \left(\frac{d^2}{3} - d \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2} \right) (S_{u1} + iS_{u2}) \right] \varphi(t) + \frac{1}{r} \left(\frac{d}{2r} - \frac{h}{r} \right) (S_{u1} + iS_{u2}) u(t) \right\},$$

где S_u и S_φ – функции жесткости и демпфирования, которые могут определяться как для круглых, так и для прямоугольных в плане ростверков, согласно [2, 3].

Подставляя уравнение (17) в (15) получим уравнения сдвиго-вращательных колебаний заглубленного ростверка

$$\begin{aligned}
& m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r \left[G(F_{1x} + iF_{2x}) + G_0 d (S_{u1} + iS_{u2}) \right] u(t) + \\
& + r \left[-Gh(F_{1x} + iF_{2x}) + G_0 d \left(\frac{d}{2} - h \right) (S_{u1} + iS_{u2}) \right] \varphi(t) = Q(t), \\
& \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + r^2 \left[G_0 d \left(\frac{d}{2r} - \frac{h}{r} \right) (S_{u1} + iS_{u2}) - G \frac{h}{r} (F_{1x} + iF_{2x}) \right] u(t) + \\
& + r^3 \left\{ G(F_{1\varphi} + iF_{2\varphi}) + G_0 d (S_{\varphi1} + iS_{\varphi2}) + \left(\frac{d^2}{3} - d \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2} \right) (S_{u1} + iS_{u2}) + G \frac{h^2}{r^2} (F_{1x} + iF_{2x}) \right\} \times \\
& \times \varphi(t) = M(t).
\end{aligned} \tag{18}$$

Возмущающие силы и перемещения представим в комплексной форме

$$\begin{aligned}
Q(t) &= Qe^{i\omega t} = Q(\cos \omega t + i \sin \omega t), \\
M(t) &= Me^{i\omega t} = M(\cos \omega t + i \sin \omega t), \\
u(t) &= ue^{i\omega t}, \quad \varphi(t) = \varphi e^{i\omega t}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Используя (19), как решение дифференциальных уравнений, получаем

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[Gr \left(F_{1x} + \frac{G_0}{G} d S_{u1} \right) - m\omega^2 \right] + iGr \left(F_{2x} + \frac{G_0}{G} d S_{u2} \right) \right\} u - \\
& - Gr \left\{ \left[hF_{1x} + \frac{G_0}{G} d \left(h - \frac{d}{2} \right) S_{u1} \right] + i \left[hF_{2x} + \frac{G_0}{G} d \left(h - \frac{d}{2} \right) S_{u2} \right] \right\} \varphi = Q, \\
& \left\{ \left[Gr^3 \left(F_{1\varphi} + \left(\frac{h}{r} \right)^2 F_{1x} + \frac{G_0}{G} d S_{\varphi1} + \frac{G_0}{G} d \left(\frac{d^2}{3} + \frac{h^2}{r^2} - d \frac{h}{r} \right) S_{u1} \right) - \theta\omega^2 \right] + \right. \\
& \left. + iGr^3 \left(F_{2\varphi} + \left(\frac{h}{r} \right)^2 F_{2x} + \frac{G_0}{G} d S_{\varphi2} + \frac{G_0}{G} d \left(\frac{d^2}{3} + \frac{h^2}{r^2} - d \frac{h}{r} \right) S_{u2} \right) \right\} \varphi - \\
& - Gr \left\{ \left[hF_{1x} + \frac{G_0}{G} d \left(h - \frac{d}{2} \right) S_{u1} \right] + i \left[hF_{2x} + \frac{G_0}{G} d \left(h - \frac{d}{2} \right) S_{u2} \right] \right\} u = M,
\end{aligned}$$

где m – масса ростверка, θ – момент инерции массы относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости рассматриваемых колебаний.

