

Численные методы расчета конструкций

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ПРИ ФОРМИРОВАНИИ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ТРЕУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Ю.В. КЛОЧКОВ, *д-р техн. наук, профессор,*
А.П. НИКОЛАЕВ, *д-р техн. наук, профессор,*
О.В. ВАХНИНА, *ст. пр.*

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия

В настоящее время треугольные конечные элементы (КЭ) повсеместно используются в конечно-элементном анализе оболочек и других конструкций. Однако, как показывают исследования [1], треугольный КЭ обладает рядом особенностей, а именно при сосредоточенном характере нагрузок сходимость конечно-элементных решений оказывается не всегда удовлетворительной. Поэтому актуальной является задача по совершенствованию треугольного КЭ в расчетах оболочек.

Рассмотрим треугольный КЭ с катетами единичной длины в локальной системе координат $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ (Рис.1) с узлами i, j, k , на который отображается произвольный треугольный элемент оболочки вращения.

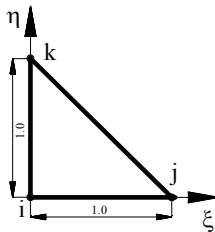


Рис. 1

Столбец узловых варьируемых параметров данного КЭ выбирается в виде [2]

$$\left\{ \begin{matrix} U \\ y \end{matrix} \right\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \begin{matrix} \left\{ u \right\}_{1 \times 9}^T \\ \left\{ v \right\}_{1 \times 9}^T \\ \left\{ w \right\}_{1 \times 9}^T \end{matrix} \right\}, \quad (1)$$

где u и v – тангенциальные, а w – нормальная компоненты вектора перемещения. Верхний индекс «Т» указывает, что столбец узловых неизвестных определен в локальной системе координат.

Входящие в правую часть равенства (1) подматрицы-строки имеют следующую структуру

$$\left\{ q \right\}_{1 \times 9}^T = \left\{ q^i q^j q^k q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k \right\}, \quad (2)$$

где под q понимается компонента вектора перемещения u , v или w .

Введем в середину каждой из сторон треугольного КЭ дополнительные узлы, которые обозначим цифрами 1,2,3 и укажем в них направления внешних нормалей \vec{S}_n^m ($m = 1,2,3$) (рис.2).

Рассмотрим в качестве варьируемых параметров во вновь введенных узлах 1,2,3 производные нормальной компоненты вектора перемещения по направлениям внешних нормалей $\partial w / \partial S_n^m$ ($m = 1,2,3$) к сторонам треугольного КЭ.

Дополнительные узлы 1, 2, 3 треугольного КЭ (например, имеющего номер I) в то же время являются узлами для соседних элементов сетки дискретизации (рис.3).

Таким образом, например, для дополнительного узла 2 будет справедливо равенство

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial S_n^2} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial S_n^{2'}} = 0. \quad (3)$$

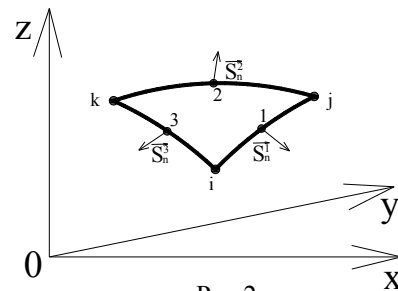
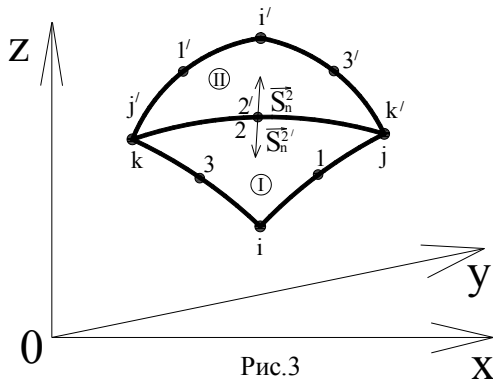


Рис.2



Для отдельного треугольного КЭ на основании (3) можно записать равенство, которое можно рассматривать как дополнительное условие, необходимое для построения функционала Лагранжа

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial w}{\partial S_n^1} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial w}{\partial S_n^2} + \lambda_3 \cdot \frac{\partial w}{\partial S_n^3} = 0, \quad (4)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – множители Лагранжа.

