

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.В. НАБАТОВ, аспирант

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)  
127994, Москва, ГСП-4, ул. Образцова, 9, стр.9; [i\\_nabatov@mail.ru](mailto:i_nabatov@mail.ru)

*В настоящей статье на примере балки жесткости вантового моста рассмотрена задача моделирования движения линейной системы, находящейся под действием детерминированной и стохастической параметрической нагрузки. Анализируется аэродинамическая устойчивость подобных систем. Сравниваются два случая, когда пульсационная составляющая ветра является гауссовским случайным стационарным процессом со спектральной плотностью Давенпорта и спектральной плотностью Кеймала.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** аэродинамическая устойчивость, линейная система, стохастическая параметрическая нагрузка, стационарный процесс.

Взаимодействие упругой конструкции с потоком воздуха является важной задачей при анализе поведения летательных аппаратов, высотных зданий, радиомачт, вантовых и висячих мостов [1, 2]. Среди этих задач особое место занимает проблема аэродинамической устойчивости систем.

Изначально эта проблема изучалась авиаконструкторами при анализе поведения летательного аппарата в воздухе. Серьезное изучение аэродинамической устойчивости сооружений берет свое начало с катастрофы Такомакского висячего моста в США, которая произошла в 1940 г. [3]

Влияние ветровой нагрузки на прочность и надежность гибких конструкций, в частности конструкций вантового моста, анализируется при «продувке» моделей балки жесткости в аэродинамической трубе. Модель балки, поперечное сечение которой имеет, по крайней мере, одну (вертикальную) ось симметрии, совершает взаимосвязанные вертикальные и крутильные колебания. Уравнения, описывающие колебания такой модели можно записать в виде:

$$\begin{cases} \ddot{v} + 2\xi_v \dot{v} + \omega_0^2 v = \frac{1}{m} L_v(v, \dot{v}, \Theta, \dot{\Theta}) \\ \ddot{\Theta} + 2\xi_{\Theta} \dot{\Theta} + \omega^2 \Theta = \frac{1}{I} L_{\Theta}(v, \dot{v}, \Theta, \dot{\Theta}) \end{cases} \quad (1)$$

где  $v, \dot{v}$  – вертикальное перемещение балки и скорость вертикального перемещения,  $\Theta, \dot{\Theta}$  – угол закручивания балки жесткости и скорость изменения угла закручивания,  $m$  – масса модели,

$I$  – погонный момент инерции масс,  $\xi_v, \xi_{\Theta}$  – коэффициенты демпфирования при вертикальных и крутильных колебаниях соответственно,

$\omega_c, \omega$  – собственные частоты вертикальных и крутильных колебаний модели,

$L_v(v, \dot{v}, \Theta, \dot{\Theta})$ ,  $L_{\Theta}(v, \dot{v}, \Theta, \dot{\Theta})$  – аэродинамическая подъемная сила и крутильный момент (линейные зависимости).

Здесь и далее точкой обозначается производная по времени  $t$ .

Произведя замену искоемых переменных  $v = x_1$ ;  $\dot{v} = x_2$ ;  $\Theta = x_3$ ;  $\dot{\Theta} = x_4$ , эту систему можно представить в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\xi_v x_2 - \omega_c^2 x_1 + \frac{1}{m} L_v(x_1 \dots x_4) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2\xi x_4 - \omega^2 x_3 + \frac{1}{I} L_\Theta(x_1 \dots x_4) \end{cases} \quad (2)$$

Решение этих уравнений, которое должно удовлетворять начальным условиям  $x_i(0) = x_{i0}$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ), описывает невозмущенное движение модели.

Для исследования устойчивости решения уравнений (2) рассмотрим уравнения возмущенного движения (3), которые имеют вид

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = \delta x_2 \\ \delta \dot{x}_2 = -2\xi_v \delta x_2 - \omega_c^2 \delta x_1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_v(x_1 \dots x_4)}{\partial x_i} \delta x_i \\ \delta \dot{x}_3 = \delta x_4 \\ \delta \dot{x}_4 = -2\xi \delta x_4 - \omega^2 \delta x_3 + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_\Theta(x_1 \dots x_4)}{\partial x_i} \delta x_i \end{cases} \quad (3)$$

Функции  $\delta x_i$  должны удовлетворять начальным условиям  $\delta x_i(0) = \delta x_{i0}$ .

