

Теория упругости

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА

Д.Н. НИЗОМОВ*, *д-р техн. наук, профессор,*
А.А. ХОДЖИБОЕВ**, *канд. техн. наук,*
О.А. ХОДЖИБОЕВ*, *инж.*

**Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Академии наук Республики Таджикистан*

734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 267, ties@mail.ru

***Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими*

734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект академиков Раджабовых, 10, hojiboev@mail.ru

В статье излагается решение задачи о концентрации напряжений на контурах отверстий в анизотропной среде на основе метода граничных интегральных уравнений при различных воздействиях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: анизотропия, ортотропная пластина, изотропная пластина, трещина, численное решение, плоская задача, отверстие, подземные сооружения, массив горных пород, бесконечная область.

Вопрос о распределении напряжений в плоском анизотропном поле конечной или бесконечной области, ослабленном отверстием, и о концентрации напряжений около отверстий представляет практический интерес. Строительство подземных сооружений связано с нарушением естественного состояния горных пород и развитием механических процессов в породных массивах. Изучение напряженного и деформированного состояний в зоне концентрации относится к числу наиболее сложных задач теории упругости, пластичности и ползучести.

Важной особенностью явления концентрации состоит в том, что одновременно с резким повышением напряжений вблизи концентратора даже при исходном одноосном состоянии возникает сложное неоднородное напряженное состояние, непосредственно влияющие на развитие пластических деформаций или трещин разрушения. Несущая способность основных элементов многих конструкций обычно определяется напряженным состоянием и условиями прочности в местах концентрации, ибо именно там, прежде всего, наступает предельное состояние и разрушение.

В статье излагается решение задачи о концентрации напряжений в анизотропной среде на основе метода граничных интегральных уравнений.

Исследования напряженного состояния анизотропной пластинки, ослабленной круговым и эллиптическим отверстием, осуществлено С.Г. Лехницким [3, 5]. Им изложены основы решения плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Полученное впервые С.Г. Лехницким [4] основное уравнение плоской задачи теории упругости, которому должны удовлетворять функция напряжений $\Phi(x, y)$, представляется в виде

$$a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0, \quad (1)$$

где a_{ij} – упругие постоянные.

В случае обобщенного плоского напряженного состояния средние значения компонентов деформации по толщине пластинки записываются в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \quad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}.\end{aligned}\quad (2)$$

Средние значения компонентов деформации ε_x , ε_y и τ_{xy} будут функциями только x, y и удовлетворяют уравнениям совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.\quad (3)$$

Решение задачи значительно упрощается в случае отсутствия объемных сил. Уравнения равновесия без учета объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,\quad (4)$$

можно удовлетворить, как и в случае изотропной среды, если ввести функцию напряжений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.\quad (5)$$

Внося (2) в (3), с учетом (5), получим уравнения (1). Если анизотропный материал имеет три плоскости симметрии (ортотропная пластинка), где $a_{16} = a_{26} = 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0.\quad (6)$$

Частное решение линейного однородного дифференциального уравнения (1) ищем в виде

$$\Phi(x, y) = e^{x+\mu y},\quad (7)$$

где μ – действительное или комплексное число, подлежащее определению. Подставляя (7) в (6), получаем характеристическое уравнение

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0.\quad (8)$$

Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 4-го порядка (1) зависит от вида корней его характеристического уравнения (8).

Вопросы существования и единственности решения плоской задачи для анизотропного тела достаточно подробно изучены в работах С.Г. Михлина [6], Г.Н. Савина [7], Д.И. Шермана [8]. Как показано в [3], корни уравнения (8) всякого идеального упругого тела могут быть либо комплексными, либо чисто-мнимыми. Эти числа $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ являются комплексными параметрами плоского напряженного состояния. В зависимости от соотношения между упругими постоянными, возможны два случая:

1) комплексные параметры все различны:

$$\mu_1 = \alpha + \beta \cdot i, \quad \mu_2 = \gamma + \delta \cdot i, \quad \bar{\mu}_1 = \alpha - \beta \cdot i, \quad \bar{\mu}_2 = \gamma - \delta \cdot i, \quad \beta > 0, \quad \delta > 0.$$

$\alpha, \beta, \delta, \gamma$ – вещественные числа;

2) комплексные параметры попарно равны:

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha + \beta \cdot i, \quad \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \alpha - \beta \cdot i, \quad \beta > 0.$$

Например, в случае изотропной пластинки уравнение (8) приобретает вид

$$\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = 0,$$

откуда следует, что $\mu_1 = \mu_2 = i$; $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = -i$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

В случае ортотропной пластинки, полагая $\gamma = i\mu$, из (8) получим

$$a_{11}\gamma^4 - (2a_{12} + a_{66})\gamma^2 + a_{22} = 0, \quad (9)$$

где корни

$$\gamma_{1,2} = \sqrt{2a_{12} + a_{66} \pm \sqrt{(2a_{12} + a_{66})^2 - 4a_{11}a_{22}}} / \sqrt{2a_{11}}, \quad (10)$$

