

Динамика конструкций и сооружений

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

М.А. ПАПАЕВ, *инж.*
МГУПС (МИИТ), г. Москва

В практике расчетов зданий и сооружений часто встречаются нагрузки и воздействия, являющиеся случайными функциями времени. Источниками таких нагрузок могут служить атмосферная турбулентность, волнения моря, вибрации двигателей и т. п.

Для некоторых сооружений расчет, учитывающий переменное во времени действие нагрузки, предписывается нормами. Целью подобных расчетов является не только проверка по прочности, деформациям, условиям комфорта эксплуатации, но и проверка на возникновение неустойчивых колебаний. В настоящей статье рассматривается один из возможных подходов оценки устойчивости колебаний систем с конечным числом степеней свободы при воздействии, изменяющемся во времени случайным образом. Проанализировано влияние параметров случайного воздействия на устойчивость системы.

Ярким примером пренебрежения переменным характером нагрузки, приведшим к катастрофическим последствиям, можно назвать крушение Такомского моста спустя 4 месяца после его ввода в эксплуатацию. На примере этого сооружения выполнен ряд расчетов. Подробное описание конструкции моста, а также самой катастрофы приводится в [1, 2]. Отметим, что конструкция моста была рассчитана на статическую нагрузку от ветра при скорости 173 км/час. В день крушения, 7 ноября 1940 г., дул ветер со скоростью 67 км/час. Во время раскачивания, длившегося в общей сложности более 2-х часов, проезжая часть наклонялась из стороны в сторону, составляя с горизонтом угол более 45°. Во время эксплуатации моста иногда наблюдались колебания при скорости ветра 6.5 км/час, иногда же ветры со скоростью 51 км/час не вызывали никаких колебаний [1].

Расчеты выполнены по двум моделям: первая описывает колебания пролетного строения системой двух дифференциальных уравнений в частных производных и вторая, составленная в ПК Ansys, по методу конечных элементов.

В рассмотренных моделях моста не учитываются горизонтальные и поперечные связи, шпангоуты пролетного строения, железобетонная плита проезжей части, нагрузки от конструкций перил, полезная нагрузка.

Балка жесткости, являющаяся по всей длине неразрезной в расчетных моделях рассматривается как шарнирно-опертая. Эти упрощения вызваны отсутствием достаточно детализированной информации о конструкции пролетного строения.

Основная задача состоит в рассмотрении системы с конечным числом степеней свободы при наличии переменной случайно-изменяющейся во времени нагрузки, а не в выполнении поверочного расчета моста. В дальнейшем возможно уточнение модели и приближении ее к реальному прототипу.

*Описание модели Такомского моста
на основе дифференциальных уравнений*

Движение балки жесткости моста может быть описано системой дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{cases} EI_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - 2H \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\gamma I_x}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y \theta) = \bar{q}_y, \\ M_y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + EI_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - H \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma I_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma Fr^2}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \bar{m}, \end{cases} \quad (1)$$

где η – вертикальное перемещение балки; θ – угол закручивания балки жесткости; g – ускорение свободного падения; H – распор от постоянной нагрузки в одном кабеле; F – площадь поперечного сечения балки жесткости; EI_ω – секториальная жесткость поперечного сечения балки жесткости; EI_x – изгибная жесткость относительно горизонтальной центральной оси поперечного сечения балки жесткости; GI_d – жесткость при свободном кручении того же сечения; b – ширина балки жесткости; r – полярный радиус инерции сечения балки жесткости; γ – плотность материала балки жесткости; M_y – изгибающий момент относительно вертикальной оси поперечного сечения балки жесткости (возникающий от лобового давления ветра); \bar{q}_y – подъемная сила, приложенная к единице длины моста (в дальнейшем пренебрегаем подъемной силой, мало влияющей на окончательный результат); \bar{m} – вызванный ветром крутящий момент, приходящийся на единицу длины моста, вычисляемый по формуле

$$\bar{m} = C_T(\theta) \rho \cdot b^2 \frac{u^2}{2g}, \quad (2)$$

где ρ – плотность воздуха; u – скорость ветра; $C_T(\theta)$ – коэффициент закручивания, являющейся функцией угла кручения θ , для малых углов наклона этот коэффициент определяется формулой: $C_T(\theta) = -k_1 \theta$.

Скорость ветра рассматривается в виде суммы постоянной \bar{u} и пульсационной составляющих $\bar{u} \cdot \xi(t)$, т.е. $u = \bar{u} [1 + \xi(t)]$. В расчетах принято, что по длине моста ветровое давление распределено равномерно (рис. 1) и определяется по формуле $q = \alpha_1 \cdot u^2$.

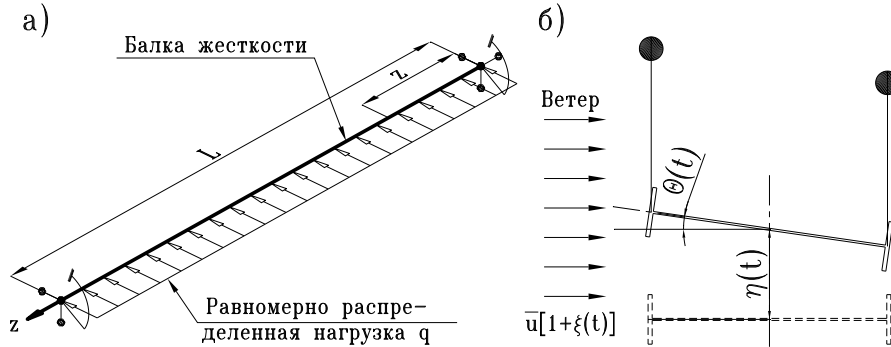


Рис. 1

а) схема пролетного строения нагруженного давлением ветра; б) сечение балки жесткости в исходном и отклоненном при действии ветра положении

Одним из способов сведения дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений является метод Бубнова-Галеркина. Представим неизвестные перемещения $\eta(z,t)$ и $\theta(z,t)$ через базисные функции

$$\psi(z) = \sin \frac{i\pi}{\ell} z; \quad \varphi(z) = \sin \frac{j\pi}{\ell} z, \quad (3)$$

где i, j – количество полуволн в главном пролете.

