

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ С КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Б.Б. КАЗБЕКОВ, аспирант
Институт математики и механики НАН Азербайджана
Азербайджан, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9;
e-mail: brrustam@mail.ru

Дается решение задачи о поперечном изгибе тонкой пластины, зацементированной по краям отверстий и ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных сквозных трещин с пластическими концевыми зонами, коллинеарных осей абсцисс и ординат неравной длины. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением моментов вне круговых отверстий и прямолинейных трещин с концевыми зонами пластических деформаций. Удовлетворяя граничным условиям, решение задачи теории изгиба пластин сводится к двум бесконечным системам алгебраических уравнений и двум сингулярным интегральным уравнениям. Затем каждое сингулярное интегральное уравнение сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: перфорированная тонкая пластина, прямолинейные трещины с концевыми зонами, поперечный изгиб, зоны пластических деформаций.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную упругую пластину, опертую или защемленную по краям периодической системой круговых отверстий, которая изгибается под действием постоянной поперечной нагрузки. Материал

пластины принят упруго-идеально пластическим, удовлетворяющим условию пластичности Треска-Сен-Венана. Считаем, что круговые отверстия имеют радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках $P_{m_1} = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2h_* \exp(i\alpha)$, $h_* > 0$, $\text{Im } \omega_2 > 0$ (рис. 1). Изотропная пластина ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных сквозных трещин коллинеарных осей абсцисс и ординат. Действие поперечной нагрузки будет стимулировать возникновение в вершинах трещин зон пластических деформаций.

Рассмотрим задачу о начальном развитии пластических деформаций на продолжении трещин. Исследование напряженно-деформированного состояния пластины с двоякопериодической системой круговых отверстий с прямолинейными сквозными трещинами показывает, что первые зоны пластических деформаций возникнут на продолжении линий трещин. В соответствии с моделью Леонова-Панасюка-Дагдейла [1] пластическая зона будет представлять собой узкий слой на продолжении трещин. Экспериментально показано, что зоны пластических деформаций будут представлять собой отрезки, расположенные на продолжении трещины. В тонких пластинах зоны пластических деформаций физически могут реализовываться в виде плоскости скольжения.

Берега трещин вне концевых зон свободны от внешних нагрузок. Принято, что в прочесе деформирования изотропной тонкой пластины противоположные берега трещин не контактируют между собой. Требуется определить напряженно-деформированное состояние изотропной тонкой пластины по крайевым условиям, выражающим отсутствие смещений вдоль контура круговых отверстий и внешних нагрузок на берегах двоякопериодической системы прямолинейных сквозных трещин с учетом пластических деформаций на продолжении трещин. Таким образом, требует решения следующая краевая задача теории изгиба пластин:

$$D\Delta\Delta W(x, y) = q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial W(\tau)}{\partial x} + i \frac{\partial W(\tau)}{\partial y} = 0, \quad \tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2 \quad \text{на контурах отверстий}, \quad (2)$$

$$M_n(t) = 0, \quad N_n(t) + \frac{\partial H_{nt}}{\partial t} = 0 \quad \text{на берегах трещин}, \quad (3)$$

