РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОСЕВОМ НАГРУЖЕНИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО БРУСА

Н.Т. ВАСИЛЬКОВА, *аспирант*
М.Е. БАШКАТОВА, *канд. техн. наук*
Е.А. ЛАРИОНОВ, *д-р техн. наук, профессор*
Московская госуд. академия коммунального хозяйства и строительства, 109029, Москва, Ср. Калитниковская ул., д. 30

Определяется распределение нормальных напряжений в бетоне и арматуре, порожденное осевой переменной силой с учётом ползучести и структурных повреждений бетона. Решение соответствующей релаксационной задачи основано на квазилинейном реологическом уравнении.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бетон, деформации, ползучесть, напряжение.

При расчёте сооружений существенное значение имеет определение напряжённого состояния железобетонных элементов изменяющегося вследствие ползучести бетона и арматуры. Это обстоятельство приводит к необходимости решения релаксационной задачи для бетона и учёту перераспределения напряжений с бетона на арматуру.

В данной работе рассматривается железобетонный брус с площадью нормального сечения $A = A_b + A_s$; (A_b – площадь сечения его бетонной компоненты; A_s – площадь сечения арматуры), а задача заключается в определении нормальных напряжений $\sigma_b(t)$ и $\sigma_s(t)$, порождённых осевым усилием $N(t)$, приложенным в центре тяжести приведённого сечения в момент $\tau = t_0$; τ – текущее время; t – момент наблюдения.

1. Реологические уравнения состояния материалов вместе с условиями совместности деформаций и равновесия приводят к системе уравнений [1]

$$\varepsilon_b(t,t_0) = S_b^0(t,t_0)\sigma_b(t)\left[\frac{1}{E_b(t)} + C_b^*(t,t) - \int_{t_0}^{t} \frac{\sigma_b(\tau)}{\sigma_b(t)} \frac{\partial C_b^*(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau\right], \tag{1}$$

$$\varepsilon_s(t,t_0) = S_s^0(t,t_0)\sigma_s(t)\left[\frac{1}{E_s(t)} + C_s^*(t,t) - \int_{t_0}^{t} \frac{\sigma_s(\tau)}{\sigma_s(t)} \frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau\right], \tag{2}$$

$$\varepsilon_b(t,t_0) = \varepsilon_s(t,t_0), \tag{3}$$

$$A_b\sigma_b(t) + A_s\sigma_s(t) = N(t). \tag{4}$$

Здесь для соответствующих компонент $S_b^0(t,t_0)$ и $S_s^0(t,t_0)$ – функции нелинейности напряжений; $E_b(t)$ и $E_s(t)$ – модули мгновенных упругих деформаций; $C_b^*(t,\tau)$ и $C_s^*(t,\tau)$ – меры простой ползучести в момент t при текущем нагружении. Величины в квадратных скобках в (1) и (2) представляют временные модули $E_b(t,t_0)$ и $E_s(t,t_0)$ $\varepsilon_b(t,t_0)$ и $\varepsilon_s(t,t_0)$. Согласно (1) и (2):

$$\varepsilon_b(t,t_0) = \frac{S_b^0(t,t_0)\sigma_b(t_0)}{E_b(t,t_0)}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_s(t,t_0) = \frac{S_s^0(t,t_0)\sigma_s(t)}{E_s(t,t_0)}. \tag{6}$$

2. Физической причиной нелинейной зависимости деформаций и напряжений является статистическое распределение прочностей элементарных со-

ставляющих (волокон, слоёв, звеньев), образующих в совокупности соответствующую компоненту бруса.

Разрушение части элементарных составляющих при возрастающем на промежутке $[t_0, t]$ усилии $N(t)$ влечёт уменьшение способных к силовому сопротивлению площадей $A_b(\tau)$ и $A_s(\tau)$.