После стандартных преобразований для метода Бубнова-Галеркина получим систему уравнений, в общем случае позволяющих учитывать произвольное количество форм колебаний

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{i^4 \pi^4}{\ell^4} EI + 2H \cdot \frac{i^2 \pi^2}{\ell^2} \right) a_i + \left(\frac{\gamma \cdot I_x}{g} \frac{i^2 \pi^2}{\ell^2} + \frac{\gamma F}{g} \right) \ddot{a}_i - q \sum_{j=1}^n \frac{j^2 \pi^2}{\ell^3} b_j(t) \cdot C = 0, \\ \left(EI_\omega \frac{i^4 \pi^4}{\ell^4} + GI_d \frac{i^2 \pi^2}{\ell^2} + H \frac{b^2}{2} \frac{i^2 \pi^2}{\ell^2} \right) b_i + \left(\frac{\gamma I_\omega}{g} \frac{i^2 \pi^2}{\ell^2} + \frac{\gamma Fr^2}{g} \right) \ddot{b}_i - \\ - q \sum_{i=1}^n \frac{i^2 \pi^2}{\ell^3} a_i C + \frac{k_1 \rho b^2 u^2}{2g} b_i = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь C определяется по формуле

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\ell^3}{2\pi^2} \left\{ \left[\frac{\cos(i-j)\pi - 1}{(i-j)^2} \right] - \left[\frac{\cos(i+j)\pi - 1}{(i+j)^2} \right] - \right. \\ \left. - 2 \left[\frac{\cos(i-j)\pi}{(i-j)^2} - \frac{\cos(i+j)\pi}{(i+j)^2} \right] \right\}, \text{ если } j \neq i, \\ \frac{\ell^3}{12} + \frac{\ell^3}{4i^2 \pi^2}, \text{ если } j = i. \end{array} \right. \quad (5)$$

В данной статье влияние количества учитываемых форм собственных колебаний на устойчивость системы не рассматривается. Ограничимся учетом двух форм собственных колебаний: одной крутильной и одной изгибной с двумя полуволнами в главном пролете. В этом случае система дифференциальных уравнений преобразуется к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\left(\frac{2^4 \pi^4}{\ell^4} EI_x + 2H \cdot \frac{2^2 \pi^2}{\ell^2} \right)}_{a_{12}} a + \underbrace{\left(\frac{\gamma \cdot I_x}{g} \frac{2^2 \pi^2}{\ell^2} + \frac{\gamma F}{g} \right)}_{a_{11}} \ddot{a} - \underbrace{\frac{\alpha_1 u^2 \ell}{8} \left(1 + \frac{2^2 \pi^2}{3} \right)}_{a_{13}} b = 0, \\ \underbrace{\left(EI_\omega \frac{2^4 \pi^4}{\ell^4} + GI_d \frac{2^2 \pi^2}{\ell^2} + H \frac{b^2}{2} \frac{2^2 \pi^2}{\ell^2} \right)}_{b_{13}} b + \underbrace{\left(\frac{\gamma I_\omega}{g} \frac{2^2 \pi^2}{\ell^2} + \frac{\gamma Fr^2}{g} \right)}_{b_{11}} \ddot{b} - \\ - \underbrace{\frac{\alpha_1 v^2 \ell}{8} \left(1 + \frac{2^2 \pi^2}{3} \right)}_{b_{12}} a + \underbrace{\frac{k_1 \rho b^2 u^2}{2g}}_{b_{14}} b = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Преобразуем систему (6), содержащую два дифференциальных уравнения второго порядка, в систему, содержащую 4 дифференциальных уравнения первого порядка

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = X_4, \\ \dot{X}_3 = -\frac{\delta \omega_h}{\pi} X_3 - a_{12}^* X_1 + a_{13}^* X_4, \\ \dot{X}_4 = -\frac{\delta \omega_\alpha}{\pi} X_4 - b_{13}^* X_2 + b_{12}^* X_3 - b_{14}^* X_2, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\text{где } a_{12}^* = a_{12}/a_{11}; \quad a_{13}^* = a_{13}/a_{11}; \quad b_{12}^* = b_{12}/b_{11}; \quad b_{13}^* = b_{13}/b_{11}; \quad b_{14}^* = b_{14}/b_{11}. \quad (8)$$

В систему уравнений (7) дополнительно введены слагаемые, учитывающие конструкционное демпфирование крутильных и изгибных колебаний. Решение системы дифференциальных уравнений (7) осуществлялось по методу Рунге-Кутты 4-го порядка, реализованного в Visual Basic. Шаг по времени при решении дифференциальных уравнений во всех случаях принят равным 0,02 с, что приблизительно соответствует 1/350 части периода собственных колебаний по первой изгибной форме.

