

## Численные методы расчета конструкций

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ ТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ В РАСЧЕТАХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.П. АГАПОВ, *д-р техн. наук, профессор*

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,*

*Ярославское шоссе, 26, Москва, Россия, 129337; E-mail: agapovpb@mail.ru*

*Описывается методика конечно-элементного моделирования стержней таврового сечения, основанная на использовании трехмерной теории и суперэлементной технологии. Дается краткая сводка расчетных формул и приводится описание алгоритма, реализованного в программе ПРИНС. Рассматривается тестовая задача. Результаты расчета, полученные по программе ПРИНС, сравниваются с аналитическим решением.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** строительные конструкции, стержневые системы, метод конечных элементов, суперэлементы, программные комплексы

В связи с внедрением в расчетную практику электронных вычислительных машин, развитием вычислительных комплексов для обеспечения прочностных расчетов и стремлением проектировщиков и расчетчиков использовать более адекватные расчетные схемы меняются подходы к моделированию сооружений и выбору расчетных методик. В частности, для анализа напряженно-деформированного состояния стержней все чаще используется трехмерная теория [1, 2]. Большинство широко распространенных конечно-элементных программ (NASTRAN [3], ANSYS [4], ABAQUS [5] и др.) позволяют представлять стержни как совокупность объемных элементов, однако непосредственное моделирование стержней трехмерными элементами приводит к резкому возрастанию размерности задачи. Автором предложена и реализована в вычислительном комплексе ПРИНС [6, 7] суперэлементная методика моделирования стержней прямоугольного сечения, которая позволяет при использовании трехмерной теории приводить характеристики стержней к узлам, лежащим в их торцевых сечениях. Благодаря такому подходу удалось избежать противоречий, присущих одномерной теории изгиба и кручения стержней некруглого поперечного сечения и создавать более точные расчетные модели стержней и стержневых систем при незначительном увеличении числа степеней свободы конструкции.

В данной статье предложенная ранее методика суперэлементного моделирования стержней распространяется на стержни таврового сечения. Сущность методики заключается в следующем.

Для стержня таврового сечения формируется конечно-элементная схема, как показано на рис. 1. В вычислительном комплексе ПРИНС этот процесс автоматизирован с помощью интерактивного графического пре-процессора. При этом исходные данные вводятся только для тех узлов стержня, которые лежат в торцевых сечениях. Затем также автоматически генерируется более подробная сетка с разбивкой стержня по высоте и по сечению, как показано на рис. 2.

На стадии формирования характеристик элемента, изображенного на рис. 2, промежуточные узлы исключаются. Чтобы избежать решения системы уравнений высокого порядка, осуществляется послойное редуцирование (понижение порядка) этих уравнений.

Для этого стержень делится на слои по своей длине. Одновременно формируются характеристики для двух соседних слоев  $i-j$  и  $j-k$  (рис. 3) в виде:

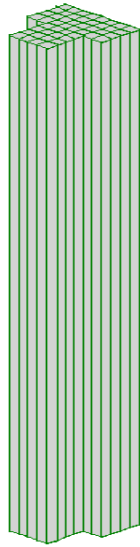
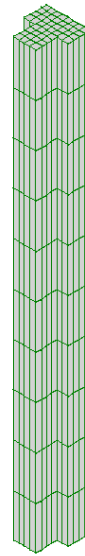
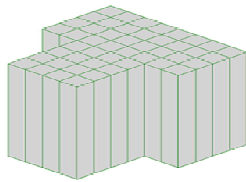


Рис. 1. Исходная конфигурация узлов конечно-элементной схемы



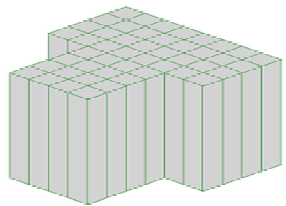
ВК ПРИНС

Рис. 2. Разбивка стержня на объемные конечные элементы



$k$

$j$



$j$

$i$

Рис. 3. Два соседних слоя стержня

$$\begin{cases} f_i^{(1)} \\ f_j^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} & k_{1,2}^{(1)} \\ k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{cases} \delta_i \\ \delta_j \end{cases} + \begin{cases} \bar{f}_i^{(1)} \\ \bar{f}_j^{(1)} \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_j^{(2)} \\ f_k^{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(2)} & k_{1,2}^{(2)} \\ k_{2,1}^{(2)} & k_{2,2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{cases} \delta_j \\ \delta_k \end{cases} + \begin{cases} \bar{f}_j^{(2)} \\ \bar{f}_k^{(2)} \end{cases},$$

где  $f_i^{(m)}, f_j^{(m)}, f_k^{(m)}, m = 1, 2$  - векторы узловых сил на поверхностях  $i, j$  и  $k$ ;  $k_{1,1}^{(m)}, k_{1,2}^{(m)}, k_{2,1}^{(m)}, k_{2,2}^{(m)}$  - блоки матриц жесткости нижнего ( $m = 1$ ) и верхнего ( $m = 2$ ) слоев;  $\bar{f}_i^{(m)}, \bar{f}_j^{(m)}, \bar{f}_k^{(m)}$  - векторы узловых сил от поверхностной и/или объемной нагрузки.