являются единственными положительными числами. Для ортотропной пластинки корни (10) связаны с упругими постоянными следующим образом:

$$\gamma_1\gamma_2 = \sqrt{E_2 / E_1}; \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{2a_{12} + a_{66}}{a_{22}}.$$

Алгоритм численного решения плоской задачи теории упругости строится на основе фундаментальных решений [1], [9]

$$\begin{aligned} U_{xx}^* &= K_a(\gamma_1 A_2^2 \ln \bar{r}_1 - \gamma_2 A_1^2 \ln \bar{r}_2), \quad U_{xy}^* = U_{yx}^* = -K_a A_1 A_2 (\theta_1 - \theta_2), \\ U_{yy}^* &= -K_a[(1/\gamma_1)A_1^2 \ln \bar{r}_1 - (1/\gamma_2)A_2^2 \ln \bar{r}_2], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} K_a &= 1/[2\pi(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)a_{22}], \quad A_i = a_{12} - \gamma_i^2 a_{22}, \\ \bar{r}_i &= \sqrt{x^2 + y^2} / \gamma_i^2, \quad \theta_i = \arctg[y / (x\gamma_i)], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Фундаментальные компоненты напряжений можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_{xx}^* &= \sigma_{xx}^* n_1 + \tau_{yx,x}^* n_2 = K_a \left(\frac{A_1}{\gamma_2 \bar{r}_2^2} - \frac{A_2}{\gamma_1 \bar{r}_1^2} \right) (x n_1 + y n_2), \\ P_{xy}^* &= \sigma_{xy}^* n_1 + \tau_{yx,y}^* n_2 = K_a \left(M_1 \frac{A_2}{\bar{r}_1^2} - M_2 \frac{A_1}{\bar{r}_2^2} \right), \\ P_{yx}^* &= \sigma_{yx}^* n_2 + \tau_{xy,x}^* n_1 = K_a \left(M_1 \frac{A_1}{\gamma_1^2 \bar{r}_1^2} - M_2 \frac{A_2}{\gamma_2^2 \bar{r}_2^2} \right), \\ P_{yy}^* &= \sigma_{yy}^* n_2 + \tau_{xy,y}^* n_1 = K_a \left(\frac{A_1}{\gamma_1 \bar{r}_1^2} - \frac{A_2}{\gamma_2 \bar{r}_2^2} \right) (x n_1 + y n_2), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(n, x), \quad n_2 = \cos(n, y) - \text{направляющие косинусы}, \\ M_i &= \gamma_i x n_2 - (1/\gamma_i) y n_1, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Пусть задана область Ω с контуром S , где действуют поверхностные силы P_x и P_y . Погружая область Ω с границей S в неограниченное пространство, на основе теоремы Бетти, без учета объемных сил, получим

$$\begin{aligned} \int_S (P_x U_{xx}^* + P_y U_{yx}^*) ds &= \int_S (P_{xx}^* U_x + P_{yx}^* U_y) ds + e_x u_x, \\ \int_S (P_x U_{xy}^* + P_y U_{yy}^*) ds &= \int_S (P_{xy}^* U_x + P_{yy}^* U_y) ds + e_y u_y, \end{aligned} \quad (13)$$

где U_{ij}^* и P_{ij}^* – фундаментальные перемещения и напряжения, соответствующие (11) и (12), e_x, e_y – единичные силы.

В случае первой основной задачи, когда на поверхности тела заданы напряжения из (13) путем предельного перехода, получаем граничные интегральные уравнения для бесконечной области с отверстием, которые можно представить в тензорной форме

$$C_{ij}^* U_j + \int_S P_{ij}^* U_j ds = \int_S U_{ij}^* P_j ds, \quad (14)$$

где $C_{ij}^* U_j + \int_S P_{ij}^* U_j ds = \int_S U_{ij}^* P_j ds$, $C_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} P_{ij}^* ds$, $(i, j = x, y)$,

δ_{ij} – символ Кронекера.

Численную реализацию предлагаемого алгоритма рассмотрим на примерах плоского напряженного состояния бесконечной анизотропной пластинки с отверстием. Особенность алгоритма заключается в том, что в систему разрешающих уравнений входят только неизвестные перемещения на контуре отверстия, а также он позволяет рассматривать отверстие произвольного очертания.

Таблица 1. Нормальные перемещения и тангенциальные напряжения в точках A и B на контуре отверстия

Схема загрузки	$U_{n,A} \cdot 10^4$, см	$U_{n,B} \cdot 10^4$, см	$\sigma_{S,A} / P$	$\sigma_{S,B} / P$
1	-0.3656	0.1063	-0.6799	5.476
	-0.1648	0.06027	-0.9793	2.984
2	-0.1050	-0.5183	-1.324	4.143
	-0.06027	-0.1648	2.984	-0.9793
3	-0.2606	-0.4120	2.463	3.152
	-0.1045	-0.1045	1.006	1.005

Таблица 2. Результаты аналитического решения

Схема загрузки	$\sigma_{S,A} / P$	$\sigma_{S,B} / P$	a_{11} / a_{22}
1	-0.7071	5.453	0.5
2	-1.41	4.15	
3	2.439	3.038	