Описание конечноэлементной модели Такомоского моста

Конечноэлементная модель Такомоского моста составлена в программном комплексе Ansys. Балка жесткости пролетного строения смоделирована трехмерным линейным (двухузловым) тонкостенным балочным элементом типа BEAM188. Данный тип элемента позволяет учитывать стесненное кручение, что порождает в каждом узле седьмую степень свободы. Пилоны смоделированы трехмерным линейным (двухузловым) балочным элементом типа BEAM44 имеющим возможность воспринимать растяжение, сжатие, кручение и изгиб. Элемент имеет шесть степеней свободы в каждом узле. Канаты и подвески смоделированы элементом типа LINK8 воспринимающим сжатие и растяжение и имеющим три степени свободы в каждом узле [3].

Опорные крепления пролетного строения смоделированы как шарнирно неподвижное на одном конце с защемлением от поворота вокруг продольной оси, и шарнирно подвижное с защемлением от поворота вокруг продольной оси на другом конце. Пилоны в основании защемлены жестко. Канаты в местах анкеровки закреплены от перемещений в 3-х направлениях.

Выполнен расчет частот и форм собственных колебаний модели моста с учетом ее напряженного состояния. Проблема собственных значений в ПК Ansys решена блочным методом Ланцоша.

В табл.1 приведены частоты модели моста, полученные на основе рассмотрения дифференциальных уравнений и конечноэлементной модели, для крутильных (ω_θ) и изгибных (ω_h) в вертикальной плоскости форм собственных колебаний, имеющих k полуволин на главном пролете.

Таблица 1

k	Частоты, рад/с				δ , %	δ , %
	Диф. ур-я		ПК Ansys			
	ω_θ	ω_h	ω_θ	ω_h		
2	1.098	0.831	1.208	0.915	9	9
3	1.667	1.263	1.557	1.180	7	7
4	2.261	1.714	2.236	1.695	1	1
5	2.886	2.188	2.712	2.058	6	6
6	3.549	2.693	3.485	2.643	2	2
7	4.256	3.231	4.213	3.198	1	1

Некоторые расхождения в значениях частот собственных колебаний объясняются тем, что модель, составленная по методу КЭ, учитывает работу вантовой системы моста, что несколько увеличивает его жесткость по сравнению с моделью отдельной балки жесткости.

При рассмотрении задачи устойчивости колебаний Такомоского моста при детерминированном и стохастическом воздействии Ansys используется в качестве препроцессора, а определение критической скорости выполняется в программе составленной на языке Visual Basic. Движение конечноэлементной модели описывается уравнением

$$[M]\{\ddot{Z}\} + [C]\{\dot{Z}\} + [K]\{Z\} = [G]\{Z\} + [A]\{Z\}, \quad (9)$$

где $[M]$ – матрица масс; $[C]$ – матрица демпфирования, пропорциональная матрице жесткости; $[K]$ – матрица жесткости; $[G]$ – матрица, учитывающая воздействие от лобового давления ветра; $[A]$ – матрица, учитывающая воздействие от аэродинамического крутящего момента.

Матрицы $[A]$ и $[G]$ для всей конструкции составлены в результате ансамблирования матриц конечных элементов имеющих размерность 12×12 .

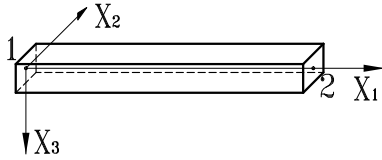


Рис. 2.

На рис. 2 показан конечный элемент с нумерацией узлов и направлением осей местной системы координат.

Вектор неизвестных для первого узла Z_H и второго узла Z_K конечного элемента записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{Z}_H^T &= (Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3), \\ \bar{Z}_K^T &= (Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3), \end{aligned} \quad (10)$$

где Z_i – линейное перемещение вдоль оси X_i ; φ_i – угол поворота вокруг оси X_i . При этом $Z_i > 0$, если перемещение происходит в положительном направлении оси i , а $\varphi_i > 0$, если при взгляде с вершины оси i , ось с меньшим номером поворачивается к большей против хода часовой стрелки.

Для сокращения запишем только ненулевые элементы матриц $[G]$ и $[A]$ для одного конечного элемента:

$$\begin{aligned} G_{3 \ 4} &= \frac{M}{\ell}; \quad G_{3 \ 10} = -\frac{M}{\ell}; \quad G_{4 \ 3} = \frac{M}{\ell}; \quad G_{4 \ 5} = M; \quad G_{4 \ 9} = -\frac{M}{\ell}; \quad G_{5 \ 4} = M; \\ G_{9 \ 4} &= -\frac{M}{\ell}; \quad G_{9 \ 10} = \frac{M}{\ell}; \quad G_{10 \ 3} = -\frac{M}{\ell}; \quad G_{10 \ 9} = \frac{M}{\ell}; \quad G_{10 \ 11} = -M; \quad G_{11 \ 10} = -M, \end{aligned} \quad (11)$$

$$A_{4 \ 4} = A_{4 \ 10} = A_{10 \ 4} = A_{10 \ 10} = k_1 \frac{\ell \rho b^2}{2 g 2}. \quad (12)$$

