

ПРОДОЛЬНАЯ ТРЕЩИНА С ЧАСТИЧНО КОНТАКТИРУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ В СЕЧЕНИИ ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ

Ш.Г. ГАСАНОВ, канд. техн. наук, доцент

Бакинский филиал Московского государственного университета

Рассматривается случай продольной трещины в сечении дорожного покрытия с частично контактирующими берегами. Считается, что под действием внешней нагрузки (вдавливания колеса в неровную поверхность покрытия) в зоне сжимающих напряжений происходит частичное закрытие берегов трещины.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия в процессе эксплуатации. Пусть в сечении покрытия имеется прямолинейная трещина длиной 2ℓ , расположенная на отрезке $|x_1| \leq \ell$, $y = -h/2$. В центре трещины разместим начало локальной системы координат $x_1 O_1 y_1$, ось x_1 которой совпадает с линией трещины и параллельна с осью x . Берега трещины приняты свободны от внешних нагрузок (рис. 1). Под действием внешней нагрузки (вдавливания колеса в поверхность покрытия) в зоне сжимающих напряжений возможно частичное закрытие берегов трещины, т.е. берега трещины на некоторых заранее неизвестных участках $(-\ell, -d_1)$ и (d_2, ℓ) могут войти в контакт. На этих участках берегов трещины появятся контактные напряжения.

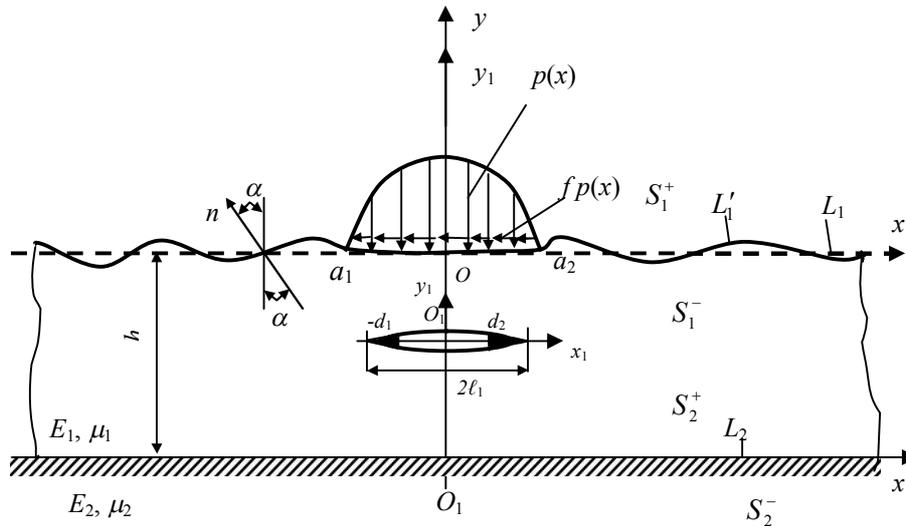


Рис. 1.

Расчетная схема задачи о продольной трещине
с частично контактирующими берегами в покрытии

Краевые условия рассматриваемой контактной задачи механики разрушения имеют вид

$$\text{при } y = \delta(x) \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{вне контактной площадки} \quad (1)$$

$$\text{при } y = \delta(x) \quad v_n = f(x) + \alpha x + C, \quad \tau_{nt} = f \sigma_n \quad \text{на площадке контакта}$$

$$\text{при } y = -h \quad (\sigma_y - i\tau_{xy})_I = (\sigma_y - i\tau_{xy})_{II}, \quad (u + iv)_I = (u + iv)_{II} \quad (2)$$

$$\text{при } y_1 = 0 \quad \sigma_n = 0; \quad \tau_{x_1 y_1} = 0 \quad \text{на свободных берегах трещин} \quad (3)$$

$$\sigma_{y_1} = q_{y_1}; \quad \tau_{x_1 y_1} = q_{x_1 y_1} \quad \text{на контактирующих берегах трещины}$$

Рассматривается некоторая реализация неровности внешней поверхности катания L'_1 дорожного покрытия. Контур L'_1 ($y = \delta(x)$) будем считать близким к

прямолинейной форме, допуская лишь малые отклонения линии L'_1 от прямой $y = 0$. В условиях (1) – (3) принято, что на участке поверхности наружного слоя, где в него вдавливаются каток (колесо), имеют место силы сухого трения: вне участка контакта поверхность покрытия дороги свободна от внешних усилий. На границе раздела сред (покрытие и основной материал основания) имеет место условия полного сцепления; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; C – поступательное перемещение штампа (катка); α – угол поворота штампа.