Далее под устойчивостью невозмущенного движения системы понимается устойчивость в смысле Ляпунова [4, 5].

Для анализа устойчивости системы воспользуемся понятием максимального показателя Ляпунова

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(t_0)\|},$$

где  $\|\delta x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \delta x_i^2(t)}$  - норма вектора  $\delta x$  в Евклидовом пространстве,  $\delta x$  - компоненты вектора  $\delta x$ ,  $\|\delta x(t_0)\|$  - норма вектора  $\delta x$  в начальный момент времени  $t_0$ .

При  $\lambda > 0$  - система неустойчива, при  $\lambda < 0$  - асимптотически устойчива, значению  $\lambda = 0$  - соответствует критическая величина параметра системы.

Для численного решения уравнений (1), (2) воспользуемся методом Рунге-Кутты четвертого порядка, реализованного в программном комплексе MatLab.

Для получения оценки максимального показателя Ляпунова применим метод Беннеттина [6]. Решение уравнений (2) выполняется при начальных условиях таких, что  $\|\delta x(t_0)\| = 1$ . На следующем шаге по времени  $t$  вектор  $\delta x(t)$  получает значение  $\delta x(t_1)$ . Длину вектора  $\delta x(t_1)$  обозначим  $d_1$ . Далее решение уравнений продолжим с другого начального условия  $\delta x^*(t_1) = \delta x(t_1)/d_1$ . Значения неизвестных в момент времени  $t_2$  обозначим  $\delta x(t_2)$ , а длину вектора  $\delta x(t_2)$  -  $d_2$ .

В результате многократного применения описанной процедуры получим последовательность чисел  $d_i$ , где  $i=1,2,3 \dots N=T/h$  (причём  $h$  – шаг интегрирования). Тогда оценка максимального показателя Ляпунова определяется выражением [6]

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N \cdot h} \sum_{i=1}^N \ln d_i$$

Зависимости  $L_{\Theta}(x_1 \dots x_4)$ ,  $L_{\nu}(x_1 \dots x_4)$  и их производные зависят от скорости ветра, которую можно представить в виде суммы постоянной  $u$  и пульсационной составляющих  $u \cdot \xi(t)$ :  $U = u[1 + \xi(t)]$ .

Сравним два случая, когда пульсационная составляющая ветра является гауссовским случайным стационарным процессом со спектральной плотностью Давенпорта, и спектральной плотностью Кеймала [8].

Для получения реализаций этой случайной функции воспользуемся методом канонических разложений [7]. Известно, что всякий стационарный процесс, математическое ожидание которого равно нулю, на конечном промежутке времени  $[0, T]$  может быть представлен конечной суммой с достаточно большим числом членов  $n$

$$\xi(t) = \sum_0^n (U_j \sin \omega_j t + V_j \cos \omega_j t),$$

где  $U_j, V_j$  - некоррелированные нормально распределенные случайные величины,  $\langle U_j \rangle = \langle V_j \rangle = 0$ ,  $U_j^2 = V_j^2$ ,  $\omega_j = j \cdot \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega = 2\pi/T$ . Дисперсии  $U_j^2 = V_j^2$  случайных величин  $U_j, V_j$  выражаются через спектральную плотность процесса  $\xi(t)$ .

Рассмотрим поведение модели вантового моста на о.Русский через пролив Босфор Восточный в г. Владивостоке, общий вид которого показана на рис. 1.