Величины $$\sigma_b(\tau) = \frac{N_b(\tau)}{A_b}; \qquad \sigma_s(\tau) = \frac{N_s(\tau)}{A_s} \tag{7}$$

представляют расчётные, а $$\sigma_{bc}(\tau) = \frac{N_b(\tau)}{A_b(\tau)}; \qquad \sigma_{sc}(\tau) = \frac{N_s(\tau)}{A_s(\tau)} \tag{8}$$

структурные (истинные) нормальные напряжения. В формулах (7) и (8) $N_b(\tau)$ и $N_s(\tau)$– текущие усилия в нормальных сечениях компонент бруса.

При структурных повреждениях материалов бруса частичные приращения деформаций зависят от момента приложения, длительности и режима всех остальных приращений нормального усилия, а потому [1]

$$\Delta\varepsilon_b(t, \tau_i) = \frac{S_b^0(t, t_0)\Delta\sigma_b(\tau_i)}{E_b(t, \tau_i)} = \frac{\Delta\sigma_{bc}(\tau_i)}{E_b(t, \tau_i)}, \tag{9}$$

$$\Delta\varepsilon_s(t, \tau_i) = \frac{S_s^0(t, t_0)\Delta\sigma_s(\tau_i)}{E_s(t, \tau_i)} = \frac{\Delta\sigma_{sc}(\tau_i)}{E_s(t, \tau_i)}. \tag{10}$$

Согласно формулам (7) – (10) имеем

$$S_b^0(t, t_0) = \frac{A_b(t_0)}{A_b(t)}; \quad S_s^0(t, t_0) = \frac{A_s(t_0)}{A_s(t)}. \tag{11}$$

Переходя в (9) и (10) к дифференциалам напряжений, от соответствующих сумм приращений деформаций к интегралам, а затем, интегрируя их по частям и, учитывая начальное напряжённо-деформированное состояние, получим [1] уравнения (1) и (2).

3. Разрешая (1) или (2) относительно $\sigma(t)$, получим значения

$$\sigma(t) = \hat{\sigma}(t) + \lambda(t)\int_{t_0}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial C_b^*(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{12}$$

$$\hat{\sigma}(t) = \widetilde{S}^0(t, t_0)\cdot\frac{E(t)\cdot\varepsilon(t, t_0)}{1 + E(t)C^*(t, t)}, \tag{13}$$

$$\lambda(t) = \frac{E(t)}{1 + E(t)C^*(t, t)}. \tag{14}$$

Здесь $\lambda(t)$ представляет модуль мгновенных упруго-пластических деформаций $\hat{\sigma}(t)$, а $\widetilde{S}^0(t, t_0) = 1/S^0(t, t_0)$ – функцию нелинейности деформаций.

Поскольку $$\sigma(t) = E(t, t_0)\cdot\widetilde{S}^0(t, t_0)\varepsilon(t, t_0), \tag{15}$$

функция $\widetilde{S}^0(t, t_0)$ выделяет из $\varepsilon(t, t_0)$ её линейную часть

$$\varepsilon_л(t, t_0) = \widetilde{S}^0(t, t_0)\varepsilon(t, t_0). \tag{16}$$

В линейной постановке задачи $S^0(t, t_0) = \widetilde{S}^0(t, t_0) = 1$ и $\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_л(t, t_0)$.

Величины $A(t_0)$ и $A(t)$ являются функциями от уровней $S(\tau) = \sigma(\tau)/R(\tau)$ и $\eta(\tau, t_0) = \varepsilon(\tau, t_0)/\varepsilon(\tau)$ напряжений и деформаций, а потому

$$S^0(t,t_0)=S^0[s(t)]; \qquad \widetilde{S}^0(t,t_0)=\widetilde{S}^0[\eta(t,t_0)]. \tag{17}$$