Для решения поставленной контактной задачи используем метод, изложенный в [1]. Используем принцип суперпозиции. Первое напряженно-деформированное состояние (без трещины) в каждом приближении найдено в [1].

Граничные условия для второго напряженно-деформированного состояния в нулевом приближении будут, на основании сказанного выше, иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 & \quad \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0 \\ \text{при } y = -h & \quad \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0 \\ \text{при } y_1 = 0 & \quad \sigma_{y_1}^{(0)} = -\sigma_1^{(0)}(x_1), \quad \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = -\tau_1^{(0)}(x_1) \text{ на свободных берегах трещины} \\ & \quad \sigma_{y_1}^{(0)} = q_{y_1}^{(0)}(x_k) - \sigma_1^{(0)}(x_1), \quad \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = q_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1) - \tau_1^{(0)}(x_1) \end{aligned} \quad (4)$$

на контактирующих берегах трещины.

Здесь $\sigma_1^{(0)}(x_1)$ и $\tau_1^{(0)}(x_1)$ нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошном покрытии по оси y_1 , $|x_1| \leq \ell$ в нулевом приближении от действия вдавливания колеса в дорожное покрытие. Значения $\sigma_1^{(0)}(x_1)$ и $\tau_1^{(0)}(x_1)$ найдены в [1].

Следуя изложенной методике в [2], для задачи, описывающей второе напряженно-деформированное состояние в нулевом приближении, получим следующее сингулярное интегральное уравнение в безразмерных координатах $\eta = t/\ell$, $\xi = x/\ell$ относительно $g_0(\eta)$:

$$\int_{-1}^1 \frac{g_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \int_{-1}^1 [g_0(\eta)R(\xi, \eta) + \overline{g_0(\eta)}S(\xi, \eta)] d\tau = \pi F_0(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (6)$$

$$F_0(\xi) = \begin{cases} -(\sigma_1^{(0)}(\xi) - i\tau_1^{(0)}(\xi)) & \text{на } L'_1 \\ q_{y_1}^{(0)}(\xi) - iq_{x_1 y_1}^{(0)}(\xi) - (\sigma_1^{(0)}(\xi) - i\tau_1^{(0)}(\xi)) & \text{на } L''_1 \end{cases}$$

$$\frac{i(1 + \kappa_0)g_0(x_1)}{2G_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [u_0^+ - u_0^- + i(v_0^+ - v_0^-)]. \quad (7)$$

Функции $R(\xi, \eta)$ и $S(\xi, \eta)$ являются [3] действительными. Поэтому интегральное уравнение (6) распадается на два действительных интегральных уравнений. В случае симметричной задачи, т.е. в случае трещины нормального разрыва, когда на берегах трещины действуют только нормальные усилия $\sigma_1^{(0)}(x_1)$, имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{v_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \lambda \int_0^\infty \frac{(-1 - 2\tau - 2\tau^2 + e^{-2\tau})}{sh2\tau + 2\tau} \sin \lambda \tau (\eta - \xi) v_0(\eta) d\eta = \pi F_0^*(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (8)$$

$$F_0^*(\xi) = \begin{cases} -\sigma_1^{(0)}(\xi) & \text{на } L'_1 \\ q_{y_1}^{(0)}(\xi) - \sigma_1^{(0)}(\xi) & \text{на } L''_1 \end{cases}, \quad \frac{(1 + \kappa_0)v_0(x_1)}{2G_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [v_0^+ - v_0^-]. \quad (9)$$