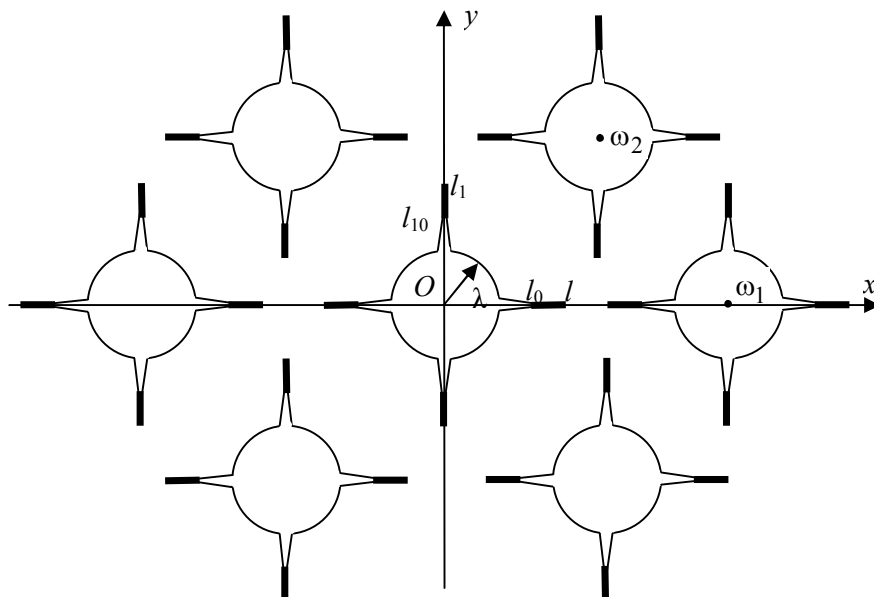


Рис. 1. Расчетная схема задачи об изгибе пластины

$M_n(t) = M_s$, $N_n(t) + \frac{\partial H_{nt}}{\partial t} = 0$ на берегах зон пластических деформаций.

Здесь q – поперечная нагрузка; t – аффикс точек берегов трещин и зон пластических деформаций; Δ – оператор Лапласа; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина пластины.

Размеры зон пластических деформаций изначально неизвестны; их следует определить в процессе решения задачи из дополнительного условия.

Решение поставленной задачи строится по принципу суперпозиции:

$$W(x, y) = W_0(x, y) + W_1(x, y),$$

$$W_0(x, y) = \frac{qz^2\bar{z}^2}{64D} + \frac{2q}{D} \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_0(z) + \chi_0(z)],$$

$$W_1(x, y) = \frac{2q}{D} \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)].$$

На основании краевых условий на жестко защемленных краях отверстий имеем:

$$\frac{\tau\bar{\tau}}{32} + \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия на берегах трещин и зон пластических деформаций имеют вид:

$$\varepsilon\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} + \frac{3t^2}{32} = f_0 + iC \quad \text{на } L_1, \quad (5)$$

$$\varepsilon\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + t_1\overline{\Phi'(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} + \frac{3t_1^2}{32} = f_0 + iC_* \quad \text{на } L_2,$$

Здесь t – аффикс точек берегов трещин и зон пластических деформаций, направленных коллинеарно осям абсцисс и ординат соответственно; C и C_* – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условия равновесия; L_1 и L_2 – совокупность берегов трещин и зон пластических деформаций, коллинеарно соответственно осям абсцисс и ординат.

Постановка задачи включает случаи дефектов типа трещин ($\varepsilon = -(3+\nu)/(1-\nu)$) и жестких включений ($\varepsilon = 1$).

Решение краевой задачи. Аналитические функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ ищем в виде [2, 3]:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (6)$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z);$$

$$\Phi_0(z) = \varphi_0'(z), \quad \Psi_0(z) = \chi_0''(z);$$

$$\varphi_0(z) = \varphi_{01}(z) + \varphi_{10}(z), \quad \chi_0(z) = \chi_{01}(z) + \chi_{10}(z);$$

$$\varphi_{01}(z) = A_1z + A_2z^3 + A_0\xi(z) - \alpha_2\lambda^2\zeta(z); \quad (7)$$

$$\chi_{01}(z) = B_0 + B_1z^2 + B_2z^4 - A_0\xi_*(z) - \beta_2\lambda^2\nu(z) + \alpha_2\lambda^2\zeta_*(z);$$

$$\nu(z) = \int \zeta(z)dz, \quad \xi(z) = \int \nu(z)dz, \quad \zeta_*(z) = -\int Q(z)dz;$$

$$\xi_*(z) = -\int \nu_*(z)dz, \quad \nu_*(z) = -\int \zeta_*(z)dz$$

$$\varphi_{10}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k-1)}(z);$$

$$\chi_{10}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k-2)}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} Q^{(2k-1)}(z); \quad (8)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\pi i(1+\kappa)} \int_{L_1} g(t) \zeta(t-z) dt + A'; \quad (9)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{\pi i(1+\kappa)} \int_{L_1} g(t) [\kappa \zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B';$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{L_2} g_1(t_1) \zeta(it_1 - z) dt_1 + A'';$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{L_2} [g_1(t_1) \kappa \zeta(it_1 - z) - [Q(it_1 - z) + it_1 \gamma(it_1 - z)] g_1(t_1)].$$