Систему (15) запишем в виде

$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_{xx}^{cap} \frac{\partial u}{\partial t} + C_{x\varphi}^{cap} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + K_{xx}^{cap} u + K_{x\varphi}^{cap} \varphi = Qe^{i\omega t} \\ \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + C_{\varphi\varphi}^{cap} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + C_{x\varphi}^{cap} \frac{\partial u}{\partial t} + K_{\varphi\varphi}^{cap} \varphi + K_{x\varphi}^{cap} u = Me^{i\omega t}, \end{cases} \tag{20}$$

где K_{xx}^{cap} , $K_{x\varphi}^{cap}$, $K_{\varphi\varphi}^{cap}$ и C_{xx}^{cap} , $C_{x\varphi}^{cap}$, $C_{\varphi\varphi}^{cap}$ – параметры жесткости и демпфирования ростверка при сдвиго-вращательных колебаниях определяются аналогично вертикальным колебаниям путем суммирования соответствующих значений под подошвой и по боковой поверхности ростверка

$$\begin{aligned}
K_{xx}^{cap} &= K_{xx}^s + K_{xx}^d, \quad C_{xx}^{cap} = C_{xx}^s + C_{xx}^d, \\
K_{\varphi\varphi}^{cap} &= K_{\varphi\varphi}^s + K_{\varphi\varphi}^d, \quad C_{\varphi\varphi}^{cap} = C_{\varphi\varphi}^s + C_{\varphi\varphi}^d, \\
K_{x\varphi}^{cap} &= K_{x\varphi}^s + K_{x\varphi}^d, \quad C_{x\varphi}^{cap} = C_{x\varphi}^s + C_{x\varphi}^d.
\end{aligned} \tag{21}$$

Параметры жесткости и демпфирования для подошвы ростверка при сдвиго-вращательных колебаниях запишем в виде

$$K_{xx}^s = V_s^2 \rho r F_{1x}, \quad C_{xx}^s = \frac{V_s^2 \rho r}{\omega} F_{2x}, \quad K_{\varphi\varphi}^s = V_s^2 \rho r^3 \left[F_{1\varphi} + \left(\frac{h}{r} \right)^2 F_{1x} \right],$$

$$C_{\varphi\varphi}^s = \frac{V_s^2 \rho r^3}{\omega} \left[F_{2\varphi} + \left(\frac{h}{r} \right)^2 F_{2x} \right], \quad K_{x\varphi}^s = K_{\varphi x}^s = V_s^2 \rho r h F_{1x}, \quad C_{x\varphi}^s = C_{\varphi x}^s = \frac{V_s^2 \rho r h}{\omega} F_{2x}. \quad (22)$$

Параметры жесткости и демпфирования для боковой поверхности ростверка при сдвиго-вращательных колебаниях:

$$K_{xx}^d = V_{s0}^2 \rho_0 r d S_{u1}, \quad C_{xx}^d = \frac{V_{s0}^2 \rho_0 r}{\omega} d S_{u2}, \quad K_{\varphi\varphi}^d = V_{s0}^2 \rho_0 r^3 d \left[S_{\varphi1} + \left(\frac{d^3}{3} + d \frac{h}{r} + \left(\frac{h}{r} \right)^2 S_{u1} \right) \right],$$

$$C_{\varphi\varphi}^d = \frac{V_{s0}^2 \rho_0 r^3}{\omega} d \left[S_{\varphi2} + \left(\frac{d^3}{3} + d \frac{h}{r} + \left(\frac{h}{r} \right)^2 S_{u2} \right) \right],$$

$$K_{x\varphi}^d = K_{\varphi x}^d = V_{s0}^2 \rho_0 r d \left(h - \frac{d}{2} \right) S_{u1}, \quad C_{x\varphi}^d = C_{\varphi x}^d = \frac{V_{s0}^2 \rho_0 r}{\omega} d \left(h - \frac{d}{2} \right) S_{u2}. \quad (23)$$

Для решения вопроса о возможности применения в инженерной практике расчетных зависимостей (1)-(4) производился расчет параметров колебаний заглубленного свайного фундамента. Фундамент представляет собой полностью заглубленный в грунт монолитный железобетонный ростверк размерами 1,0×1,0×1,0 м, опирающийся на 4 сваи диаметром 114 мм с рабочей длиной 2 м. На рис. 3 и 4 представлены результаты расчетов амплитудно-частотных характеристик этого фундамента при вертикальных и горизонтальных колебаниях с учетом взаимодействия ростверка с грунтом, без учета этого взаимодействия и данные экспериментальных исследований.