Важной особенностью матрицы $[G]$ является ее несимметричная структура. Решение уравнения (9) осуществляется методом разложения движения по собственным формам [4]. При этом перемещения системы представляются в виде

$$\bar{Z}(t) = q_1(t)\bar{v}_1 + \dots + q_n(t)\bar{v}_n. \quad (13)$$

В результате расчета в ПК Ansys получаем матрицу жесткости конструкции выдаваемую из Ansys в сжатом формате Naigwell-Boeing; вектор моментов \bar{M} от действия лобового ветрового давления в узлах КЭ балки жесткости необходимый для формирования матрицы $[G]$; матрицу $\{V\}$, составленную из векторов собственных колебаний \bar{v}_i , обладающих свойством M ортогональности

$$\{V\}_i^T [M] \{V\}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (14)$$

После подстановки в уравнение (9) выражения (13) и некоторых преобразований [4] получим

$$\{\ddot{q}(t)\} + \frac{\delta\omega_i}{\pi} \{\dot{q}(t)\} + \Gamma \Omega^2 \{q(t)\} = \{V\}^T [G] \{V\} \{q(t)\} + \{V\}^T [A] \{V\} \{q(t)\}. \quad (15)$$

Аналогично случаю рассмотренному выше, будем рассматривать две формы собственных колебаний с двумя полуволнами в главном пролете. Тогда

уравнение (15) может быть представлено системой 2-х дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\omega_1^2 q_1 - \frac{\delta\omega_1}{\pi} \dot{q}_1 + (g_{11} \cdot q_1 + g_{12} \cdot q_2) + (a_{11} \cdot q_1 + a_{12} \cdot q_2), \\ \ddot{q}_2 = -\omega_2^2 q_2 - \frac{\delta\omega_2}{\pi} \dot{q}_2 + (g_{21} \cdot q_1 + g_{22} \cdot q_2) + (a_{21} \cdot q_1 + a_{22} \cdot q_2), \end{cases} \quad (16)$$

где g_{ij} ; a_{ij} – компоненты матрицы \mathbf{A} и \mathbf{G} полученные после их умножения на матрицу собственных векторов $\{\mathbf{V}\}^T$ слева и $\{\mathbf{V}\}$ справа.

Аналогично, как это было сделано с системой уравнений (6), понизим порядок уравнений входящих в систему (16) до первого

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_3, \\ \dot{X}_2 = X_4, \\ \dot{X}_3 = -\frac{\delta\omega_h}{\pi} - \omega_h^2 X_1 + (g_{11} \cdot X_1 + g_{12} \cdot X_2) + (a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2), \\ \dot{X}_4 = -\frac{\delta\omega_\alpha}{\pi} - \omega_\alpha^2 X_2 + (g_{21} \cdot X_1 + g_{22} \cdot X_2) + (a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2). \end{cases} \quad (17)$$

В систему уравнений (17) введены слагаемые, учитывающие конструкционное демпфирование крутильных и изгибных колебаний.

Таким образом, на основе КЭ модели моста, составленной в ПК Ansys и при введении матриц $[\mathbf{G}]$ и $[\mathbf{A}]$, получена система 4-х дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающая движение пролетного строения моста с учетом двух форм собственных колебаний (крутильной и изгибной) по двум полуволнам.

Оценка устойчивости системы по Ляпунову

Устойчивость движения детерминированных и стохастических систем может быть эффективно оценена с помощью максимального показателя Ляпунова [5].

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|X(t)\|}{\|X(t_0)\|}, \quad (18)$$

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m \cdot h} \cdot \sum_{i=1}^m \ln d_i, \quad (19)$$

где $\|X(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^4 X_i^2(t)}$ – норма вектора \mathbf{X} в Евклидовом пространстве, X_i – компоненты вектора \mathbf{X} , $\|X(t_0)\|$ – норма вектора \mathbf{X} в начальный момент времени t_0 ;

h – шаг интегрирования; d_i – длина вектора решений \mathbf{X} в момент времени i .

Известно, что формула (18) при рассмотрении неустойчивой системы может породить ошибку переполнения буфера ЭВМ, поэтому непосредственный расчет показателя Ляпунова выполнялся по формуле (19), предложенной Беннеттиным и др. в работе [6]. Решение уравнений (7) или (17) выполняется при некоторых начальных условиях, таких, что $\|X(t_0)\|=1$. На следующем шаге по времени t_i вектор $X(t)$ примет значение $X(t_i)$. Длину вектора $X(t_i)$ обозначим d_i . Далее решение уравнений продолжим с другого начального условия $X^*(t_i) = X(t_i)/d_i$. Значение $X(t_{i+1})$ в момент времени t_{i+1} обозначим $X(t_{i+1})$, а длину вектора $X(t_{i+1})$ обозначим d_{i+1} . В результате многократного применения описанной процедуры получим последовательность чисел d_i , где $i = 1, 2, 3 \dots m = T/h$. Формула (19) определяет оценку максимального показателя Ляпунова, которая является пере-

менной функцией времени и стремиться к постоянному значению, равному максимальному показателю Ляпунова.

Если при изменении какого-либо параметра системы максимальный показатель Ляпунова оказывается положительным $\lambda > 0$, то положение равновесия системы неустойчиво, а если $\lambda < 0$ – асимптотически устойчиво по Ляпунову. Значению $\lambda = 0$ соответствует критическая величина параметра системы.

Определение критической скорости ветра в детерминированной постановке

Определим критическую скорость ветра с использованием максимального показателя Ляпунова (19) для модели на основе дифференциальных уравнений (7, 19). Основные геометрические и аэродинамические характеристики моста и поперечного сечения балки жесткости, характеристики материала, потребовавшиеся для расчета, приведены табл. 2 [1,2].