Интегралы в (12) берутся по линиям L_1 и L_2

$$L_1 = [-l, -\lambda] + [\lambda, l], \quad L_2 = [-l_1, -\lambda] + [\lambda, l_1],$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{z - P_{mn}} + \frac{1}{P_{mn}} + \frac{z}{P_{mn}^2} \right]; \quad \gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(z - P_{mn})^2} - \frac{1}{P_{mn}^2} \right];$$

$$\frac{\gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^{2k+2}} + \sum_{m,n} \frac{1}{(z - P_{mn})^{2k+2}} \quad (k=0,1,2,\dots);$$

$$Q(z) = \sum_{m,n} \left[\frac{\bar{P}_{mn}}{(z - P_{mn})^2} - 2z \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^3} - \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^2} \right];$$

$$\frac{Q^{(k)}(z)}{(-1)^k (k+1)!} = \sum_{m,n} \frac{\bar{P}_{mn}}{(z - P_{mn})^{k+2}} \quad (k=2,3,\dots).$$

Потенциалы (6)-(9) выбираются так, что $w(x, y)$ является двоякопериодической функцией. Также постоянные A_i, B_i подбираются таким образом, что функция $w_0(x, y)$ двоякопериодическая. Используя условия периодичности функции $w_0(x, y)$ и свойства введенных функций, находим, что

$$A_0 = \frac{\omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2}{32\pi i}; \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{1}{96} \left[\delta_1 \frac{\bar{\omega}_1 \omega_2 - \bar{\omega}_2 \omega_1}{2\pi i \omega_1} - 1 \right]; \quad B_2 = \frac{\gamma_2 \bar{\omega}_1 - \gamma_1 \bar{\omega}_2}{\omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2};$$

$$\beta_2 \lambda^2 \delta_1 + \alpha_2 \lambda^2 (\gamma_1 + \bar{\delta}_1) - 2A_1 \bar{\omega}_1 - 2B_1 \omega_1 = A_0 L_1(\omega); \quad (11)$$

$$\beta_2 \lambda^2 \delta_2 + \alpha_2 \lambda^2 (\gamma_2 + \bar{\delta}_2) - 2A_1 \bar{\omega}_2 - 2B_1 \omega_2 = A_0 L_2(\omega);$$

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1 + \frac{1}{6} \left[\delta_1 \omega_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\delta}_1 \bar{\omega}_1^2 - \gamma_1 \omega_1^2 \right]; \quad (12)$$

$$L_2(\omega) = \bar{\xi}_2 - \gamma_2^{**} - \pi i \bar{\omega}_2 + \frac{1}{6} \left[\delta_2 \omega_2 \bar{\omega}_2 - \bar{\delta}_2 \bar{\omega}_2^2 - \gamma_2 \omega_2^2 \right];$$

$$\xi_1 = 2\xi \left(\frac{\omega_1}{2} \right) + \frac{\delta_1 \omega_1^2}{8}; \quad \xi_2 = 2\xi \left(\frac{\omega_2}{2} \right) + \frac{\delta_2 \omega_2^2}{8};$$

$$\gamma_1^{**} = 2\nu^* \left(\frac{\omega_1}{2} \right) - \bar{\omega}_1 \nu \left(\frac{\omega_1}{2} \right) + \pi i \bar{\omega}_1 + \frac{\gamma_1 \omega_1^2}{8} - \frac{\gamma_1^* \omega_1}{2};$$

$$\gamma_2^{**} = 2\nu^* \left(\frac{\omega_2}{2} \right) - \bar{\omega}_2 \nu \left(\frac{\omega_2}{2} \right) + \pi i \bar{\omega}_2 + \frac{\gamma_2 \omega_2^2}{8} - \frac{\gamma_2^* \omega_2}{2}.$$

Следовательно, с учетом выражений (10)-(11) соотношения (6)-(9) дают двоякопериодическую функцию $w(x,y)$. Постоянная B_0 в формуле для функции $\chi_0(z)$ находится из условия равенства $w(x,y)$ нулю на контуре кругового отверстия $L_{0,0}$. Из условий симметрии задачи относительно координатных осей, находим, что

$$\text{Im } \alpha_{2k} = 0, \quad \text{Im } \beta_{2k} = 0 \quad (k=0,1,2,\dots). \quad (13)$$

Представления (6)–(9) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением смещений. Неизвестные искомые функции $g(x)$, $g_1(y)$ и коэффициенты α_{2k} , β_{2k} ($k=1,2,\dots$) должны быть найдены из краевых условий (4)-(5). В силу выполнения условия двоякопериодичности система граничных условий (4) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре $L_{0,0}$ ($\tau = \lambda e^{i\theta}$), а система граничных условий (5) вырождается в краевое условие на L_1 и L_2 .