Если воспользоваться значением интеграла $\int_0^{\infty} \sin \tau x d\tau = 1/x$, принимаемом в обобщенном смысле Абеля, интегральное уравнение можно записать в виде

$$\int_{-1}^1 \nu_0(\eta) K_1(\eta - \xi) d\eta = \pi F_0^*(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (10)$$

где
$$K_1(\eta) = 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{sh^2 \tau - \tau^2}{sh 2\tau + 2\tau} \sin \lambda \tau \eta d\tau.$$

Это уравнение можно преобразовать в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\Phi_*(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{F_0^*(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} + \int_0^1 F_0^*(\eta, \xi) \Phi_*(\eta) d\eta, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad (11)$$

где
$$F(\eta, \xi) = \lambda^2 \eta \int_0^{\infty} \frac{1 + 2\tau + 2\tau^2 - e^{-2\tau}}{sh 2\tau + 2\tau} J_0(\lambda \eta \tau) J_0(\lambda \xi \tau) \tau d\tau,$$

$$\nu_0(x) = \begin{cases} 0, & x_1 > \ell \\ \int_x^{\ell} \frac{u \Phi_*(u) du}{\sqrt{u^2 - x_1^2}}, & 0 \leq x_1 < \ell, \end{cases} \quad J_0(u) - \text{функция Бесселя первого рода.}$$

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода сводится известным способом к системе M алгебраических уравнений. В правые части этой системы входят неизвестные значения контактных напряжений $q_{y_1}^{(0)}(x_1)$ в узловых точках, принадлежащих концевым контактными зонам.

Для определения контактных напряжений имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\nu_0^+ - \nu_0^-) = 0 \quad \text{на } L_1''. \quad (12)$$

Требую выполнения условия (12) в узловых точках, содержащихся в концевых областях $(-\ell_1, -d_1)$, (d_2, ℓ) , получаем недостающие уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений $q_{y_1}^{(0)}(t_{m_1})$ в узловых точках

$$\nu_0(t_{m_1}) = 0 \quad (m_1 = 1, 2, \dots, M_1; M_2, \dots, M). \quad (13)$$

Для замкнутости системы, дающего решение задачи, не хватает двух уравнений, определяющих параметры d_1 и d_2 . Условиями, служащими для определения параметров d_1 и d_2 , являются условия конечности напряжений в окрестности вершин трещины

$$\nu_0(\ell) = 0, \quad \nu_0(-\ell) = 0. \quad (14)$$

В развернутом приближенном виде эти условия можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} F_0^*(\eta) d\eta + \lambda^2 (a_{11} F_0 + b_{11} \bar{F}_0) + \frac{\lambda^4}{2} [F_0 (-b_{11}^2 - a_{11}^2 + a_{31} + a_{33}) + \\ & + F_0 (-2a_{11} b_{11} + b_{31} + b_{33}) + 2(a_{33} F_2 + b_{33} F_2) + (a_{32} F_1 + b_{32} F_1)] = 0, \quad (15) \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} F_0^*(\eta) d\eta + \lambda^2 (a_{11} F_0 + b_{11} F_0) + \frac{\lambda^4}{2} [F_0 (-b_{11}^2 - a_{11}^2 + a_{31} + a_{33}) + \\ & + F_0 (-2a_{11} b_{11} + b_{31} + b_{33}) + 2(a_{33} F_2 + b_{33} F_2) - (a_{32} F_1 + b_{32} F_1)] = 0, \end{aligned}$$

где $\lambda = \ell/h$; $F_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^n \sqrt{1-\xi^2} F_0^*(\xi) d\xi$; коэффициенты $a_{11}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_{11},$

b_{31}, b_{32}, b_{33} находятся по формулам (V. 46, [3]) при $\alpha = 0$.