При формировании матриц жесткостей соседних по сетке дискретизации треугольных КЭ с учетом направлений

нормалей \vec{S}_n^m будут реализованы соотношения для всех сторон отдельного КЭ (4). Производные нормальной компоненты вектора перемещения в направлении нормалей к сторонам треугольного КЭ могут быть выражены через обычный столбец узловых варьируемых параметров (1)

$$\frac{\partial w}{\partial S_n^m} = \{t^m\}_{1 \times 27}^T \{U_y^l\}_{27 \times 1} = \{\Gamma^m\}_{1 \times 27}^T \{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1}, \quad (5)$$

где $\{U_y^\Gamma\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \{U_y^\Gamma\}_{1 \times 9}^T, \{V_y^\Gamma\}_{1 \times 9}^T, \{W_y^\Gamma\}_{1 \times 9}^T \right\}$ – столбец узловых неизвестных в глобальной системе

координат, в качестве которых, например, при расчете оболочки вращения можно выбрать S – длину дуги меридиана и θ – угол, отсчитываемый от вертикального диаметра против хода часовой стрелки.

Правую часть равенства (4) можно представить в матричном виде

$$\{\lambda\}_{1 \times 3}^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial S_n^1} \\ \frac{\partial w}{\partial S_n^2} \\ \frac{\partial w}{\partial S_n^3} \end{array} \right\} = \{\lambda\}_{1 \times 3}^T \left\{ \begin{array}{l} \{\Gamma^1\}_{1 \times 27} \\ \{\Gamma^2\}_{1 \times 27} \\ \{\Gamma^3\}_{1 \times 27} \end{array} \right\} \{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1} = \{\lambda\}_{1 \times 3}^T [G]_{3 \times 27} \{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1}. \quad (6)$$

Функционал, выражающий равенство потенциальной энергии деформации на возможных перемещениях для треугольного КЭ, с использованием множителей Лагранжа можно записать в следующем виде

$$\Pi = \int_V \{\epsilon_{\alpha\beta}^\zeta\}_{1 \times 6}^T \{\sigma_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dV + \{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1}^T [G]_{3 \times 27}^T \{\lambda\}_{1 \times 3} - \int_F \{U\}_{27 \times 1}^T \{P\}_{27 \times 1} dF = 0, \quad (7)$$

где $\{\epsilon_{\alpha\beta}^\zeta\}_{1 \times 6}^T = \{\epsilon_{11}^\zeta, \epsilon_{22}^\zeta, 2\epsilon_{12}^\zeta\}$ – матрица-строка деформаций в произвольном слое оболочки, отстоящем от срединной поверхности на расстоянии ζ ; $\{\sigma_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}$ – столбец напряжений в произвольном слое оболочки; $\{U\}_{27 \times 1}^T = \{u, v, w\}$ – матрица-строка, содержащая компоненты вектора перемещения внутренней точки треугольного КЭ; $\{P\}_{27 \times 1} = \{p_1, p_2, p_3\}$ – столбец внешней поверхностной нагрузки треугольного КЭ.

Минимизируя функционал (7) по узловым неизвестным $\{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1}^T$ и множителям Лагранжа $\{\lambda\}_{1 \times 3}^T$, получим следующие равенства

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1}^T} = [K] \{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1} + [G]^T \{\lambda\}_{1 \times 3} - \{f\} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \{\lambda\}_{1 \times 3}^T} = [G] \{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1} = 0. \quad (8)$$

Входящие в (8) матрица $[K]$ и столбец $\{f\}$ определяются стандартным для конечно-элементной процедуры образом [3]

$$[K] = [P_R]^T \int [B]^T [\Gamma]^T [C][\Gamma][B] dV [P_R]; \quad \{f\} = [P_R]^T \int [A]^T [P] dF,$$

$\begin{matrix} 27 \times 27 & 27 \times 27 & 27 \times 6 & 6 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 6 & 6 \times 27 & 27 \times 27 & 27 \times 1 & 27 \times 27 & \int_P & 27 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix}$

где $[P_R]$ – матрица преобразований при переходе от локальной системы координат ξ, η к глобальной, например, S, θ .

Принимая во внимание (8), можно сформировать необходимое для конечно-элементной процедуры матричное равенство

$$\begin{bmatrix} [K] \\ [G] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [G]^T \\ [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_y^\Gamma\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad [K]_p \begin{Bmatrix} \{U_y^\Gamma\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

$\begin{matrix} 27 \times 27 & 27 \times 3 & 27 \times 1 & 27 \times 1 & 30 \times 30 & 30 \times 1 & 30 \times 1 \end{matrix}$

где $[K]_p, \{U_y^\Gamma\}$ – расширенные матрица жесткости и столбец узловых неизвестных треугольного КЭ.