К основным представлениям рассматриваемой задачи (6)-(9) следует добавить дополнительные условия

$$\int_{-l}^{-\lambda} g(t) dt = 0; \quad \int_{\lambda}^l g(t) dt = 0; \quad (14)$$

$$\int_{-l_1}^{-\lambda} g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \int_{\lambda}^{l_1} g_1(t_1) dt_1 = 0.$$

Эти условия обеспечивают однозначность углов поворота срединной плоскости при обходе контуров трещин [4].

Краевое условие (4) преобразуем относительно аналитических функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$:

$$\Phi_0(\tau) + \bar{\Phi}_0(\tau) - [\tau \Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta} = f_1(\theta) + f_2(\theta) - \frac{\tau \bar{\tau}}{32} + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta). \quad (15)$$

$$f_1(\theta) + f_2(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \bar{\Phi}_1(\tau) + [\tau \Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (16)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \bar{\Phi}_2(\tau) + [\tau \Phi'_2(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}.$$

Считается, что функции $f_1 + if_2$, $\varphi_1 + i\varphi_2$ на контуре кругового отверстия $|\tau| = \lambda$ разлагаются в комплексные ряды Фурье, имеющие в силу симметрии рассматриваемой задачи вид:

$$f_1(\theta) + f_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } F_{2k} = 0; \quad (17)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } D_{2k} = 0;$$

$$F_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-2ki\theta} d\theta, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (18)$$

$$D_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_1 + \varphi_2) e^{-2ki\theta} d\theta.$$

Подставив в (18) выражения (17) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов находим величин F_{2k} , D_{2k} :

$$F_{2k} = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g^*(t) f_{2k}(t) dt, \quad g^*(t) = \frac{g(t)}{i(1+\kappa)}, \quad (19)$$

$$D_{2k} = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \int_{L_2} g_1(t_1) \varphi_{2k}(t_1) dt_1.$$

Ввиду громоздкости функций $f_{2k}(t)$ и $\varphi_{2k}(t_1)$ в явном виде не приводятся.

Для нахождения коэффициенты α_{2k} , β_{2k} , применяем метод степенных рядов. Подставляя в левую часть краевого условия (15) вместо аналитических функций $\Phi_0(\tau)$, $\overline{\Phi_0(\tau)}$, $\Phi'_0(\tau)$ и $\Psi_0(\tau)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а правую часть (15) вместо $f_1 + if_2$, $\varphi_1 + i\varphi_2$ ряды Фурье (17) и применяя процедуру метода степенных рядов, получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} . После некоторых преобразований получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k} :

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2j+2} + b_j \quad (j=0,1,2,\dots). \quad (20)$$

Неизвестные коэффициенты β_{2k} определяются из уравнений:

$$\beta_2 = \frac{1}{1-\lambda^2 \varepsilon_3} \left[\varepsilon_1 - A'_0 + \varepsilon_2 \alpha_2 \lambda^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \quad (21)$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3) \alpha_{2j+2} - A'_{-2j-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2}.$$

Таким образом, решая краевой задачи (4), определение искоемых коэффициентов α_{2k} и β_{2k} сведено к бесконечным алгебраическим уравнениям, в правой части которых имеются величины, зависящие в виде интегралов от искоемых функций $g(x)$ и $g_1(y)$. Для определения искоемых функций $g(x)$, $g_1(y)$ имеются граничные условия (5) на берегах трещин.

Требую, чтобы функции (6)-(9) удовлетворяли краевому условию на контуре трещины L_1 , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $g_*(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\varepsilon}{\pi} \int_{L_1} g_*(t) \zeta(t-x) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) [\kappa \zeta(t-x) + \\ & + Q(t-x) - (t-x) \gamma(t-x)] dt + H(x) = iC + f_0, \quad (22) \\ & H(x) = \frac{3x^2}{32} - \kappa A' + \overline{A'} + \overline{B'} + (1+\varepsilon) \Phi_*(x) + x \Phi'_*(x) + \Psi_*(x), \\ & \Phi_*(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x), \quad \Psi_*(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x). \end{aligned}$$