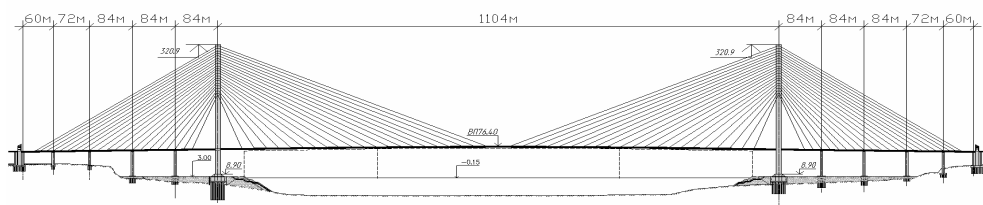


Рис.1 Общий вид.

Длина главного пролета, $\ell$	1104 м
Ширина балки жесткости, $b$	29.2 м
Погонный момент инерции масс, $I$	1424385 кг·м <sup>4</sup> /м
Погонная масса, $m$	22786 кг/м
Плотность воздуха, $\rho$	1,19 кг/м <sup>3</sup>
Коэффициент демпфирования при вертикальных колебаниях, $\xi_{\nu}$	0,005
Коэффициент демпфирования при крутильных колебаниях, $\xi$	0,005
Собственная частота вертикальных колебаний, $\omega_c$	0,173 Гц
Собственная частота крутильных колебаний, $\omega$	0,474 Гц
Коэффициент подъемной силы, $C_L$	4,56
Коэффициент крутильного момента, $C_M$	1.17
Аэродинамическая подъемная сила:	$L_{\nu} = \frac{C_L \rho V^2 B}{2}$ ;

Крутильный момент:

$$L_{\Theta} = \frac{C_M \rho V^2 B^2}{2}.$$

Для нашего примера рассмотрим 100 реализаций случайного процесса. Постоянную составляющую ветра примем равную 20 м/с, а среднеквадратическое отклонение пульсационной составляющей скорости ветра - 1,5 м/с. В результате расчетов получим соответствующее число значений показателя Ляпунова при спектральной плотности Давенпорта, и при спектральной плотности Кеймала. По этим данным строим гистограммы (рис. 3, 4), располагая которыми можно оценить вероятность устойчивого движения модели.

Спектральная плотность Давенпорта определяется выражением  $S(\omega) = \frac{\sigma_V^2 \omega}{3(1 + \omega^2)^{4/3}}$ , где  $\sigma_V^2$  - дисперсия процесса.

Расчет спектральной плотности Кеймала осуществляется по формуле [8]

$$S_L(z, \omega) = \frac{\omega S_V(z, \omega)}{\sigma_V^2} = \frac{6,8 f_L(z, \omega)}{(1 + 10,2 f_L(z, \omega))^{5/3}};$$

где  $S_V(z, \omega)$  - односторонний дисперсный спектр ветра;

$f_L(z, \omega) = \frac{\omega L(z)}{v_m(z)}$  - безразмерная частота, определяемая по собственной частоте крутильных колебаний сооружения  $\omega = \omega_{1,x}$  Гц, средней скорости ветра  $v_m(z)$  и масштабу длины турбулентности  $L(z)$ .

Масштаб длины турбулентности  $L(z)$  представляет среднюю величину порывов естественного ветра. Для высоты  $z$  ниже 200 м (в нашем случае  $z = 72$  м) масштаб длины турбулентности рассчитывают по формуле:

$$L(z) = L_t \left(\frac{z}{z_t}\right)^\alpha \quad \text{при } z \geq z_{\min}, \quad L(z) = L(z_{\min}) \quad \text{при } z < z_{\min}$$

принимая базовую высоту  $z_t = 200$  м, базовый масштаб длины  $L_t = 300$  м,

$\alpha = 0,67 + 0,05 \ln(z_0)$  и параметр шероховатости у моря  $z_0 = 0,003$  м. Минимальная высота у моря  $z_{\min} = 1$  м.

График изменения оценки показателя Ляпунова во времени для спектральной плотности Давенпорта представлен на рис.2. Для спектральной плотности Кеймала зависимость  $\lambda$  и  $T$  имеют аналогичный вид.