Процедуру определения входящих в (5) матриц-строк $\{t^m\}$ можно продемонстрировать на примере оболочки вращения, срединная поверхность которой в исходном состоянии описывается радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}, \quad (10)$$

где x – осевая координата, r – радиус вращения.

Формула, устанавливающая связь между глобальными координатами S, θ и локальными координатами ξ и η треугольного КЭ может быть записана в виде [2]

$$S = (1 - \xi - \eta)S^i + \xi S^j + \eta S^k; \quad \theta = (1 - \xi - \eta)\theta^i + \xi \theta^j + \eta \theta^k. \quad (11)$$

Уравнение гипотенузы треугольного КЭ в локальной системе координат имеет вид

$$\eta = 1 - \xi. \quad (12)$$

В результате подстановки (12) в (11) можно получить равенства

$$S = \xi(S^j - S^k) + S^k; \quad \theta = \xi(\theta^j - \theta^k) + \theta^k. \quad (13)$$

Выразим из 1-го уравнения (13) локальную переменную ξ и подставим ее во второе уравнение (13). В результате получим следующую зависимость глобальной координаты θ от дуги меридиана S на границе $j-k$ треугольного КЭ

$$\theta = \frac{(S - S^k)(\theta^j - \theta^k) + \theta^k(S^j - S^k)}{S^j - S^k}. \quad (14)$$

Орт касательной к стороне $j-k$ треугольного КЭ можно получить дифференцированием (10) по формуле полной производной, т.к. на этой линии $\theta = f(S)$

$$\vec{t} = \vec{R}_{,s} = \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial S} = x_{,s} \vec{i} + r_{,s} \sin \theta \vec{j} + r_{,s} \cos \theta \vec{k} + \left(r \cos \theta \vec{j} - r \sin \theta \vec{k} \right) \cdot \theta_{,s}, \quad (15)$$

где $\theta_{,s} = \frac{\theta^j - \theta^k}{S^j - S^k}$.

Орт нормали к стороне $j-k$ треугольного КЭ определим в результате векторного произведения

$$\vec{S}_n^2 = \vec{a}^0 \times \vec{t}, \quad (16)$$

где \vec{a}^0 – орт нормали к срединной поверхности оболочки вращения

$$\vec{a}^0 = -r_{,s} \vec{i} + x_{,s} \sin \theta \vec{j} + x_{,s} \cos \theta \vec{k}.$$

Определенный по формуле (16) вектор \vec{S}_n^2 находится в плоскости векторов локального базиса \vec{a}_1^0, \vec{a}_2^0 , касательных к срединной поверхности оболочки (рис.4).

Косинусы углов α и β (рис.4) могут быть вычислены при использовании формулы скалярного произведения

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}_1^0 \cdot \vec{S}_n^2}{|\vec{a}_1^0| \cdot |\vec{S}_n^2|}; \quad \cos\beta = \frac{\vec{a}_2^0 \cdot \vec{S}_n^2}{|\vec{a}_2^0| \cdot |\vec{S}_n^2|}. \quad (17)$$

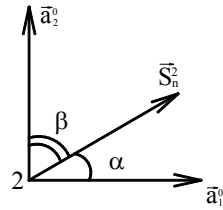


Рис.4

Рассмотрим сетку дискретизации оболочки вращения в виде (рис.5)

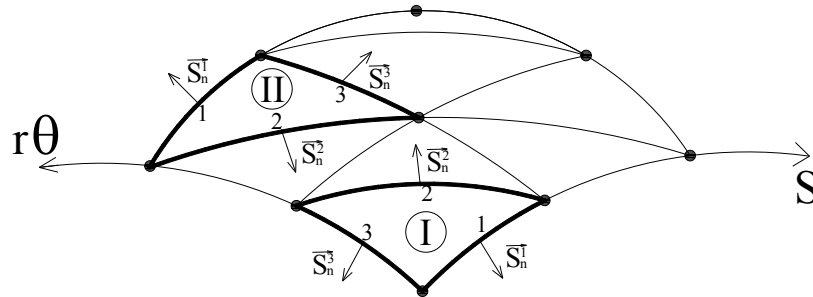


Рис. 5

Можно убедиться, что для треугольного КЭ под номером I будут справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial S_n^1} = -\frac{\partial w}{r \partial \theta}; \quad \frac{\partial w}{\partial S_n^3} = -\frac{\partial w}{\partial S}; \quad \frac{\partial w}{\partial S_n^2} = \frac{\partial w}{\partial S} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \cdot \cos \beta. \quad (18)$$

Для треугольного КЭ, ориентированного подобно элементу под номером II, соотношения (18) принимаются с противоположным знаком.