Таким же образом, удовлетворяя граничному условию на контуре L_2 , получаем еще одно сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции $g_1(y)$:

$$-\frac{1+\varepsilon}{\pi i(1+\kappa)} \int_{L_2} \left\{ g_1(t_1) \left[i\zeta(it-iy) - \overline{i\zeta(it-iy)} \right] + \overline{g_1(t_1)} \left[iQ(it-iy) + (it-iy)\overline{\gamma(it-iy)} - \overline{i\zeta(it-iy)} \right] \right\} dt_1 + N(y) = iC_* + f_0, \quad (23)$$

$$N(y) = -\kappa A'' + \overline{A''} + \overline{B''} - \frac{3y^2}{32} + \varepsilon \overline{\Phi_*(iy)} + iy \overline{\Phi'_*(iy)} + \overline{\Psi_*(iy)},$$

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi_*(x) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z).$$

Используя условия [4], обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах разрезов L_1 и L_2 ,

$$\operatorname{Re} \int_{-l}^{-\lambda} \bar{t}g(t)dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda}^l \bar{t}g(t)dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{-l_1}^{-\lambda} \bar{t}_1 g_1(t_1)dt_1 = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda}^{l_1} \bar{t}_1 g_1(t_1)dt_1 = 0,$$

находим, что $C = 0$; $C_* = 0$.

Для решения сингулярных интегральных уравнений (22), (23) воспользуемся разложением функций $\zeta(z)$, $\gamma(z)$, $Q(z)$ в основном параллелограмме периодов. Каждое сингулярное интегральное уравнение приводим к стандартному виду с помощью замены переменных. Далее применяя процедуру алгебраизации [5, 6] вместо каждого интегрального уравнения получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим правильные решетки, имеющие наибольшее практическое применение.

1) правильная треугольная решетка ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2 \exp(i\pi/3)$). Находим по полученным формулам значения постоянных A_0 , A_2 , B_2 :

$$A_0 = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi}, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = 0.$$

Постоянные $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$ в системе для определения A_1 и B_1 в этом частном случае имеют вид:

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1, \quad L_2(\omega) = \frac{L_1(\omega)}{\sqrt[3]{e^{\pi i}}},$$

а постоянные ε_i :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} L_1(\omega); \quad \varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_4 = 0; \quad \varepsilon_5 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_6 = 0.$$

б) правильная квадратная решетка ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$). Для этого случая

$$A_0 = -\frac{1}{4\pi}, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{\gamma_1}{192\pi};$$

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1 - \frac{2}{3} \gamma_1, \quad L_2(\omega) = -i L_1(\omega);$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{8\pi} L_1(\omega); \quad \varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_3 = \frac{\pi}{4}; \quad \varepsilon_4 = 0; \quad \varepsilon_5 = \frac{2\gamma_1 + \pi}{4}; \quad \varepsilon_6 = 0.$$

Численные результаты. Для определения искомых величин α_{2k} , β_{2k} , $g^*(t_k)$, $g_1(t_k)$ необходимо совместное решение системы, полученной на основании алгебраизации основных уравнений.

Каждое из сингулярных интегральных уравнений (22), (23) сводилось к конечной системе алгебраических уравнений. Из-за неизвестных размеров зон пластических деформаций полученная объединенная алгебраическая система уравнений оказывается нелинейной. Решение рассматриваемой задачи и, соответственно сингулярных интегральных уравнений (22), (23), ищется в классе всюду ограниченных функций, поскольку напряжения в изотропной упругой пластине со сквозными трещинами с концевыми пластическими зонами ограничены. Как известно из теории краевых задач, такое решение существует при дополнительных условиях (условиях разрешимости краевой задачи).

Приводя каждое сингулярное интегральное уравнение (22), (23) к стандартной форме, применяем интерполяционный полином Лагранжа, построенный по чебышевским узлам и квадратурные формулы типа Гаусса (метод Мультиппа-Каландия). Таким образом, каждое сингулярное интегральное уравнение первого рода сводится к конечной системе алгебраических уравнений, связанных с двумя бесконечными системами линейных алгебраических уравнений (20), (21). Чтобы замкнуть полученную объединенную алгебраическую систему, состоящую из двух бесконечных систем алгебраических уравнений (20), (21) и двух конечных систем уравнений, нужно добавить еще два уравнения, определяющие размеры концевых зон пластических деформаций на продолжении трещин. Эти уравнения получаем, записывая условия разрешимости краевой задачи:

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k g_k^0(\tau_m) \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2M} \pi, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k g_{1k}^0(\tau_m) \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0.$$

Таким образом, получена замкнутая алгебраическая система, полностью определяющая решение рассматриваемой упругопластической задачи о поперечном изгибе тонкой пластины.