Таблица 2

Параметр и его обозначение	Значение	Размерность
Общая длина моста	1662	м
Длина главного пролета	853	м
Ширина балки жесткости, b	11.9	м
Площадь поперечного сечения, F	0.654	м ²
Полярный радиус инерции, r	4.524	м
Момент инерции относительно гор. оси, I_x	0.121	м ⁴
Момент инерции относительно верт. оси, I_y	13.263	м ⁴
Момент инерции при свободном кручении, I_d	0.373×10^{-3}	м ⁴
Секториальный момент инерции, I_w	4.31	м ⁶
Распор в каждом канате, H	3256	т
Модуль упругости материала, E	2.1×10^7	т/м ²
Модуль сдвига материала, G	0.8×10^7	т/м ²
Удельный вес пролетного строения, γ	7.85	т/м ³
Плотность воздуха, ρ	1.29×10^{-3}	т/м ³
Коэффициент лобового сопротивления, α	0.144×10^{-3}	т·с ² /м ²
Постоянный коэффициент, определяющий крутящий момент от ветрового воздействия, k_1	-0.267	-
Лог. декремент колебаний, δ	0.05	-

Распор в канатах определен в результате статического расчета КЭ модели в ПК Ansys и поэтому отличается от приведенного в [1,2].

На рис. 3 представлены графики изменения оценки максимального показателя Ляпунова во времени для различных значений постоянной скорости ветра.

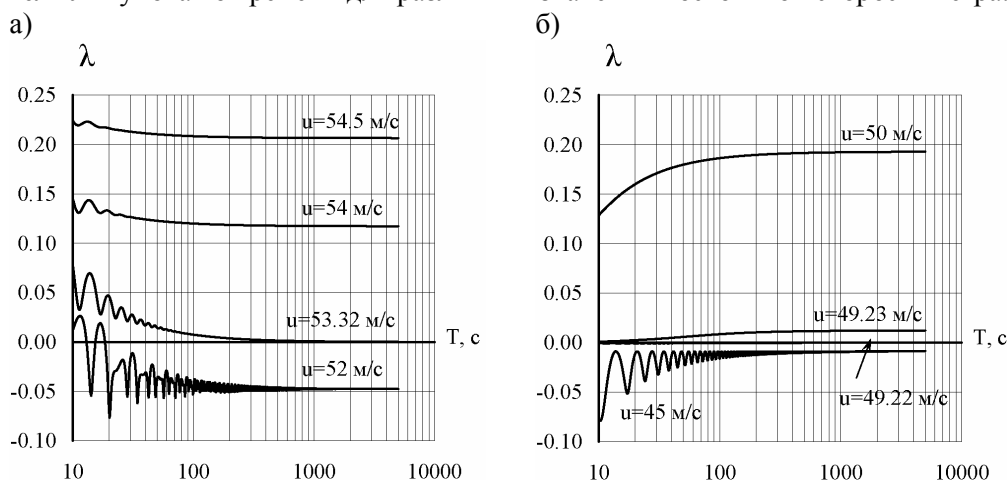


Рис. 3. Графики изменения оценки максимального показателя Ляпунова во времени а – модель на основе уравнений (7); б – на основе уравнений (17)

Как видно из графиков, приведенных на рис. 3, оценка максимального показателя Ляпунова стремится к постоянному значению равному значению максимального показателя Ляпунова.

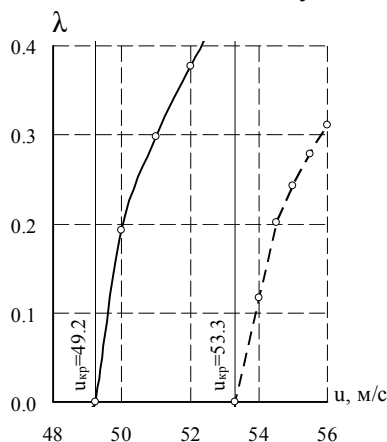


Рис. 4. Графики зависимости $\lambda(u)$

На рис. 4. представлен график зависимости максимального показателя Ляпунова от значения постоянной скорости ветра. Значение критической скорости ветра, соответствующее на графике точке пересечения оси абсцисс для модели на основе дифференциальных уравнений равно 53,3 м/с; для модели на основе КЭ – 49,2 м/с. Расхождение в значении критической скорости ветра около 8% объясняется расхождением частот собственных колебаний из-за учета в КЭ модели, работы вантовой системы.

На рис. 5 представлены графики изменения вертикального перемещения для точки в четверти пролета, полученные для модели на основе дифференциальных уравнений и соответствующие скоростям ветра меньшей критической (52 м/с); равной критической (53,32 м/с) и большей критической (53,34 м/с).