Таким образом, матрицы-строки $\{t^m\}$ для треугольного КЭ под номером I будут иметь вид

$$\begin{aligned} \{t^1\}_{1 \times 27}^T &= \left\{ \{0\}_{1 \times 9}^T \{0\}_{1 \times 9}^T \{-\varphi_{,0}\}_{1 \times 9}^T \right\}; \quad \{t^3\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \{0\}_{1 \times 9}^T \{0\}_{1 \times 9}^T \{-\varphi_{,s}\}_{1 \times 9}^T \right\}; \\ \{t^2\}_{1 \times 27}^T &= \left\{ \{0\}_{1 \times 9}^T \{0\}_{1 \times 9}^T \left(\{\varphi_{,s}\}_{1 \times 9}^T \cos \alpha + \{\varphi_{,0}\}_{1 \times 9}^T \cos \beta \right) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\{\varphi\}_{1 \times 9}^T = \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_9\}$ – матрица-строка функций формы, определенных в соответствии [2]. Входящие в (19) производные полиномиальных функций определяются по формулам

$$\begin{aligned} \{\varphi_{,0}\}_{1 \times 9}^T &= \{\varphi_{,\xi}\}_{1 \times 9}^T \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \{\varphi_{,\eta}\}_{1 \times 9}^T \frac{\partial \eta}{\partial \theta}; \\ \{\varphi_{,s}\}_{1 \times 9}^T &= \{\varphi_{,\xi}\}_{1 \times 9}^T \frac{\partial \xi}{\partial S} + \{\varphi_{,\eta}\}_{1 \times 9}^T \frac{\partial \eta}{\partial S}. \end{aligned} \quad (20)$$

В качестве примера была решена задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) жестко защемленного цилиндра, нагруженного внутренним давлением интенсивности q (рис.6). Были приняты следующие исходные данные:

$$L = 1.0 \text{ м}; \quad R = 1.0 \text{ м}; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \nu = 0.3; \quad t = 0.02 \text{ м}; \quad q = 5 \text{ МПа}.$$

Вследствие наличия осевой симметрии рассчитывалась 1/4 часть оболочки.

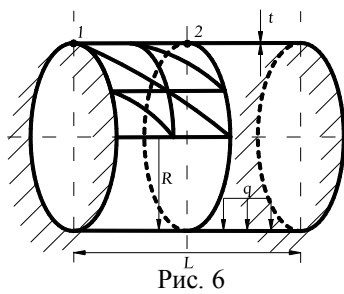


Рис. 6

Расчеты были выполнены в двух вариантах: в первом варианте в качестве элементов дискретизации использовались треугольные КЭ, матрицы жесткости которых формировались стандартным образом [1,2]; во втором варианте был реализован описанный выше алгоритм, основанный на использовании множителей Лагранжа (3)...(19).

Результаты повариантного расчета представлены в табл. № 1 и № 2, в которых приведены численные значения меридионального напряжения в жесткой заделке (точка 1) и в середине пролета (точка 2) на внутренней σ_v , наружной σ_n и срединной σ_c поверхностях оболочки в зависимости от густоты сетки дискретизации рассматриваемой части оболочки.

Число узлов сетки дискретизации вдоль кольца было принято равным 4, а вдоль образующей варьировалось от 5 до 57.

Анализ полученных результатов показывает, что в первом варианте наблюдается неудовлетворительная сходимость вычислительного процесса, особенно в жесткой заделке (точка 1). Кроме того, в наружной и внутренней поверхностях оболочки в жесткой заделке с измельчением сетки дискретизации напряжения имеют одинаковый знак, что противоречит физическому смыслу решаемой задачи, т.к. в жесткой заделке под действием внутреннего давления возникает деформация изгиба, т.е. внутренняя поверхность растягивается, а наружная сжимается, что и наблюдается во втором варианте расчета. Анализируя численные значения напряжений, представленные в таблице № 2, можно отметить быструю сходимость конечно-элементных решений уже при достаточно редкой сетке дискретизации. Так при размере сетки 4×17 погрешность вычислений находится в пределах 1%. Полученные значения напряжений во втором варианте хорошо согласуются с физическим смыслом решаемой задачи.