Используя условия равновесия на границе между слоями

между слоями

$$\{f_j^{(1)}\} + \{f_j^{(2)}\} = [k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{2,2}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)}]\{\delta_j\} + [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\} + \{\bar{f}_j^{(1)}\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\} = 0,$$

выразим перемещения  $\{\delta_j\}$  на границе между слоями через перемещения  $\{\delta_j\}$  и  $\{\delta_k\}$  на внешних границах пакета из двух слоев:

$$\{\delta_j\} = -[k_{j,j}]^{-1} \left( [k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\} \right) - [k_{j,j}]^{-1} \left( \{\bar{f}_j^{(1)}\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\} \right),$$

где  $[k_{j,j}] = [k_{2,2}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)}]$ .

Определяя из формул (1) векторы  $f_i^{(1)}$  и  $f_k^{(2)}$  и подставляя в полученные выражения значение  $\{\delta_j\}$ , приходим к соотношению:

$$\begin{cases} f_i^{(1)} \\ f_k^{(2)} \end{cases} = [K_{i,k}] \begin{cases} \delta_i \\ \delta_k \end{cases} + \begin{cases} \bar{f}_i \\ \bar{f}_k \end{cases},$$

где

$$[K_{i,k}] = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} - k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} k_{2,1}^{(1)} & -k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} k_{1,2}^{(2)} \\ -k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} - k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} k_{1,2}^{(2)} \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_i^{(1)} - k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} \{ \bar{f}_j^{(1)} + \bar{f}_j^{(2)} \} \\ \bar{f}_k^{(2)} - k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} \{ \bar{f}_j^{(1)} + \bar{f}_j^{(2)} \} \end{Bmatrix}$$

есть матрица жесткости и вектор нагрузки пакета из двух слоев, приведенные к узлам на внешних поверхностях пакета.

Применяя описанные выше операции к каждой паре соседних слоев, на последнем этапе получим матрицу жесткости и вектор нагрузок, приведенные к торцевым сечениям суперэлемента.

Предложенная методика реализована в вычислительном комплексе ПРИНС. Размеры статьи не позволяют привести полное описание алгоритма и тексты программ. Отметим только, что при исключении внутренних узлов в памяти ЭВМ сохраняется вся информация, необходимая для выполнения обратного хода, т.е. для вычисления перемещений промежуточных узлов и напряжений во всех элементах стержня.

В заключение приводим результаты тестового расчета, который был выполнен по программе ПРИНС для консольного стержня таврового сечения. Размеры стержня и способ нагружения показаны на рис. 4.

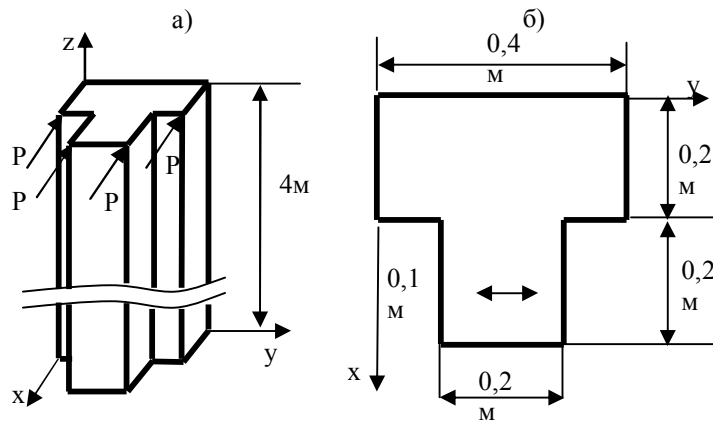


Рис. 4. Способ нагружения (а) и размеры сечения (б) стержня

Сила  $P$  принималась равной 10 КН, модуль упругости материала  $E = 3,2 \times 10^7$  КПа и коэффициент Пуассона  $\mu = 0,2$ . При принятых исходных данных максимальное перемещение и максимальное напряжение в стержне, подсчитанные по формулам сопротивления материалов, равны

$$\Delta_{x, \max} = 0,0181 \text{ м} \text{ и } \sigma_{z, \max} = 25400 \text{ КПа, соответственно.}$$

Результаты расчета по программе ПРИНС представлены на рис.5 для перемещений и на рис.6 для напряжений. Найденные по программе величины перемещений и напряжений равны  $\Delta_{x, \max} = 0,01797 \text{ м}$  и  $\sigma_{z, \max} = 24900 \text{ КПа}$ , соответственно. Расхождение составляет 0,718% для перемещений и 2% для напряжений.

**Вывод:**

Предложенный способ конечно-элементного моделирования стержня таврового сечения позволяет получить высокую точность результатов при незначительном увеличении числа степеней свободы конечного элемента и при устранении недостатков, присущих классическим моделям, основанным на гипотезе плоских сечений.