Таблица 3. Сравнение результатов

Метод	$\sigma_{S,A} / P$	$\sigma_{S,B} / P$	a_{11} / a_{22}
[2]	-5.14	2.04	26.3
МГУ	-4.965	2.03	

В табл.1 приведены результаты численного решения задачи плоского напряженного состояния ортотропной бесконечной пластинки, с круговым отверстием при различных схемах загрузки (рис. 1): 1-растяжение пластинки усилиями $P = 1\hat{e}\hat{a} / \hat{m}^2$, параллельными главному направлению x ; 2- растяжении пластинки перпендикулярно к волокнам рубашки при $P = 1\hat{e}\hat{a} / \hat{m}^2$; 3- нормальное давление $P = 1\hat{e}\hat{a} / \hat{m}^2$. Численные результаты получены при разбивке четверти окружности на 16 постоянных элементов, где $E_1 = 1.2 \cdot 10^5$, $E_2 = 0.6 \cdot 10^5$, $G_{12} = 0.07 \cdot 10^5 \hat{e}\hat{a} / \hat{m}^2$, $\nu_{12} = 0.071$ [5]. В знаменателе приводятся

результаты расчета изотропной пластинки при $E = 1.2 \cdot 10^5 \text{ ед} / \text{м}^2$, $\nu = 0.25$. Результаты аналитического решения [5] для тангенциального напряжения в точках A и B приведены в табл.2.

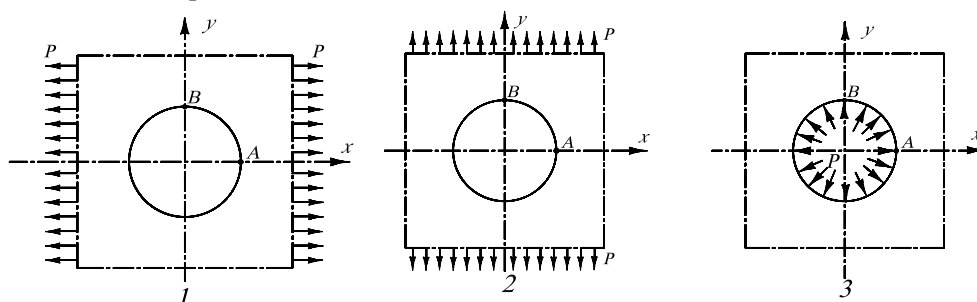


Рис. 1. Схемы загрузки

Из сравнения результатов σ_S табл.1 и 2 следует, что при разбивке четверти окружности на 16 элементов имеем хорошее совпадение с аналитическим решением. В табл.3 сравниваются результаты численного решения задачи о растяжении на бесконечности неограниченной упругой ортотропной пластины с круговым отверстием [8], где принято

$$a_{11} = 15.5 \cdot 10^{-4} (\text{ед} / \text{а})^{-1}, \quad a_{22} = 0.587 \cdot 10^{-4} (\text{ед} / \text{а})^{-1}, \quad a_{12} = -0.33 \cdot 10^{-4} (\text{ед} / \text{а})^{-1}, \\ a_{66} = 11.5 \cdot 10^{-4} (\text{ед} / \text{а})^{-1}.$$

На основе изложенного можно сделать вывод, что численное решение задачи концентрации напряжений в анизотропном теле методом граничных уравнений дает результаты, удовлетворительно совпадающие с известными аналитическими и численными решениями.

Л и т е р а т у р а

1. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Изд-во «Мир», 1987. – 524 с.
2. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных уравнений механики твердого тела. – М.: Изд-во «Мир», 1987. – 328 с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М. -Л.: ОГИЗ, 1947. – 355 с.
4. Лехницкий С.Г. Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела// Прикл. мат. и мех., 1937, №1.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М. -Л.: Гостехиздат, 1950. – 299 с.
6. Михлин С.Г. Плоская деформация в анизотропной среде// Тр. Сейсмологического института АН СССР, №76, 1936. – С. 1-19.
7. Савин Г.Н. Основная плоская статическая задача теории упругости для анизотропной среды// Тр. института строительной механики АН УССР, №32, 1938. – С. 1-55.
8. Шерман Д.И. Плоская задача теории упругости для анизотропной среды// Тр. Сейсмологического института АН СССР, №86, 1938. – С. 51-78.
9. Tomlin G.R. Numerical analysis of continuum problems of zoned anisotropic media, Ph.D. Thesis, Southampton University, 1972.

NUMERICAL SOLUTION OF THE FLAT PROBLEM OF ELASTICITY THEORY WITH TAKING INTO ACCOUNT THE ANISOTROPY OF MATERIALS

J.N. Nizomov, A.A. Hojiboev, O.A. Hojiboev

Solving a problem of stress concentration around the contour of holes under different loads in anisotropic medium based on boundary integral approach is presented in this paper.

KEY WORDS: anisotropy, orthotropic plate, isotropic plate, crack, numerical solution, plane problem, hole, underground structures, infinite domain.