В работах [2] – [4] для бетона использованы функции

$$\widetilde{S}^0(t,t_0)=e^{-\varepsilon(t,t_0)/\varepsilon_R(t)}, \quad (18) \qquad \widetilde{S}^0(t,t_0)=e^{-\frac{1}{m}[\varepsilon(t,t_0)/\varepsilon_R(t)]^m}, \tag{19}$$

$$\widetilde{S}^0(t,t_0)=\sum_{i=1}^{n} a_i\left[\frac{\varepsilon(t,t_0)}{\varepsilon_R(t)}\right]^i. \tag{20}$$

Таким образом, при известных $\varepsilon(t,t_0)$ и $\widetilde{S}^0[\eta(t,t_0)]$ напряжения $\sigma_b(t)$ и $\sigma_s(t)$ определяются решением линейного интегрального уравнения (12) с соответствующими коэффициентами $\hat{\sigma}(t)$, $\lambda(t)$ и $C^*(t,\tau)$, а в случае $E(t)=const$ и $C^*(t,\tau)=C_0^*\left[1-\beta e^{-\gamma(t-\tau)}\right]$ – решением линейного дифференциального уравнения.

4. Если величины $\varepsilon(t,t_0)$ и $\widetilde{S}^0[\eta(t,t_0)]$ неизвестны, то нахождение $\sigma_b(t)$ и $\sigma_s(t)$ требует решения системы (1) – (4). Сначала необходимо получить её решение в линейной постановке. Согласно условию (4) равновесия сил

$$\sigma_s(t)=\frac{N(\tau)-A_b\sigma_b(\tau)}{A_s} \tag{21}$$

и поскольку $\varepsilon_s(t,t_0)=\sigma_s(t)/E_s(t,t_0)$, то

$$\varepsilon_s(t,t_0)=\frac{N(t)-A_b\sigma_b(t)}{A_sE_s(t)}\left[1+E_s(t)C_s^*(t,t)-E_s(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma_s(\tau)}{\sigma_s(t)}\frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right], \tag{22}$$

$$\varepsilon_s(t,t_0)=\frac{N(t)-A_b\sigma_b(t)}{A_sE_s(t)}\left[1+E_s(t)C_s^*(t,t)\right]-\frac{1}{A_s}\int_{t_0}^{t}\left[N(\tau)-A_b\sigma_b(\tau)\right]\frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{23}$$

$$\varepsilon_s(t,t_0)=a(t)-b(t)\sigma_b(t)-c(t)+\frac{A_b}{A_s}\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau)\frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{24}$$

$$a(t)=\frac{N(t)\left[1+E_s(t)C_s^*(t,t)\right]}{A_sE_s(t)}; \quad b(t)=\frac{A_b\left[1+E_s(t)C_s^*(t,t)\right]}{A_sE_s(t)}; \quad c(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{N(\tau)}{A_s}\frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{25}$$

В силу условия (3) совместности деформаций

$$a(t)-b(t)\sigma_b(t)-c(t)+\frac{A_b}{A_s}\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau)\frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\sigma_b(t)\frac{\left[1+E_b(t)C_b^*(t,t)\right]}{E_b(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma_b(t)\frac{\partial C_b^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{26}$$

$$\sigma_b(t)\cdot\left[1+E_b(t)C_b^*(t,t)+b(t)E_b(t)\right]=\left[a(t)-c(t)\right]E_b(t)+E(t)\int_{t_0}^{t}\sigma_b(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[C_b^*(t,\tau)+\frac{A_b}{A_s}C_s^*(t,\tau)\right]d\tau, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sigma_b(t)\cdot\left(\frac{\varphi_s(t)+m\mu\varphi_b(t)}{m\mu}\right)&=\frac{N(t)\cdot\varphi_s(t)}{A_s\cdot m}-E_b(t)\int_{t_0}^{t}\frac{N(\tau)}{A_s}\frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\\&+E_b(t)\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[C_b^*(t,\tau)+\frac{1}{\mu}C_s^*(t,\tau)\right]d\tau,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\mu=\frac{A_s}{A_b}; \quad m=\frac{E_s}{E_b}; \quad \varphi_b(t)=1+E_b(t)C_b^*(t,t); \quad \varphi_s(t)=1+E_s(t)C_s^*(t,t), \tag{29}$$