При действии только касательных усилий на берегах трещины, т.е. в случае трещины поперечного сдвига, интегральное уравнение (6) преобразуется к следующему виду в безразмерных переменных относительно искомой функции $u_0(x_1)$

$$\int_{-1}^1 u_0(\eta) K_2(\eta - \xi) d\eta = \pi F_0^{**}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (16)$$

Здесь
$$K_2(\eta) = \lambda \int_0^\infty L(\tau) \sin \lambda \tau \eta d\tau, \quad L(\tau) = 2 \frac{sh^2 \tau - \tau^2}{sh^2 2\tau - 2\tau}$$

$$F_0^{**}(\xi) = \begin{cases} -\tau_1^{(0)}(\xi) & \text{на } L_1' \\ q_{x_1 y_1}^{(0)}(\xi) - \tau_1^{(0)}(\xi) & \text{на } L_1'' \end{cases}, \quad \frac{(1 + \kappa_0) u_0(x_1)}{2G_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (u_0^+ - u_0^-)$$

Учитывая, что функция $L(\tau)$ обладает следующими свойствами

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} L(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} L(\tau) = 1$$

функцию $L(\tau)$ можно аппроксимировать следующим выражением $L(\tau) \approx th(\tau/2)$, верно отражающим поведение функции $L(\tau)$ в нуле и на бесконечности. Как отмечается в [3, 4], относительная погрешность аппроксимации не превышает 3,4% при всех $0 \leq \tau \leq \infty$.

В этом случае интегральное уравнение (16) принимает вид

$$\frac{2\pi}{h} \int_{-1}^1 \frac{u_0(\eta) d\eta}{sh \frac{2\pi}{h} (\eta - \xi)} = \pi F_0^{**}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (17)$$

Решение уравнения (17) в размерных (старых) переменных имеет вид

$$u_0(x_1) = \frac{1}{\pi ch Ax_1 \sqrt{th^2 Al - th^2 Ax_1}} \left[-A \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{th^2 Al - th^2 At}}{thAt - thAx_1} F_0^{**}(t) \frac{dt}{chAt} + C \right], \quad (18)$$

где $A = 2\pi/h$; постоянная C определяем из условия

$$\int_{-\ell}^{\ell} u_0(t) dt = 0. \quad (19)$$

В полученное решение входят неизвестные контактные напряжения $q_{x_1 y_1}^{(0)}$ в концевых зонах. Для их определения имеем условие отсутствия раскрытия перемещений в концевых контактных зонах

$$u_0(x_1) = 0 \quad \text{на } L_1'', \quad (20)$$

где x_1 – аффикс точек берегов трещины в концевых зонах $(-\ell, -d_1)$ и (d_2, ℓ) .

Удовлетворяя условию (20), находим сингулярное интегральное уравнение для отыскания контактных напряжений $q_{x_1 y_1}^{(0)}$ в концевых зонах

$$-A \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{th^2 Al - th^2 At}}{thAt - thAx_1} F_0^{**}(t) \frac{dt}{chAt} + C = 0, \quad (21)$$

где
$$C = \frac{1}{K(a)} \int_{-a}^a \Pi \left(\frac{a^2}{\tau^2}, a \right) = \sqrt{a^2 - \tau^2} f_*(\tau) \frac{d\tau}{\tau}; \quad a = thAl; \quad f_*(y) = \tau_1^{(0)}(t);$$

K, Π – полные эллиптические интегралы первого и третьего рода.

Уравнение (21) преобразуем к виду

$$A \int_{L_1+L_2} \frac{\sqrt{th^2 A \ell - th^2 At}}{thAt - thAx_1} q_{x_1 y_1}^{(0)} \frac{dt}{chAt} = A \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{th^2 A \ell - th^2 At}}{thAt - thAx_1} \tau_1^{(0)}(t) \frac{dt}{chAt} + C,$$

где $L_1 = [-\ell, -d_1]$, $L_2 = [d_2, \ell]$.