Для определения предельного состояния изгибаемой тонкой пластины, при котором произойдет рост трещин, используем критерий хрупкого разрушения пластины, в качестве которого принимаем критерий критического раскрытия берегов трещин у основания пластической зоны. Согласно указанному критерию рост развитие трещин имеет место, когда раскрытие берегов трещин в вершине у основания пластической зоны достигает предельного для материала пластины значения δ_{cr} , т.е. при выполнении условий

$$\int_{-l}^{l_0} g(t) dt = -i\delta_{cr}, \quad \int_{-l_1}^{l_0} g_1(t) dt = i\delta_{cr}, \quad (25)$$

Представим условия (25) в дискретном виде, используя указанные выше замены переменных и квадратурную формулу Гаусса

$$\frac{1-h_1^2}{2\sqrt{2M}} \sum_{k=1}^{M_1} \frac{p_k^0}{\sqrt{(1-h_1^2)(1+\tau_k)+h_1^2}} = \delta_{cr}, \quad (26)$$

$$-\frac{1-\lambda_2^2}{2\sqrt{2M}} \sum_{n=1}^{M_2} \frac{r_n^0}{\sqrt{(1-\lambda_2^2)(1+\tau_n)+\lambda_2^2}} = \delta_{cr},$$

где M_1, M_2 – число чебышевских узлов, принадлежащих интервалам (l_0, l) , (l_{10}, l_1) .

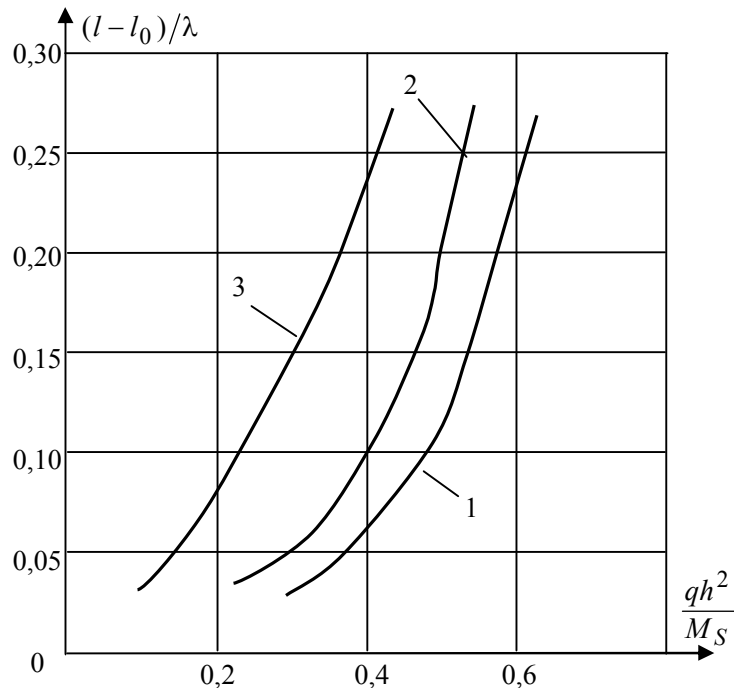


Рис. 2. Зависимость длины концевой зоны пластических деформаций $(l_0 - l)$ при $l = 1,5\lambda$ и значениях радиусов отверстий $\lambda = 0,3; 0,4; 0,5$ (кривые 1-3) для треугольной сетки отверстий