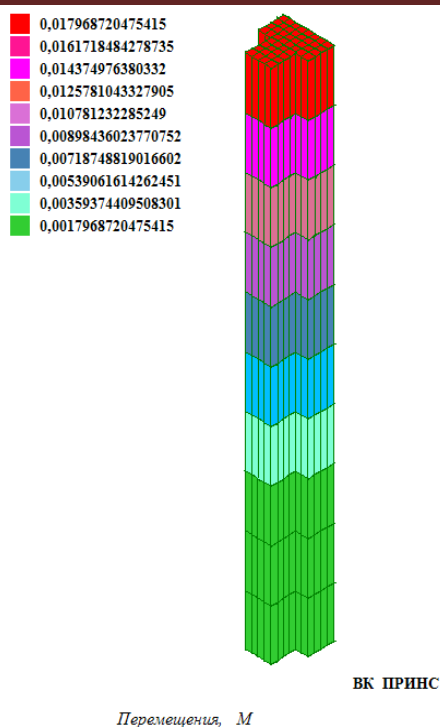


Рис. 5. Перемещения в стержне

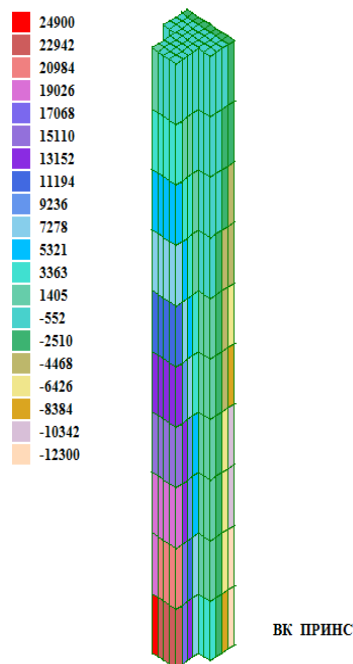


Рис. 6. Напряжения в стержне

#### Л и т е р а т у р а

1. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г. и др. Расчет остаточного поперечного импульса в железобетонной колонне при ударно-волновом нагружении ее боковой поверхности// Вестник ТГАСУ. – 2012. – № 4. –С. 179-190.
2. Белов Н.Н., Копаница Д.Г., Кумляк О.Г. и др. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. – Томск: STT, 2004. – 466 с.
3. NASTRAN theoretical manual. NASA, Washington, 1972.
4. Басов К.А. ANSYS. Справочник пользователя. – М.: Изд-во “ДМК-Пресс», 2005. – 637 с.
5. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia (2011).
6. Агапов В.П. Новый подход к моделированию стержней при расчете конструкций на прочность методом конечных элементов// Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций: Тр. Межд. молодежной научн. конф., посвященной 55-летию РУДН. – М.: Изд-во РУДН, 2014. – С. 16-20.
7. Агапов В.П. Сопоставительный анализ двух подходов к моделированию стержней при расчете строительных конструкций методом конечных элементов// Научное обозрение. – 2015. – № 8. – С.79-86.

#### References

1. Belov, N.N., Yugov, N.T., Kopanitz, D.G., et al (2012). An analysis of residual transversal impulse in reinforced concrete column when impulse-and-wave loading of its lateral surface, *Vestnik TGASU*, № 4, p. 179-190.
2. Belov, N.N., Kopanitz, D.G., Kumlyak, O.G. et al (2004). *An Analysis of Reinforced Concrete Structures When Explosion and Impulsive Loads*, Tomsk: 466 p.
3. NASTRAN theoretical manual. NASA, Washington, 1972.
4. Basov, K.A. (2005). ANSYS. Spravochnik Pol'sovatelya, Moscow: “DMK- Press», 637 p.
5. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia (2011).
6. Agapov, V.P. (2014). A new approach to modelling of rods in strength analysis of structures by finite element method, *Prochnost, Polzuchest i Razrushenie Stroitel'nyh i Mashinostroitel'nyh Materialov i Konstrukzij: Tr. Mezhd. Molodyozhnoy Nauchn. Konf., Posvyaschennoy 55-letiyu RUDN*, Moscow: Izd-vo RUDN, p. 16-20.
7. Agapov, V.P. (2015). Comparative analysis of two approaches to modeling of roads in an analysis of building structures by finite element method, *Nauchnoe Obozrenie*, № 8, p. 79-86.

**MODELLING OF THE T-SECTION RODS IN THE ANALYSIS OF BUILDING  
STRUCTURES BY FINITE ELEMENT METHOD**

V.P. AGAPOV  
*NIU MGSU, Moscow*

The technique of finite-element modeling of the T-section rods, based on the use of three-dimensional theory and super element technology, is described. A brief summary of the calculation formulas and a description of the algorithm realized in the program PRINS is presented. The test task is considered. The calculation results obtained by the program PRINS are compared with the analytical solution.

**Key words:** building structures, rod systems, finite element method, super element, software.