$$\sigma_b(t)=\frac{N(t)\cdot\varphi_s(t)}{A_b\left[\varphi_s(t)+\varphi_b(t)m\mu\right]}-\frac{E_s(t)}{A_b\left[\varphi_s(t)+\varphi_b(t)m\mu\right]}\int_{t_0}^{t}N(\tau)\frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+$$
$$+\frac{\mu E_s(t)}{\varphi_s+\varphi_b(t)m\mu}\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[C_b^*(t,\tau)+\frac{1}{\mu}C_s^*(t,\tau)\right]d\tau. \tag{30}$$

Величина $$\hat{\sigma}_b(t)=\frac{1}{A_b\left[\varphi_s(t)+\varphi_b(t)m\mu\right]}\left[N(t)\varphi_s(t)-E_s(t)\int_{t_0}^{t}N(\tau)\frac{\partial C_s^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right] \tag{31}$$

представляет мгновенное упруго-пластическое напряжение.

Пренебрегая ползучестью арматуры, получим

$$\hat{\sigma}_b(t)=\frac{N(t)}{A_b\left[1+\varphi_b(t)m\mu\right]}. \tag{32}$$

В некоторых работах, например, в [5] полагают $\varphi_b(t)=1$, что равносильно $C_b^*(t,t)=0$, то есть пренебрежению кратковременной ползучестью бетона, влекущему значительные погрешности в расчётах.

В физическом аспекте предположения $C_s^*(t,\tau)=0$ и $C_b^*(t,t)=0$ означает, что величина $\hat{\sigma}_b(t)$ представляет мгновенное упругое напряжение.

Согласно формуле (30)

$$\sigma_b(t)=\hat{\sigma}_b(t)+\lambda(t)\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\left[C_b^*(t,\tau)+\frac{1}{\mu}C_s^*(t,\tau)\right]d\tau, \tag{33}$$

$$\lambda(t)=\frac{E_s(t)\mu}{\varphi_s(t)+\varphi_b(t)m\mu}. \tag{34}$$

Решение линейного интегрального уравнения (33) при заданных механических характеристиках $E_b(t)$, $E_s(t)$, $C_b^*(t,\tau)$, $C_s^*(t,\tau)$ реализуется методом последовательных приближений при $\sigma_b^0(t)=\hat{\sigma}_b(t)$.

5. В приложениях полагают $E_b(t)=E_b$; $E_s(t)=E_s$; $C_b^*(t,\tau)=C_b^*\left[1-\beta_b e^{-\gamma_b(t-\tau)}\right]$; $C_s^*(t,\tau)=C_s^*\left[1-\beta_s e^{-\gamma_s(t-\tau)}\right]$; β_b, β_s, γ_b, γ_s, C_b^*, C_s^* – эмпирические параметры.

В таком случае $\sigma_b(t)=\alpha N(t)+\beta\int_0^t N(\tau)e^{-\gamma_s(t-\tau)}d\tau$,

$$\alpha=\frac{1+E_sC_s^*(1-\beta_s)}{A_b\left[1+E_sC_s^*(1-\beta_s)+\left[1+E_bC_b^*(1-\beta_b)\right]m\mu\right]};$$
$$\beta=\frac{\beta_s\gamma_sE_sC_s^*}{A_b\left[1+E_sC_s^*(1-\beta_s)+\left[1+E_bC_b^*(1-\beta_b)\right]m\mu\right]}; \tag{34}$$

