ПОСТРОЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ С СЕЧЕНИЕМ МНОГОУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ, *канд. физ.-мат. наук, доцент,*
А.А. ТИМОФЕЕВ, *аспирант*
Смоленский государственный университет

В своей монографии [4] Н.И. Мусхелишвили показал, что комплексная функция кручения стержня может быть представлена следующим образом:

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \xi} d\sigma + const\,, \tag{1}$$

где $\omega(\sigma)$ – функция, осуществляющая конформное отображение круга на рассматриваемую область. Однако при практической реализации этого результата зачастую возникают трудности нахождении решения следующей задачи: построить функции, осуществляющие конформное отображение области на круг и круг на область.

Рассматривались различные методы приближенного решения этой задачи, однако существенных практических сдвигов в этом направлении сделано не было. В настоящее время возможности современных систем компьютерной математики позволяют получить удобные для реализации приближенные методы построения конформного отображения. В данной статье для получения комплексной функции кручения с использованием соотношения (1) рассмотрен метод построения конформного отображения произвольной замкнутой односвязной области на круг единичного радиуса с использованием возможностей пакета Mathematica.

Вначале изложим некоторые известные факты[3]. Пусть имеются две области D и D_1. Предположим, что функция $w = f(z)$ осуществляет взаимнооднозначное отображение D на D_1. Для того, чтобы это отображение являлось конформным, на функцию накладываются следующие условия:

1. $f(z)$ - аналитическая в области D,
2. $f'(z) \neq 0$ в D.

Из теоремы Римана следует, что если D – произвольная односвязная область, граница которой содержит более одной точки, то всегда существует конформное отображение области D на круг[3]. Теорема Римана – это классическая теорема о существовании, в ней ничего не говорится о том, как получить требуемое конформное отображение. Для многих областей данная задача представляется достаточно трудоемкой, а для некоторых, например, для внутренности эллипса, и вовсе неразрешима в элементарных функциях[1]. В качестве области D_1 возьмем круг (с центром в точке $(0;0)$), и пусть область D также содержит внутри себя начало координат. Рассмотрим множество функций f, аналитических в области D и таких, что $f'(0) = 1$. В этом множестве функций рассмотрим интеграл следующего вида

$$\iint_D f' \cdot \overline{f'} dxdy. \tag{2}$$

Имеет место теорема: функция, для которой интеграл (2) принимает наименьшее значение, осуществляет конформное отображение области на круг[2].

В основе нахождения функции лежит метод Ритца, идея которого состоит в следующем. Принимая во внимание теорему Уолша[3], рассмотрим множество многочленов вида $f'(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$. Рассмотрим интеграл (2). Он будет зависеть от параметров (c_1, …, c_n). Задача состоит в следующем: необходимо определить такой набор параметров c_1, …, c_n), при которых интеграл (2) минимален. При использовании традиционных методов решения получается плохо обусловленная система уравнений. Система Mathematica позволяет устранить этот недостаток и получить точное решение этой системы. В результате получим набор параметров $(c_1^0, \ldots, c_n^0)$, для которых интеграл (2) будет минимален, тогда функция, осуществляющая конформное отображение области на круг будет иметь вид

$$f = \int_0^z \left(1 + c_1^0 z + \ldots + c_n^0 z^n\right) dz. \tag{3}$$

Зная функцию (3), с помощью системы Mathematica можно легко получить и обратное отображение и представить его в виде отрезка степенного ряда. Таким образом, для получения выражения для комплексной функции кручения стержня осталось лишь вычислить интеграл (1). Его вычисление удобно производить, опираясь на теорему о вычетах и используя команду Residue системы Mathematica.

Приведем пример программы, реализующей построение комплексной функции кручения для стержня квадратного сечения (полужирным шрифтом в тексте программы выделены промежуточный (функция, осуществляющая конформное отображение квадрата на круг единичного радиуса) и конечный (полученная комплексная функция кручения) результаты):

```
m=40;A=Table[a[n],{n,1,m}];
p=1+Sum[(a[n]+I*a[n+m/2])*(x+I*y)^n,{n,1,m/2}];
B=Table[b[n],{n,1,m}];
p1=1+Sum[(b[n]-I*b[n+m/2])*(x-I*y)^n,{n,1,m/2}];
q=Expand[p*p1];
T1=Table[Coefficient[q,a[i]*b[j]],{i,1,m},{j,1,m}];
T1=Table[Integrate[T1[[i,j]],{x,-1,1},{y,-1,1}],{i,1,m},{j,1,m}];
T2=Table[Coefficient[q,a[n]],{n,1,m}];
B1=Table[b[n]-> 0,{n,1,m}];
T2=T2/.B1;
T2=Integrate[T2,{x,-1,1},{y,-1,1}];
T3=Table[Coefficient[q,b[n]],{n,1,m}];
A1=Table[a[n]-> 0,{n,1,m}];
T3=T3/.A1;
T3=Integrate[T3 ,{x,-1,1},{y,-1,1}];
S=Sum[T1[[i,j]]*a[i]*b[j],{i,1,m},{j,1,m}]+Sum[T2[[i]]*a[i],{i,1,m}]+Sum[T3[[i]]*
b[i],{i,1,m}];
UU=Table[b[i]-> a[i],{i,1,m}];
S=ComplexExpand[S];
S=S/.UU;
R=Minimize[S,A];
p=p/.R[[2]];
p=p/.{x+I*y->z};
p2[z_]=Integrate[p,{z,0,z}];
p2[z_]=p2[z]/Abs[p2[1+I]];
p2[z]//N
```

$$\mathbf{0.927041\,(z+0.0738565\,z^{5}+0.0045453\,z^{9}+0.000283082\,z^{13}+0.0000167586\,z^{17}+6.98092\cdot 10^{-7}\,z^{21})}$$

```
f[z_]=p2[z];
r=Series[f[z],{z,0,22}];
Clear[y];r1=InverseSeries[r,y];
r1=Normal[r1];U1=Table[Coefficient[r1,y^k],{k,1,21}];
r2=(r1/.y->0)+Sum[U1[[k]]*y^(-k),{k,1,21}];
rr=Expand[r1*r2];
rr=rr/(y-z);
F[z_]=Simplify[Residue[rr,{y,z}]+Residue[rr,{y,0}]];
F[z_]=Expand[F[z]];
F[z]//N
```

$$\mathbf{1.17839-0.123041z^{4}+0.0523867z^{8}-0.0304076z^{12}+0.0200783z^{16}-0.0136357z^{20}}$$

Можно показать, что относительная погрешность в рассмотренном примере составляет порядка $4{,}778\cdot 10^{-6}$.

Литература

1. *Иванов В.И., Попов В.Ю.* Конформные отображения и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
2. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
3. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. – М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1950. – 702 с.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. –708 с.