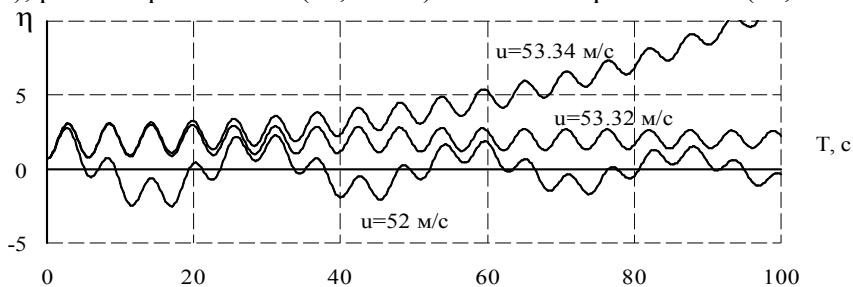


Рис. 5. Графики изменения вертикального перемещения во времени для модели на основе дифференциальных уравнений для различных скоростей ветра

Определение критической скорости ветра в стохастической постановке

В данной статье рассматривается случайное воздействие, представленное стационарным гауссовским случайным процессом, обладающим свойством эргодичности и имеющим корреляционную функцию вида

$$K(t-t_1) = \sigma^2 e^{-\delta|t-t_1|} \left[\cos \omega(t-t_1) + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega(t-t_1) \right], \quad (20)$$

где σ^2 – дисперсия процесса, δ – параметр, характеризующий масштаб корреляции случайного процесса, ω – частота скрытой периодичности случайного процесса.

Аналитическое выражение функции спектральной плотности для рассматриваемого случайного процесса записывается в виде:

$$S(\omega) = 2 \cdot \sigma^2 \frac{2\delta(\delta^2 + \theta^2)}{\pi \left[(\omega^2 - \theta^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 \right]}. \quad (21)$$

На рис. 6 представлены графики корреляционных (а) и спектральных функций (б), построенные при параметрах случайного процесса $\delta = 0,1$; $\omega = 0,5$ рад/с; $\sigma = 0,25$ по формулам (20, 21) и по результатам численной обработки реализации продолжительностью 10000 с [7].

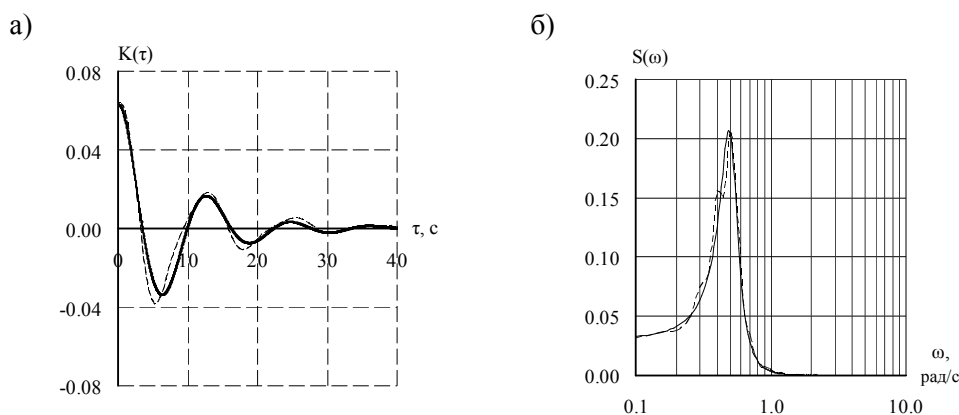


Рис. 6. Корреляционные функции (а) и функции спектральной плотности (б):
 — по формулам (20, 21) — на основе обработки численной реализации

Моделирование случайного процесса выполнено с использованием линейного фильтра второго порядка [8]. На рис. 7 приведены фрагменты трех реализаций случайного процесса с параметрами $\delta = 0,1$; $\omega = 0,5$ рад/с; $\sigma = 0,25$ на участке от 0 до 100 с.

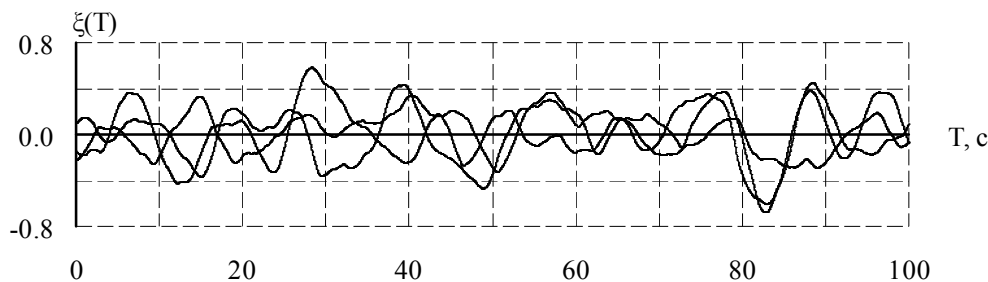


Рис. 7. Фрагменты 3-х реализаций случайного процесса от 0 до 100 с

При исследовании устойчивости стохастических систем используется большое число различных определений устойчивости. В дальнейшем ограничимся определением устойчивости почти наверное.

Нулевое решение дифференциальных уравнений (7, 17) называется устойчивым почти наверное, если

$$P \left\{ \lim_{\|X(t_0)\| \rightarrow 0} \lim_{t > t_0} \|X(t, \|X(t_0)\|, t_0) - 0\| = 0 \right\} = 1, \quad (22)$$

где $P\{\dots\}$ – вероятность события, заключенного в скобках.

То же самое решение называется асимптотически устойчивым почти наверное, если оно устойчиво почти наверное и дополнительно выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left\{ \text{Sup}_{t > T} \|X(t, \|X(t_0)\|, t_0) - 0\| = 0 \right\} = 1. \quad (23)$$

На рис.8 показаны графики изменения вертикального перемещения (а) и угла закручивания (б) при решении системы уравнений (7) и изменении скорости ветра по случайному закону с параметрами $\delta = 0,1$; $\omega = 0,5$ рад/с; $\sigma = 0,25$.

На основе двух моделей проанализировано влияние параметров случайного процесса на значение критического параметра.