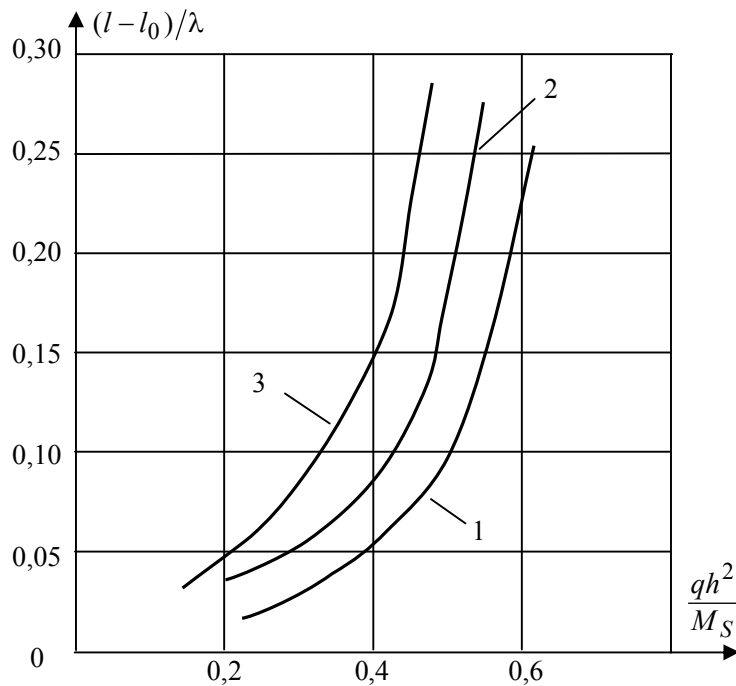


Рис. 3. Зависимость длины концевой зоны пластических деформаций $(l_0 - l)$ при $\lambda = 0,3$ и значениях длины трещин $l = 1,10\lambda; 1,25\lambda; 2,00\lambda$ (кривые 1-3)

Полученная объединенная алгебраическая система является нелинейной из-за заранее неизвестных размеров зон пластических деформаций, поэтому ее

удобно решать методом последовательных приближений. В каждом объединенная алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений M порядка $M=40$.

На рис. 2 представлена зависимость длины концевой зоны пластических деформаций $(l_0 - l)$ при $l=1,5\lambda$ и значениях радиусов отверстий $\lambda=0,3; 0,4; 0,5$ (кривые 1-3) для треугольной сетки отверстий. На рис. 3 аналогичная зависимость показана для $\lambda = 0,3$ и значениях длины трещин $l = 1,10\lambda; 1,25\lambda; 2,00\lambda$ (кривые 1-3). Совместное решение объединенной алгебраической системы и условий (26) позволяет, имея заданные характеристики трещиностойкости материала, определить критическую диаграмму разрушения поперечной изгибающей нагрузкой тонкой пластины, опертой или защемленной по краям периодической системой круговых отверстий, размеры зон пластических деформаций для состояния предельного равновесия, при которых имеет место рост трещин.

Л и т е р а т у р а

1. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
2. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. – 556 с.
3. *Мирсалимов В.М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. – Баку.: Элм, 1984. – 124 с.
4. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. *Мирсалимов В.М.* Неодномерные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
6. *Ladopoulos E.G.* Singular integral equations, Linear and non-Linear theory and its applications in science and engineering. – Berlin: Springer Verlag, 2000. – 553 p.

R e f e r e n c e s

1. *Panasjuk, VV.* (1991). Mechanics of quasibrittle fracture of materials. Kiev: Naukova Dumka, 416 p.
2. *Grigolyuk EI, Filshhtinskii LA.* (1970). Perforated plates and shells. Moscow: Nauka, 556 p.
3. *Mirsalimov VM.* (1984). Fracture of elasto - and elastoplastic bodies with cracks. Baku: Science. 124 p.
4. *Savruk MP.* (1981). Two-dimensional problem of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka, 324 p.
5. *Mirsalimov VM.* (1987). Non-one dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 256 p.
6. *Ladopoulos EG.* (2000). Singular integral equations, Linear and non-Linear theory and its applications in science and engineering. Berlin: Springer Verlag, 553 p.

TRANSVERSE BENDING OF A THIN PERFORATED PLATE WEAKENED BY RECTILINEAR CRACKS WITH END ZONES OF PLASTIC DEFORMATION

B.B. Kazbekov

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

We give a problem solution for transverse bending of a thin plate, clamped at holes edges and weakened by doubly periodic system of rectilinear through cracks with unequal length, collinear to abscissa and ordinate axes plastic end zones. We construct the general representation of the solutions describing the class of problems with a doubly periodic distribution of moments out of the circular holes and rectilinear cracks with end zones of plastic deformations. Satisfying the boundary conditions, the solution of the plate bending theory problem is reduced to two infinite systems of algebraic equations and two singular integral equations. Then, each of the singular integral equations reduces to finite system of linear algebraic equations.

KEYWORDS: perforated thin plate, rectilinear crack with end zones, transverse bending, zones of plastic deformation.