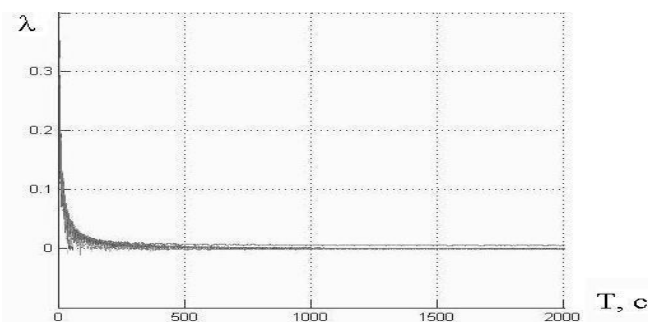


Рис. 2 Показатели Ляпунова при спектральной плотности Давенпорта

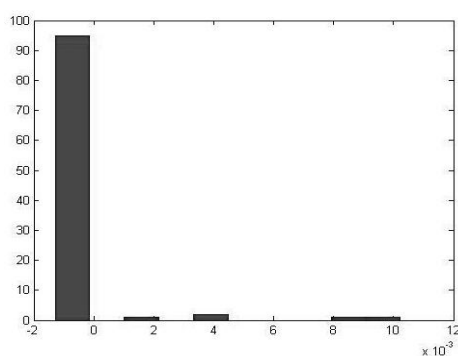


Рис. 3 Гистограмма распределения показателя Ляпунова при спектральной плотности Давенпорта

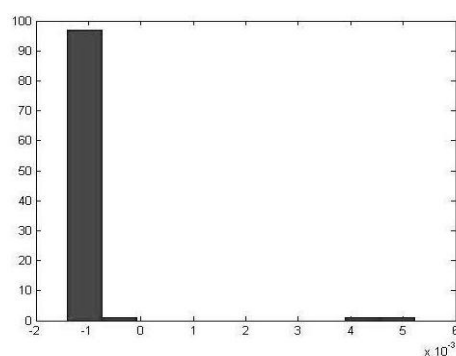


Рис. 4 Гистограмма распределения показателя Ляпунова при спектральной плотности Кеймала

По результатам расчета можно оценить вероятность неустойчивого движения системы, которая в случае Давенпорта  $P = 0.05$ , в случае Кеймала  $P = 0.02$ .

### Выводы

В работе предложена методика оценки устойчивости линейных систем при стохастическом воздействии, основанная на каноническом представлении исходных случайного стационарного процесса и на определении максимального показателя Ляпунова для каждой реализации.

Рассмотрены два случая, наиболее часто используемых в мостостроении, когда пульсационная составляющая ветра является гауссовским случайным стационарным процессом со спектральной плотностью Давенпорта, и спектральной плотностью Кеймала.

### Л и т е р а т у р а

1. Мхитарян А.М., Лазнюк П.С., Максимов В.С. Динамика полета. – М., «Машиностроение», 1971, 368с.
2. Петропавловский А.А., Крыльцов Е.И., Богданов Н.Н. Вантовые мосты. – М.: Транспорт, 1986. 224с.
3. Дмитриев Ф.Д. Крушения инженерных сооружений. Стройиздат, М., 1953. –188с
4. Potapov V. D. Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. Wiley, Chichester, 1999. 276 p.
5. Потапов В.Д. Устойчивость упругих и вязкоупругих систем при стохастическом параметрическом возбуждении// Изв. РАН, МТТ, 2005, № 3. – С. 123 – 136.
6. Benettin G., Galgani L., Giorgolly A., and Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a Method for Computing All of Them. P. 1, 2// Meccanica, 1980, Vol. 15. – P. 9–20, 21–30.
7. Венцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
8. Еврокод 1 EN 1991-1-4:2005, IDT.

## STABILITY OF LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS

Nabatov I.V.

In this paper the problem of modeling the movement of the linear system under the influence of determined and stochastic parametric load had been studied by the example of cable-stayed girder. The aerodynamic stability of similar systems had been analyzed. There are two cases compared when pulsation wind component is Gauss random stationary process with a spectral density of Davenport, and spectral density of Kaimal.

KEYWORDS: aerodynamic stability, linear system, stochastic parametric load, stationary process.