$$\lambda=\frac{\mu E_s}{1+E_sC_s^*(1-\beta_s)+\left[1+E_bC_b^*(1-\beta_b)\right]m\mu}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[C_b^*\left[1-\beta_be^{-\gamma_b(t-\tau)}\right]+\frac{1}{\mu}C_s^*\left[1-\beta_se^{-\gamma_s(t-\tau)}\right]\right]=C_b^*\beta_b\gamma_be^{-\gamma_b(t-\tau)}-\frac{C_s^*\beta_s\gamma_se^{-\gamma_s(t-\tau)}}{\mu}, \tag{36}$$

$$\sigma_b(t)=\alpha N(t)+\beta e^{-\gamma_st}\cdot\int_0^t N(t)e^{-\gamma_s\tau}d\tau-\lambda\left[C_b^*\beta_b\left(1-e^{-\gamma_bt}\right)+\frac{C_s^*\beta_s}{\mu}\left(1-e^{-\gamma_st}\right)\right]. \tag{37}$$

В частности при $N(t)=N$ получим

$\beta e^{-\gamma_s t}\int\limits_0^t Ne^{\gamma_s \tau}d\tau=\dfrac{\beta N}{\gamma_s}\left(1-e^{-\gamma_s t}\right)$ и поскольку $\dfrac{\beta}{\gamma_s}=\dfrac{\lambda C_s^*\beta_s}{\mu}$, то согласно (37)

$$\sigma_b(t)=N\cdot\alpha-\lambda C_b^*\beta_b\left(1-e^{-\gamma_b t}\right). \tag{38}$$

Релаксация напряжения $\sigma_b(t_0)=N\alpha$ в бетонной компоненте задаётся величиной $\lambda C_b^*\beta_b\left(1-e^{-\gamma_b t}\right)$ и для достаточно больших t оценкой напряжения в арматуре является величина

$$\sigma_s(t)=N(1-\alpha)+\lambda C_b^*\beta_b. \tag{39}$$

6. Ключевым моментом решения релаксации напряжений в бетонной компоненте, позволяющей установить динамику перераспределения напряжений $\sigma_b(t)$ и $\sigma_s(t)$ являются реологические уравнения (1) и (2).

Физическая основа вывода квазилинейного реологического уравнения заключается в сопоставлении реальному элементу конструкции идеального элемента, образованного объединением его равнопрочных составляющих и с идентичной геометрией и деформациями [1].

Равнопрочность означает, что все составляющие сохраняют способность к силовому сопротивлению вплоть до разрушения.

При одноосном силовом деформировании все составляющие идеального элемента разрушаются одновременно, а это исключает происходящее в реальном элементе перераспределения усилия $N(\tau)$ на его целые в текущий момент τ составляющие.

7. В реальной (нелинейной) постановке рассматривается реологическое уравнение

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S^0[s(t)]\sigma(t)}{E(t,t_0)}=\frac{\sigma_c(t)}{E(t,t_0)}, \tag{40}$$

порождающее для структурного напряжения $\sigma_c(t)$ линейное интегральное уравнение

$$\sigma_c(t)=\hat{\sigma}_c(t)++\lambda(t)\int\limits_{t_0}^t\sigma_c(t)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{41}$$

После определения $\sigma_{bc}(t)$ (аналогично $\sigma_b(t)$ в п. 4) искомое напряжение $\sigma_b(t)$ находится решением уравнения

$$S_b^0\left[\frac{\sigma(t)}{R(t)}\right]\cdot\sigma(t)=\sigma_c(t). \tag{42}$$

В расчётах приемлемы функции

$$S_b^0\left[\frac{\sigma(t)}{R(t)}\right]=1+V\cdot[\sigma(t)]^m, \tag{43}$$

для бетона обычно принимают $m = 4$ и согласно (42)

$$V\cdot[\sigma(t)]^5+\sigma_b(t)-\sigma_{bc}(t)=0. \tag{44}$$

Уравнение (44) решается стандартным итерационным способом.