Сделав замену переменных $\tau = thAt$; $y = thAx_1$; $a = thA\ell$; $\varphi(\tau) = chAt \cdot q_{x_1 y_1}^{(0)}(t)$, преобразуем уравнение (21) в сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\int_{L_1^*+L_2^*} \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau - y} \varphi(\tau) d\tau = \pi f(y), \quad \text{где } f(y) = C + \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau - y} \tau_1^{(0)}(\tau) d\tau,$$

$$L_1^* = [-a, -thAd_1], \quad L_2^* = [thAd_2, a].$$

Решение этого уравнения будет [5]

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi X^+(y)} \left[- \int_{L_1^*+L_2^*} \frac{X^+(\tau) f(\tau) d\tau}{\tau - y} \right], \quad (22)$$

где $X^+(\tau) = \sqrt{(a^2 - \tau^2)(d_1^* - \tau)(\tau - d_2^*)}$; $d_1^* = thAd_1$; $d_2^* = thAd_2$

Для определения неизвестных параметров d_1 и d_2 , определяющих размеры концевых зон трещины поперечного сдвига имеем условия конечности напряжений в окрестности вершин трещины. Эти условия найдем в следующем виде

$$A \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{thA\ell + thAt}}{thA\ell - thAt} \frac{F_0^{**}(t) dt}{chAt} + C = 0, \quad A \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{thA\ell - thAt}}{thA\ell + thAt} \frac{F_0^{**}(t) dt}{chAt} - C = 0. \quad (23)$$

После построения решения в нулевом приближении переходим к нахождению решения задачи (1) – (3) в первом приближении.

Граничные условия для второго напряженно-деформированного состояния в первом приближении будут иметь вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0: & \quad \sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0; \\ \text{при } y = -h: & \quad \sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0; \end{aligned} \quad (24)$$

при $y_1 = 0$: $\sigma_{y_1}^{(1)} = -\sigma_1^{(1)}(x_1)$, $\tau_{x_1 y_1}^{(1)} = -\tau_1^{(1)}(x_1)$ на свободных берегах трещины,

$$\sigma_{y_1}^{(1)} = q_{y_1}^{(1)}(x_k) - \sigma_1^{(1)}(x_1), \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = q_{x_1 y_1}^{(1)}(x_1) - \tau_1^{(1)}(x_1)$$

на контактирующих берегах трещины

Здесь $\sigma_1^{(1)}(x_1)$ и $\tau_1^{(1)}(x_1)$ нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошном бездефектном покрытии по оси y_1 , $|x_1| \leq \ell$ в первом приближении от действия вдавливания колеса в дорожное покрытие. Величины $\sigma_1^{(1)}(x_1)$ и $\tau_1^{(1)}(x_1)$ найдены в [1].

Поступая аналогично нулевому приближению, получим сингулярное интегральное уравнение в безразмерных координатах $\eta = t/\ell$, $\xi = x/\ell$ относительно искомой функции $g_1(\eta)$:

$$\int_{-1}^1 \frac{g_1(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \int_{-1}^1 [g_1(\eta) R(\xi, \eta) + \overline{g_1(\eta)} S(\xi, \eta)] d\tau = \pi F_1(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (26)$$

$$F_1(\xi) = \begin{cases} -(\sigma_1^{(1)}(\xi) - i\tau_1^{(1)}(\xi)) & \text{на } L_1' \\ q_{y_1}^{(1)}(\xi) - iq_{x_1 y_1}^{(1)}(\xi) - (\sigma_1^{(1)}(\xi) - i\tau_1^{(1)}(\xi)) & \text{на } L_1'' \end{cases}$$

$$\frac{i(1 + \kappa_0)g_1(x_1)}{2G_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [u_1^+ - u_1^- + i(v_1^+ - v_1^-)]. \quad (27)$$

В правую часть сингулярного интегрального уравнения входят неизвестные контактные напряжения $q_{y_1}^{(1)}$ и $q_{x_1 y_1}^{(1)}$. Для их определения имеем условие отсутствия раскрытия берегов трещины в концевых контактных зонах.