Таблица 1

Номера точек	Численные значения напряжений, МПа	Число узлов сетки дискретизации				
		4×5	4×17	4×33	4×49	4×57
1	σ_v	333.71	149.91	108.06	93.14	88.80
	σ_n	-210.33	-24.94	17.22	31.99	36.26
	σ_{cp}	61.69	62.48	62.64	62.56	62.53
2	σ_v	47.24	57.33	58.64	62.14	62.19
	σ_n	69.08	68.81	67.87	61.34	61.53
	σ_{cp}	58.16	63.07	63.26	61.74	61.86

Вследствие наличия осевой симметрии рассматриваемую оболочку можно рассчитать с помощью одномерного конечного элемента со столбцом узловых неизвестных в виде [3]

$$\left\{ \mathbf{U}_y^n \right\}_{1 \times 8}^T = \left\{ \left\{ \mathbf{u}_y^n \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \mathbf{w}_y^n \right\}_{1 \times 4}^T \right\}, \quad \text{где} \quad \left\{ \mathbf{q}_y^n \right\}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l \right\}. \quad (21)$$

Здесь под q понимается меридиональная или нормальная компонента вектора перемещения, а локальная координата x изменяется в пределах $-1 \leq x \leq 1$.

Результаты конечно-элементного решения рассматриваемой оболочки с использованием в качестве элемента дискретизации одномерного КЭ с размером матрицы жесткости 8×8 представлены в табл. № 3, структура которой аналогична предыдущим табл. 1 и 2.

Таблица 2

Номера точек	Численные значения напряжений, МПа	Число узлов сетки дискретизации				
		4×5	4×17	4×33	4×49	4×57
1	σ_v	408.16	475.49	479.62	480.40	480.57
	σ_n	-286.17	-356.06	-360.26	-361.05	-361.21
	σ_{cp}	61.00	59.72	59.68	59.68	59.68
2	σ_v	69.62	67.15	67.05	67.03	67.02
	σ_n	49.65	52.20	52.31	52.33	52.33
	σ_{cp}	59.63	59.68	59.68	59.68	59.68

Таблица 3

Номера точек	Численные значения напряжений, МПа	Число узлов сетки дискретизации				
		1×5	1×17	1×33	1×49	1×57
1	σ_v	368.38	475.52	479.62	480.39	480.56
	σ_n	-241.19	-356.01	-360.22	-361.01	-361.17
	σ_{cp}	63.24	59.76	59.70	59.69	59.69
2	σ_v	73.04	68.01	67.90	67.89	67.88
	σ_n	46.18	51.38	51.49	51.50	51.51
	σ_{cp}	59.60	59.69	59.69	59.69	59.69

Как видно из табл. № 3, численные значения контролируемых параметров НДС практически совпадают с данными таблицы № 2, начиная с сетки узлов 1×17, что позволяет сделать вывод о достоверности полученных результатов.

Основываясь на анализе табличного материала, представленного в таблицах 1,2,3 можно сделать окончательный вывод о высокой эффективности разработанного алгоритма формирования матрицы жесткости треугольного КЭ с использованием множителей Лагранжа.

Л и т е р а т у р а

1. Клочков Ю.В. Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов треугольной и четырехугольной форм в расчетах оболочек вращения// Ю.В. Клочков, А.П. Николаев, Н.А. Гуреева// Изв. вузов. Строительство. – 2004. – № 3. – С.103–109.
2. Клочков Ю.В. О функциях формы в алгоритмах формирования матрицы жесткости треугольных конечных элементов// Ю.В.Клочков, А.П.Николаев, А.П.Киселев// Изв.вузов. Строительство. –1999. – № 10. – С.23–27.
3. Постнов В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций/ В.А. Постнов, И.Я. Хархурим. – Л.:Судостроение, 1974. – 344 с.

LAGRANGIAN COEFFICIENTS USING IN CASING CALCULATION WITH TRIANGULAR FINITE ELEMENT

Y.V.Klochkov, A.P.Nikolaev, O.V.Vakhnina

In this article, the calculation of hard pinched cylinder casing mode of deformation with one-dimensional and triangular finite element using was presented. Comparative analysis of gotten results was done/ Calculations improvement while using triangular finite element as discretization element method with Lagrangian coefficient using was offered.