8. Функция $S^0[s(\tau)]=A(t_0)/A(\tau)$ является неубывающей и, поскольку в процессе разгружения разрушенная часть сечения не восстанавливается, то для всех $t_p\le\tau\le t$ имеем $S^0[s(\tau)]=S^0[s(t_p)]=A(t_0)/A(t_p)$, (45)

где t_p - момент начала разгружения. Согласно (45) на промежутке $\lfloor t_p, t \rfloor$

$$\varepsilon(\tau, t_0) = \frac{S^0\left[s(t_\rho)\cdot\sigma(\tau)\right]}{E(\tau, t_0)}. \tag{46}$$

При невозрастающем и, в частности, постоянном нормальном усилии N напряжение $\sigma_b(\tau)$ уменьшается, а потому $t_p = t_0$ и

$$\varepsilon_b(t, t_0) = \frac{S_b^0\left[s(t_0)\right]\cdot\sigma_b(t)}{E_b(t, t_0)}. \tag{47}$$

Поскольку
$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{N(t_0)}{A_b E_b(t_0, t_0) + A_s E_s(t_0, t_0)}, \tag{48}$$

$$S_b^0\left[s(t_0)\right] = \frac{1}{\widetilde{S}_b^0\left[\varepsilon(t_0, t_0)/\varepsilon_R(t_0)\right]}, \tag{49}$$

то согласно (42), (47) и (49):
$$\sigma(t) = \widetilde{S}^0\left[\frac{\varepsilon(t_0, t_0)}{\varepsilon_R(t_0)}\right]\cdot\sigma_c(t). \tag{50}$$

В работе [6] предложен поиск функций $\sigma_b(\tau)$ и $\sigma_s(\tau)$ в виде

$$\sigma_b(\tau) = \sum_{i=0}^{n} a_{k,i}\tau^i;\ \sigma_s(\tau) = \sum_{i=0}^{n} b_{k,i}\tau^i. \tag{51}$$

Коэффициенты $a_{k,i}$ и $b_{k,i}$ определяются решением систем уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} a_{k,i}t_j^i = \sigma_{b,k}(t_j);\ \sum_{i=0}^{n} b_{k,i}t_j^i = \sigma_{s,k}(t_j);\ \mathrm{j} = 0,1,\ldots,n, \tag{52}$$

где $\sigma_{b,k}(t_j)$ и $\sigma_{s,k}(t_j)$ величины напряжений в момент $\tau = t_j$ при k-ом приближении. Эти величины по механическим характеристикам и $N(t_j)$ находятся модификацией соответствующего подхода из [2].

Литература

1. *Бондаренко В.М., Ларионов Е.А.* Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях элементов конструкций// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 2. – С. 16-22.

2. *Бондаренко В.М., Бондаренко С.В.* Инженерные методы нелинейной теории железобетона. – М.: Стройиздат, 1982.

3. *Маилян Д.Р.* Влияние армирования и эксцентриситета сжимающего усилия на деформативность бетона и характер диаграммы сжатия// Сб.: «Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона». – Ростов-на-Дону, 1979. – С. 70-82.

4. *Бамбура А.Н.* Диаграмма «напряжения – деформации» для бетона при центральном сжатии// Сб. «Вопросы, прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона». – Ростов-на-Дону: РИСИ, 1980. – С. 19-22.

5. *Галустов К.З.* Нелинейная теория ползучести бетона и расчёт железобетонных конструкций. – М.: Физматлит, 2006.

6. *Аванесов М.П., Бондаренко В.М., Римшин В.И.* Теория силового сопротивления железобетона. – РААСН, Барнаул, 1996.

STRESS RELAXATION OF REINFORCED CONCRETE BEAM UNDER AXIAL LOAD

N.T. Vasilkova, M.E. Bashcatova, E.A. Larionov

The normal stress distribution due to the axis variable force is determined in the concrete and in reinforcement. The creep and structural damages are accounted. The solution the corresponding relaxation problem is based on the quasi-linear rheological state equation.

KEY WORDS: concrete, beam, deformation, stress, relaxation.