На графиках, представленных на рис. 9 показано влияние частоты скрытой периодичности случайного процесса ω в диапазоне от 0,05 до 4 рад/с на значение критической скорости ветра при $\delta = 0,1$ и $\sigma = 0,1 \div 0,707$.

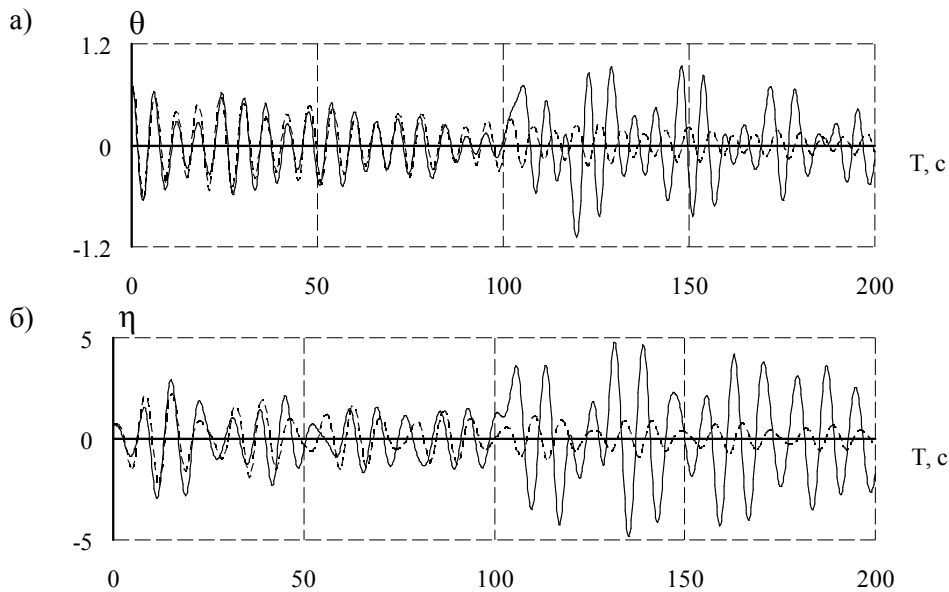


Рис. 8. Графики изменения вертикального перемещения (а) и угла закручивания (б) в четверти пролета; — в стохастической постановке; - - - в детерминированной постановке.

Как видно из графиков на частотах скрытой периодичности от 1 до 2,5 рад/с наблюдается уменьшение критического параметра системы. По мере увеличения дисперсии случайного процесса значение критической скорости уменьшается, а резонансная частота смещается в область больших частот.

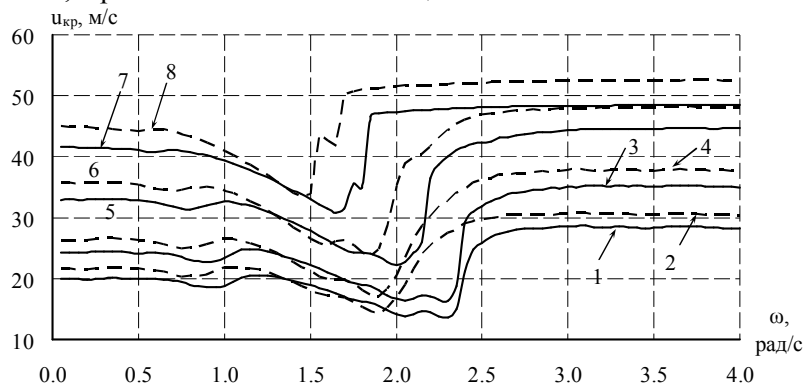


Рис. 9. Влияние частоты скрытой периодичности на значение критического параметра системы при различных дисперсиях случайного процесса: кривые 1,2 – $\sigma = 0,707$; кривые 3,4 – $\sigma = 0,5$; кривые 5,6 – $\sigma = 0,25$; кривые 7,8 – $\sigma = 0,1$; сплошная линия соответствует результатам, полученных по модели на основе дифференциальных уравнений; пунктирная – по модели на основе КЭ.

На рис. 10 приведены результаты определения критической скорости ветра при различных параметрах δ и σ , а также их сопоставление с результатами, полученными при рассмотрении задачи в детерминированной постановке.

Видно, что параметр δ , характеризующий масштаб корреляции случайного процесса практически не оказывает влияния на устойчивость системы, в то время как увеличение σ заметно уменьшает значение критического параметра. Во всех случаях значение критического параметра при рассмотрении системы в стохастической постановке оказывается меньше, чем в детерминированной постановке.