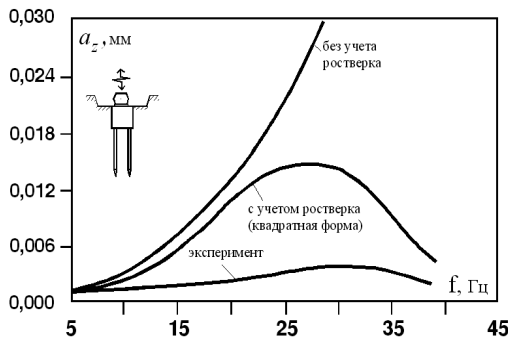


Рис.3. Амплитудно-частотная характеристика вертикальных колебаний свайного фундамента с заглубленным ростверком

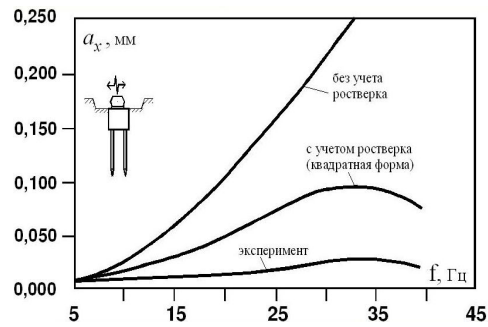


Рис.4. Амплитудно-частотная характеристика горизонтальных колебаний свайного фундамента с заглубленным ростверком

Из представленных результатов следует, что при любых видах колебаний расчет с использованием выражений (1)-(4) приводит к уменьшению амплитуд вынужденных колебаний по сравнению с методикой, учитывающей только свайное основание. Для вертикальных колебаний это уменьшение составляет около 150 %, для горизонтальных – 200%.

Предложенные методы расчета позволяют более полно описывать динамическое поведение заглубленных свайных фундаментов, а учет взаимодействия ростверка с грунтом позволяет более точно оценивать параметры системы.

Амплитуды колебаний, найденные с учетом реакций на боковых поверхно-

стях ростверка, дают лучшее приближение к амплитудам определенным экспериментально для рассматриваемых физических процессов.

Л и т е р а т у р а.

1. *Забылин М.И.* Расчет фундаментов под машины/ М.И. Забылин. – Новосибирск: Изд-во НИСИ, 1983. – 83 с.

2. *Нуждин Л.В.* Учет взаимодействия ростверка с грунтом при колебаниях свайных фундаментов/ Тр. Росс. нац. конф. с иностр. участ. – СПб, 1995. – С. 505-510.

3. *Баранов В.А.* О расчете вынужденных колебаний заглубленного фундамента / В.А. Баранов // Вопросы динамики и прочности: Тр. Риж. ПИ. – Рига, 1967. – № 14. – С. 195 – 209.

4. *Нуждин Л.В., Колесников А.О.* К оценке динамических реакций на контуре прямоугольного выреза в бесконечной пластине// Изв. Вузов. Строительство. – 2004. – №5. – С. 22-31.

ESTIMATION OF THE INFLUENCE OF PILE-CAP DEEPENING AT PILE FOUNDATION VIBRATIONS

A.O. Kolesnikov, V.N. Popov

The expressions to define the parameters of stiffness and damping of the foundation with a deepened pile-cap based on a wave model are offered. For each kind of vibrations, dynamic parameters are defined, with due account to the interaction of a pile-cap with ground. A principle of superposition via summing up corresponding dynamic parameters of pile-cap and piles are used.



ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С АМОРТИЗИРУЮЩЕЙ МАССОЙ НА ТОРЦЕ

А.И. ВАСИЛЬЕВ, канд. техн. наук, доцент

Московский государственный университет природообустройства

В настоящее время для обеспечения сейсмостойкого строительства и безопасности сооружений применяют различные инженерные методы виброгашения сейсмических колебаний строительных конструкций с многомассовыми демпферами [1], резинометаллические виброизоляторы [2], так называемые «сейсмические пояса», подвижные катковые опоры и другие устройства. Колебания балок и плит под действием импульсивных и ударных нагрузок исследовались в статье [3].

Непосредственный практический интерес представляет задача определения оптимальных параметров амортизаторов, обеспечивающих максимальное гашение амплитуды поперечных колебаний строительных конструкций.

В работе в линейной постановке решена задача о поперечных колебаниях здания, вызванных действием поперечной сейсмической волны при условии, что к строительной конструкции прикреплён амортизатор упругого типа.

Моделью задачи является вертикально расположенная упругая балка, нижний торец которой жёстко закреплён в подвижное основание (фундамент), совершающее горизонтальные колебания по заданному закону по времени (инструментально записанная сейсмограмма). К верхнему торцу сооружения на упругой подвеске прикреплён груз, масса которого намного меньше массы сооружения (рис. 1). Математической моделью задачи является дифференциальное уравнение изгибных колебаний её оси (обозначения общеприняты)

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad M_x = EJ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} \left. \right\} \quad (0 < z < H, t > 0) \quad (1)$$