Чтобы не повторяться, приведем основные разрешающие уравнения задачи первого приближения

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell [g_1(t_m)R(\ell t_m, \ell x_r) + \overline{g_1(t_m)}S(\ell t_m, \ell x_r)] = F_1(x_r), \quad (28)$$

$$\sum_{m=1}^M g(t_m) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1),$$

$$g_1(t_{m_1}) = 0 \quad (m_1 = 1, 2, \dots, M_1; M_2, \dots, M). \quad (29)$$

К системам (28), (29) необходимо добавить условия конечности напряжений у вершин трещин

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_1(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1(t_m) \cdot \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (30)$$

Получена замкнутая объединенная алгебраическая система комплексных уравнений для определения искомых функций в первом приближении. Отделяя в системах (28), (29), (30) действительные и мнимые части, увеличиваем вдвое число уравнений системы, т.е. получим две действительные объединенные системы для определения $v_1(t_m)$, $q_{y_1}^{(1)}(t_{m_1})$ (трещина нормального разрыва) и $u_1(t_m)$, $q_{x_1 y_1}^{(1)}(t_{m_1})$ (трещина поперечного сдвига) соответственно, а также размеры концевых

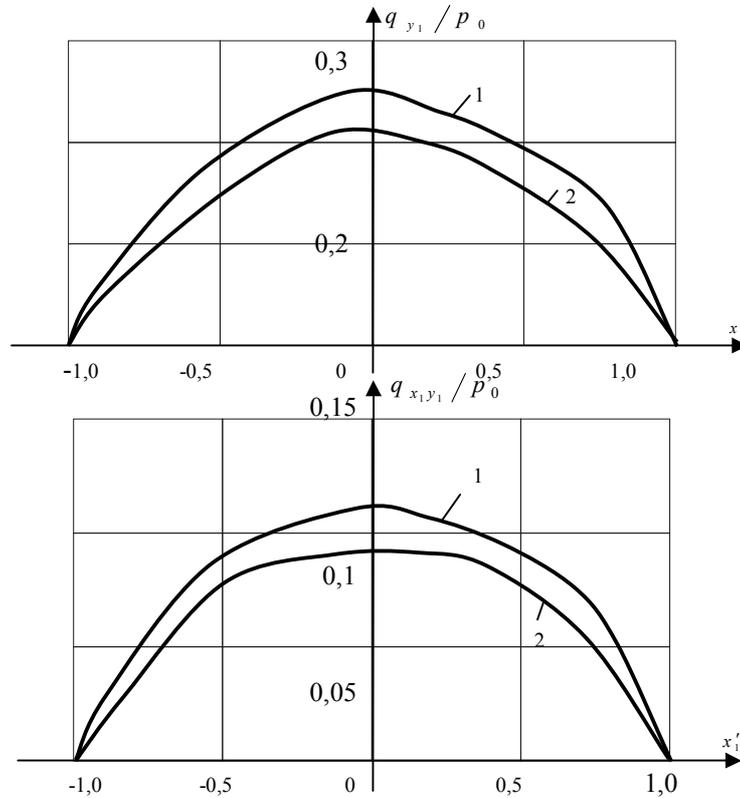


Рис. 2. Зависимости контактных напряжений вдоль левой концевой контактной зоны трещины

вых контактных зон. Из-за неизвестных значений параметров d_1 и d_2 системы уравнений оказались нелинейными. Для решения нелинейных алгебраических систем используем метод последовательных приближений.

Результаты расчета контактных напряжений вдоль концевой контактной зоны представлены в виде графиков на рис. 2; кривая 1 соответствует гладкой наружной поверхности покрытия; а кривая 2 неровной поверхности.

Л и т е р а т у р а

1. *Гасанов Ш.Г.* Моделирование напряженно-деформированного состояния в дорожном покрытии// Ученые записки Азерб. Арх.-Стр. Университета, 2007, №2, с. 151 – 159.

2. *Гасанов Ш.Г.* Трещина в сечении дорожного покрытия // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2008. – №1. – С. 39 – 45.

3. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.

4. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 619 с.

5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

THROAT CRACK WITH PARTIALLY CONTACTING FACES IN SECTION OF THE ROAD COVERING

Hasanov Sh. H.

The case of a throat crack in section of a road covering with partially contacting faces is considered. It is considered, that under action of external loading (cave-in of a wheel in a rough surface of a covering) in a zone of compressing stresses there is a partial closing faces of a crack.