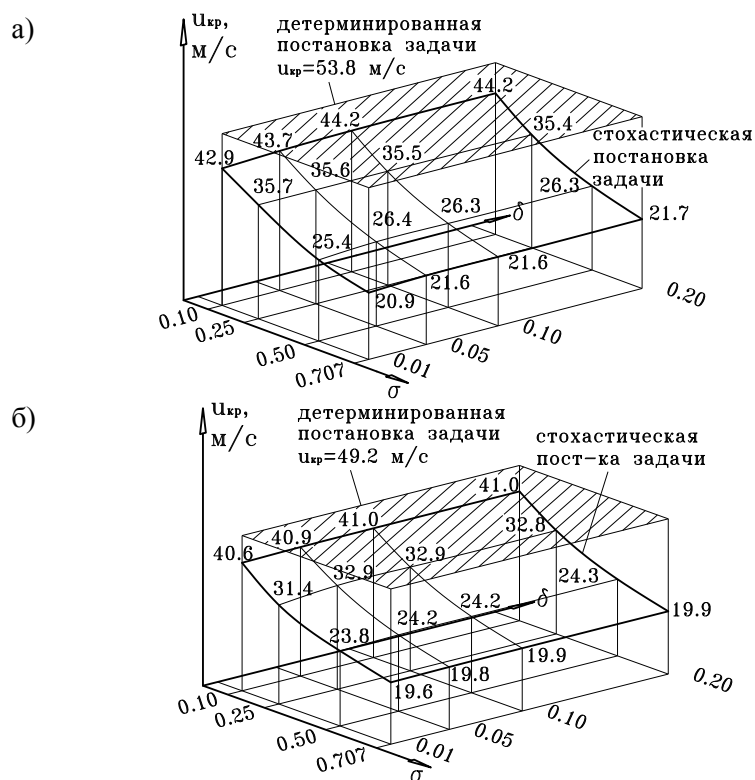


Рис. 10. Влияние параметров σ и δ на значение критического параметра системы: а) по модели на основе дифференциальных уравнений; б) по модели на основе КЭ

Выводы:

В работе предложен эффективный метод исследования устойчивости стохастических систем с конечным числом степеней свободы. Проанализировано влияние параметров случайного воздействия на устойчивость системы. Сопоставлены результаты решения задачи в детерминированной и стохастической постановке.

Показано, что учет переменной изменяющейся случайным образом во времени нагрузки уменьшает значение критического параметра системы. Расчеты, выполненные на примере висячего моста, по двум различным моделям показали результаты отличающиеся не более чем на 10%.

Литература

1. Дмитриев Ф.Д. Крушения инженерных сооружений. Стройиздат, М.: 1953. – 188с.
2. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: ФМ, 1958 г. – 568с.
3. Басов К.А. Ansys: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 604 с.
4. Александров А.В., Потапов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика. Кн. 2. Динамика и устойчивость упругих систем: – М.: Высш. шк., 2008. – 384с.
5. Потапов В.Д. Устойчивость упругих и вязкоупругих систем при стохастическом параметрическом возбуждении. Изв. АН РАН, МТТ, 2005, № 3, С. 123 – 136.
6. Benettin G., Galgani L., Giorgolly A., and Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a Method for Computing All of Them. P. 1, 2, Meccanica, 1980, Vol. 15. – P. 9–20, 21–30.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: – М.: «Академия», 2005. – 576с.
8. Шальгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. – Л.: Машиностроение (Ленинградское отд.), 1986. – 320 с.

STABILITY OF OSCILLATIONS OF SYSTEM WITH FINITE DEGREES OF FREEDOM AT STOCHASTIC EXCITATION

Папаев М.А.

In the article, the stability of systems with finite of degrees of freedom is considered at the determined and stochastic action on the example of a suspension bridge. Calculations are executed on two models: the first one describes oscillations of a rigidity beam of the bridge by system of two partial differential equation and the second describes the same oscillations with help of FEM. Influence of parameters of the stochastic excitation on the value of the critical parameter is investigated.



ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЗАГЛУБЛЕНИЯ РОСТВЕРКА ПРИ КОЛЕБАНИЯХ СВАЙНОГО ФУНДАМЕНТА

А.О. КОЛЕСНИКОВ, *канд. техн. наук*

В.Н. ПОПОВ, *д-р. физ.-мат. наук*

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

Большинство свайных фундаментов под машины являются заглубленными. В настоящее время в решении задачи о влиянии заглубления фундаментов не существует единого подхода. Одной из успешных попыток разрешить эти противоречия явилась работа М.И. Забылина [1], в которой заглубление оценивалось с использованием волновой модели, и учитывалось реакцией грунта на боковой поверхности фундамента [2]. Дальнейшие исследования по учету заглубления свайных фундаментов, в постановке аналогичной [1] были предприняты в работе [3]. В ней был сделан вывод о необходимости учета заглубления свайного ростверка при прогнозировании его колебаний, а также описана методика вычисления динамических параметров заглубленного свайного фундамента, путем суммирования соответствующих параметров жесткости и демпфирования для свайного основания и ростверка. Однако, в [3] не был сделан анализ влияния заглубления ростверка на амплитуду колебаний фундамента и не были представлены формулы по определению его параметров жесткости и демпфирования.

В настоящей работе проводится исследование влияния заглубления свайного фундамента на амплитуду его колебаний, представлены используемые формулы для определения динамических параметров заглубленного ростверка, проводится сравнение данных, полученных экспериментально, с результатами расчетов без учета и с учетом ростверка, имеющего квадратную форму в плане.

При рассмотрении влияния заглубления свайного фундамента, представим его в виде стержневой системы, объединенной сверху жестким ростверком. Рассматриваются отдельно вертикальные, горизонтальные и вращательные колебания (рис. 1).

Для каждого вида колебаний (вертикальных, горизонтальных, сдвиго- вращательных) динамические параметры заглубленного свайного фундамента предлагается определять выражениями (1)-(4).

$$K_{zz} = K_{zz}^{cap} + \sum_n K_{zz}^{pile}, \quad C_{zz} = C_{zz}^{cap} + \sum_n C_{zz}^{pile}, \quad (1)$$

$$K_{xx} = K_{xx}^{cap} + \sum_n K_{xx}^{pile}, \quad C_{xx} = C_{xx}^{cap} + \sum_n C_{xx}^{pile}, \quad (2)$$